Liite sileistä funktioista

Vektorianalyysi I Helsingin yliopistolla

Emilia Takanen (emilia.takanen@aalto.fi)

14. lokakuuta 2022, uudelleenkäännetty 16. maaliskuuta 2024

Tämän liitteen tavoitteena on antaa teoreettinen pohja vektorianalyysin kursseilla helposti käytetylle termille "kiltti funktio, jonka voi odottaa olevan differentioituva" ja muille samankaltaisille intuitioon pohjautuville "triviaaleille huomioille". Tällainen kieli on tyypillistä matematiikan opiskelijoiden ja matemaatikkojen keskuudessa, mutta sitä käytettäessä täytyy ymmärtää käyttöön sisältyvä vaara. Matemaattiset esineet saattavat rikkoutua hyvinkin hienovaraisilla tavoilla ja nämä hienovaraisuudet eivät yleensä ole nähtävissä siinä pintapuolisessa katsauksessa, joka tehdään kun asian sanotaan olevan "triviaali". Täten on aina silloin tällöin hyvä formalisoida intuitionsa ja tarkistaa sen olevan kalibroitu oikein, kuten kirjoittaja on tehnyt kirjoittaessaan tämän liitteen.

Tavoitteena on myös täydentää Topologia I -kurssilla opetettua teoriaa jatkuvien funktioiden yhdisteiden jatkuvuudesta, joka ei ole riittävän vahvaa vektorianalyyttisiin sovelluksiin tai myöhempään differentiaaligeometrian teoriaan.

Sileiden funktioiden rengas

Kutsumme sileäksi funktioksi funktiota, jonka jokaisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Näytetään ensin, että suurin osa tutuista laskutoimituksistamme on sileitä.

Lemma 1. *Funktiot*

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x,$$
$$\lambda_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cx, c \in \mathbb{R}$$
$$\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2,$$
$$\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2,$$
$$\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x,$$
$$\tau_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x),$$
$$\tau_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$$

ovat sileitä.

Todistus. Eksponentti- ja trigonometrisia funktioita lukuunottamatta, näemme laskemalla ainakin ensimmäisten ja toisten osittaisderivaattojen olevan jatkuvia ja viimeistään kolmansien osittaisderivaattojen olevan nollafunktioita. Nollafunktion osittaisderivaatat ovat aina nollafunktioita ja täten kaikki korkeammat osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Eksponenttifunktion derivaatta on eksponenttifunktio itse ja täten jokaisen kertaluvun derivaatta on jatkuva. Trigonometristen funktioiden derivaatat vaihtelevat toistensa välillä kerrottuna mahdollisesti miinuksella. Täten niiden derivaatat ovat aina jatkuvia. Kaikki funktiot ovat siis sileitä. □

Lemma 2. *Funktio*

$$p_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^j$$

on sileä kaikilla $j \in \mathbb{R}$*. Jos* $j \in \mathbb{Z}$*, funktio on sileä vaikka sen määrittelyjoukko laajennettaisiin olemaan* $R \backslash \{0\}$*. Jos* $j \in \mathbb{N}$*, funktio on sileä vaikka sen määrittelyjoukko laajennettaisiin olemaan* $\mathbb{R}$*.*

Todistus. Muistamme analyysin kursseilta tällaisen polynomifunktion derivoinnin olevan kuvaus

$$p_j \mapsto jp_{j-1}$$

kaikilla $j \neq 0$. Lisäksi jos $j = 0$, ensimmäinen derivaatta on nollafunktio. Täten funktion p_j jokaisen kertaluvun derivaatta on joko p_k jollain $k \in \mathbb{R}$ tai nollafunktio. Koska sekä nollafunktio, että jokainen p_j on jatkuva alueessa $\mathbb{R}_+$, tämä tarkoittaa funktioiden p_j olevan sileitä. Tapauksessa $j \in \mathbb{Z}_-$ derivaatat ovat muotoa $p_k, k \in \mathbb{Z}_-$, ja siis jatkuvia alueessa $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Tapauksessa $j \in \mathbb{N}$ ensimmäiset j derivaattaa ovat muotoa $p_k, k \in \mathbb{N}$, ja siis jatkuvia alueessa $\mathbb{R}$. Loput derivaatat ovat nollafunktioita, jotka ovat myös jatkuvia alueessa $\mathbb{R}$. $\square$

Lemma 3. *Funktio*

$$\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$$

on sileä.

Todistus. Funktion ensimmäinen derivaatta on $x \mapsto 1/x$ eli p_{-1}. Täten sileys seuraa äskeisestä lemmasta. $\square$

Nostetaan äsken määritellyt laskutoimitukset hieman teoreettisemmalle tasolle.

Määritelmä 4 (Sileiden funktioiden joukko)**.** *Sileiden funktioiden joukko avaruudelle* $\mathbb{R}^n$ *on*

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid & \textit{Funktion } f \textit{ jokaisen kertaluokan} \\ & \textit{osittaisderivaatat ovat jatkuvia.}\}. \end{aligned}$$

Sanotaan että joukon jäsen on sileysluokkaa $C^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Rajoitamme tutkimuksemme funktioihin $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, koska tällöin voimme käyttää avaruuden $\mathbb{R}$ kunta-aksioomia teoriassamme. Tämä ei kuitenkaan olennaisesti haittaa tavoitettamme tutkia kurssilla esiintyviä sileitä funktioita sillä funktio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ on sileä tarkalleen silloin kun sen komponenttifunktiot $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ovat sileitä. Huomataan että jokainen joukon $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ alkio voidaan ajatella joukon $C^\infty(\mathbb{R}^n), m \leq n$, alkiona lisäämällä muuttujia, jotka eivät vaikuta mihinkään. Siis formaalisti jos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, on olemassa $f' \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, joka on määritelty

$$f'(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m).$$

Visuaalisesti

$$C^\infty(\mathbb{R}^1) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ldots$$

missä koukkunuolet tarkoittavat sisältyvyyttä.

Lisäksi huomataan määritelmästä, että jokainen $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funktio on myös $C^k(\mathbb{R}^n)$, eli k kertaa jatkuvasti differentioituva. Täten sileät funktiot toteuttavat Taylorin kaavan oletukset kaikille kertaluvuille ja niiden ääriarvopisteet voidaan määrätä ensimmäisten ja toisten osittaisderivaattojen käyttäytymisestä, joka vaatii vähintään sileysluokan $C^3(\mathbb{R}^n)$. Siis

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow C^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow C^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^n).$$

Määritellään merkintätapa korkeamman kertaluokan osittaisderivaatoille. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $I \in \{1, \ldots, n\}^k$. Merkitsemme kertaluokan k osittaisderivaattaa jonossa I esiintyvien muuttujien suhteen $\partial_I f$. Esimerkiksi jos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ja $I = (1,2,3,1) \in \{1,2,3\}^4$, niin $\partial_I f = \partial_{1231} f$.

Seuraava lemma todistetaan kurssilla Topologia I funktioille metrisiltä avaruuksilta (joita euklidiset avaruudet ovat), mutta esitämme sen tässä tarvitsemillemme funktioille.

Lemma 5. *Olkoon funktiot $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Tällöin funktiot*

$$\begin{aligned}
&h \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto h(f(x)),\\
&(f, g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x)),\\
&e \circ (f, g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto e(f(x), g(x))
\end{aligned}$$

ovat jatkuvia.

Lause 6. *On olemassa funktiot*

$$\begin{aligned}
&N : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), f \mapsto \eta(f) = -f\\
&L_c : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), f \mapsto \lambda_c(f) = cf, c \in \mathbb{R}\\
&S : C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), (f, g) \mapsto \sigma(f, g) = f + g\\
&M : C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), (f, g) \mapsto \mu(f, g) = fg\\
&P_j : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), f \mapsto p_j(f) = f^j, j \in \mathbb{N},\\
&E : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), f \mapsto \epsilon(f) = e^f,\\
&T_1 : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), f \mapsto \tau_1(f) = \sin(f),\\
&T_2 : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), f \mapsto \tau_2(f) = \cos(f).
\end{aligned}$$

Todistus. Funktiot ovat määritelty selkeiden kaavojen kautta joten tietyssä mielessä niiden olemassaolosta ei ole kysymystäkään. Lähtö- ja maalijoukot ovat kuitenkin määrittelevä osa funktiota ja täten meidän täytyy tarkistaa funktioiden arvojen todellakin olevan $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee

$$\begin{aligned}
&\partial_i(\eta(f)) = \eta(\partial_i f)\\
&\partial_i(\lambda_c(f)) = \lambda_c(\partial_i f)\\
&\partial_i(\sigma(f,g)) = \sigma(\partial_i f, \partial_i g)\\
&\partial_i(\mu(f,g)) = \sigma(\mu(f,\partial_i g), \mu(\partial_i f, g))\\
&\partial_i(p_j(f)) = \mu(\lambda_j(\partial_i f), p_{j-1}(f)), j \in \mathbb{N},\\
&\partial_i(\epsilon(f)) = \mu(\partial_i f, \epsilon(f)),\\
&\partial_i(\tau_1(f)) = \mu(\partial_i f, \tau_2(f)),\\
&\partial_i(\tau_2(f)) = \mu(\partial_i f, \eta \circ \tau_1(f)).
\end{aligned} \tag{1}$$

Lemman 5 perusteella nämä ovat jatkuvia jos funktioiden f ja g osittaisderivaatat $\partial_i f$ ja $\partial_i g$ ovat jatkuvia. Kuitenkin oletuksemme mukaan f ja g ovat sileitä, eli $\partial_I f$ ja $\partial_I g$ ovat jatkuvia millä tahansa jonolla $I \in \{1, \ldots, n\}^k, k \in \mathbb{N}$.

Kaavat (1) muodostavat alkuaskeleen seuraaville induktiotodistuksille.

1. Oletetaan, että funktion $\eta(f)$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun $m-1$ asti ja jokainen näistä osittaisderivaatoista on yhdistetty funktio $\eta(\partial_J f)$ jollain $J \in \{1, \ldots, n\}^{m-1}$. Tällöin jos I' on jono joukossa $\{1, \ldots, n\}^m$ ja I vastaava jono joukossa $\{1, \ldots, n\}^{m-1}$, josta on poistettu viimeinen termi $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin

$$\partial_{I'}\eta(f) = \partial_i(\partial_I \eta(f)) = \partial_i(\eta(\partial_I f) = \eta(\partial_{I'} f).$$

Täten jokainen asteen m osittaisderivaatta on jatkuva ja yhdistetty funktio $\eta(\partial_{I'} f)$ jollain $I' \in \{1, \ldots, n\}^m$.

2. Oletetaan, että funktion $\lambda_c(f), c \in \mathbb{R}$, osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun $m-1$ asti ja jokainen näistä osittaisderivaatoista on yhdistetty funktio $\lambda_c(\partial_J f)$ jollain $J \in \{1, \ldots, n\}^{m-1}$. Tällöin jos I' on jono joukossa $\{1, \ldots, n\}^m$ ja I vastaava jono joukossa $\{1, \ldots, n\}^{m-1}$, josta on poistettu viimeinen termi $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin

$$\partial_{I'}\lambda_c(f) = \partial_i(\partial_I \lambda_c(f)) = \partial_i(\lambda_c(\partial_I f) = \lambda_c(\partial_{I'} f).$$

Täten jokainen asteen m osittaisderivaatta on jatkuva ja yhdistetty funktio $\lambda_c(\partial_{I'} f)$ jollain $I' \in \{1, \ldots, n\}^m$.

3. Oletetaan, että funktion $\sigma(f,g)$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun $m-1$ asti ja jokainen näistä osittaisderivaatoista on yhdistetty funktio $\sigma(\partial_J f, \partial_J g)$ jollain

$J \in \{1,\dots,n\}^{m-1}$. Tällöin jos I' on jono joukossa $\{1,\dots,n\}^m$ ja I vastaava jono joukossa $\{1,\dots,n\}^{m-1}$, josta on poistettu viimeinen termi $i \in \{1,\dots,n\}$, niin

$$\partial_{I'}\sigma(f,g) = \partial_i(\partial_I\sigma(f,g)) = \partial_i(\sigma(\partial_I f, \partial_I g)) = \sigma(\partial_{I'} f, \partial_{I'} g).$$

Täten jokainen asteen m osittaisderivaatta on jatkuva ja yhdistetty funktio $\sigma(\partial_{I'} f, \partial_{I'} g)$ jollain $I' \in \{1,\dots,n\}^m$.

4. Oletetaan, että funktion $\mu(f,g)$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun $m-1$ asti ja jokainen näistä osittaisderivaatoista on yhdistetty funktio funktioista $\sigma, \mu, \partial_J f, \partial_J g$, missä J käy yli kaikkien jonojen $\{1,\dots,n\}^k$ kaikilla $k \leq m-1$. Olkoon I' jono joukossa $\{1,\dots,n\}^m$ ja I vastaava jono joukossa $\{1,\dots,n\}^{m-1}$, josta on poistettu viimeinen termi $i \in \{1,\dots,n\}$. Tällöin kaavojen (1) perusteella $\partial_{I'}\mu(f,g) = \partial_i(\partial_I\mu(f,g))$ on jatkuva ja yhdistetty funktio funktioista $\sigma, \mu, \partial_J f, \partial_J g$, missä J käy yli kaikkien jonojen $\{1,\dots,n\}^k$ kaikilla $k \leq m$.

5. Oletetaan, että funktion $p_j(f)$, $j \in \mathbb{N}$, osittaisderivaatat ovat jatkuvia kertalukuun $m-1$ asti ja jokainen näistä osittaisderivaatoista on yhdistetty funktio funktioista $\lambda_l, p_l, \mu, \partial_J f, \partial_J g$, missä l käy yli kaikkien lukujen $\{1,\dots,j\}$ ja J käy yli kaikkien jonojen $\{1,\dots,n\}^k$ kaikilla $k \leq m-1$. Olkoon I' jono joukossa $\{1,\dots,n\}^m$ ja I vastaava jono joukossa $\{1,\dots,n\}^{m-1}$, josta on poistettu viimeinen termi $i \in \{1,\dots,n\}$. Tällöin kaavojen (1) perusteella $\partial_{I'} p_j(f) = \partial_i(\partial_I p_j(f))$ on jatkuva ja yhdistetty funktio funktioista $\lambda_l, p_l, \mu, \partial_J f, \partial_J g$, missä l käy yli kaikkien lukujen $\{1,\dots,j\}$ ja J käy yli kaikkien jonojen $\{1,\dots,n\}^k$ kaikilla $k \leq m$.

6. Todistus eksponentti- ja trigonometrisille funktioille jätetään harjoitustehtäväksi lukijalle.

Näiden induktiotodistusten perusteella jos $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ niin funktioiden N, L_c, S, M, P_j, $c \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$, arvoina saadut funktiot ovat sileitä. Täten jokaisen näistä funktioista maalijoukko todellakin on $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

□

Seuraava korollaari vaatii tietoja kurssilta Algebralliset rakenteet, mutta ei ole olennainen lopun tekstin ymmärtämiselle.

Korollaari 7. *Joukko $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ varustettuna negaatiolla N, summauksella S ja kertolaskulla M muodostaa renkaan.*

Seuraavien määritelmien notaatiot joukoille eivät välttämättä ole vakiintuneessa käytössä.

Määritelmä 8 (Sileiden ei-katoavien funktioiden joukko)**.** *Sileiden ei-katoavien funktioiden joukko avaruudelle* $\mathbb{R}^n$ *on*

$$C^\infty_\pm(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,| \textit{Funktion } f \textit{ jokaisen kertaluokan osittaisderivaatat} \\ \textit{ovat jatkuvia ja } f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}^n.\}.$$

Muistetaan analyysin kursseilta, että

$$p_{-j}(f) = f^{-j} = \frac{1}{f^j} = \frac{1}{p_j(f)}.$$

Täten ainoa ongelma negatiivisella potenssilla j varustettujen funktioiden P_j käytössä lauseessa 6 oli, etteivät arvot ole määriteltyjä jos argumenttina oleva funktio $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ saa arvon nolla jossain pisteessä. Käyttäen tätä uutta joukkoa voimme laajentaa tulosta.

Lemma 9. *On olemassa funktiot*

$$P_j : C^\infty_\pm(\mathbb{R}^n) \to C^\infty_\pm(\mathbb{R}^n), f \mapsto p_j(f) = f^j, j \in \mathbb{Z}.$$

Todistus. Täysin samoin kuin lauseen 6 todistuksessa. □

Saamme toisen algebrallisen korollaarin.

Korollaari 10. *Joukko* $C^\infty_\pm(\mathbb{R}^n)$ *varustettuna negaatiolla* N*, summauksella* S*, kertolaskulla* M *ja inversiolla* P_{-1} *muodostaa kunnan.*

Jatketaan sileiden funktioiden avaruuksien määrittelemistä.

Määritelmä 11 (Sileiden positiivisten funktioiden joukko)**.** *Sileiden positiivisten funktioiden joukko avaruudelle* $\mathbb{R}^n$ *on*

$$C^\infty_+(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,| \textit{Funktion } f \textit{ jokaisen kertaluokan osittaisderivaatat} \\ \textit{ovat jatkuvia ja } f(x) > 0, x \in \mathbb{R}^n.\}.$$

Logaritmifunktiomme γ on vähemmän hyödyllinen määrittämään algebrallisia rakenteita sileiden funktioiden joukolle, mutta toteamme kuitenkin seuraavan lauseen. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi lukijalle.

Lause 12. *Seuraava funktio on olemassa.*

$$G : C^\infty_+(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), f \mapsto \gamma(f) = \ln(f).$$

Määritellään vielä yksi joukko.

Määritelmä 13 (Sileiden ei-negatiivisten funktioiden joukko)**.** *Sileiden ei-negatiivisten funktioiden joukko avaruudelle* $\mathbb{R}^n$ *on*

$$C^\infty_\geq(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \textit{Funktion } f \textit{ jokaisen kertaluokan osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja } f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.\}.$$

Tarkennamme tämän avulla hieman potenssifunktioitamme.

Lemma 14. *Funktion* P_j *maalijoukkoa voi rajoittaa jos* $j \in 2\mathbb{N}$*, eli jos* j *on parillinen. On siis olemassa funktiot*

$$P_j : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty_\geq(\mathbb{R}^n), f \mapsto p_j(f) = f^j, j \in 2\mathbb{N}.$$

Saamme myös määriteltyä potenssifunktiot mielivaltaiselle $j \in \mathbb{R}$.

Lemma 15. *On olemassa funktiot*

$$P_j : C^\infty_+(\mathbb{R}^n) \to C^\infty_+(\mathbb{R}^n), f \mapsto p_j(f) = f^j, j \in \mathbb{R}.$$

Näiden todistukset jätetään lukijalle, mutta seuraavat todistuksesta potenssifunktioille lauseessa 6.

Joukoillamme on seuraavat sisältyvyydet.

$$\begin{tikzcd}
 & C^\infty_\pm(\mathbb{R}^n) \arrow[dr, hook] & \\
C^\infty_+(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\
 & C^\infty_\geq(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Sileiden funktioiden konstruointi

Viime kappaleessa loimme tutuista laskutoimituksistamme työkaluja, jotka säilyttävät funktioiden sileyden. Tässä kappaleessa osoitamme että voimme näiden avulla konstruoida suurimman osan kurssilla tapaamistamme funktioista ja täten olla luottavaisin mielin että ne ovat käyttäytymiseltään "kilttejä".

Työkalumme ottavat sisään sileitä funktioita joukosta $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, mutta emme ole vielä määritelleet yhtäkään tällaista funktiota. Tehdään tämä.

Lemma 16. *Projektio*

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

on sileä.

Todistus. Funktion ensimmäiset osittaisderivaatat ovat joko vakiofunktioita tai nollafunktioita. Täten kaikki korkeamman kertaluokan osittaisderivaatat ovat nollafunktioita ja funktio on sileä. □

Lemma 17. *Vakiokuvaus*

$$c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto c,$$

missä $c \in \mathbb{R}$*, on sileä.*

Todistus. Funktion kaikki osittaisderivaatat ovat nollafunktioita. Täten se on sileä. □

Tosiasiassa emme kurssin funktioita kootessa tarvitse muita funktioita joukosta $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 18. *Polynomifunktiot*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_j)_{j=1}^n \mapsto (\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{k_j} a_{i,j} x_j^i) + c, k_j \in \mathbb{N}, a_{ij} \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R},$$

joissa on n *muuttujaa ovat sileitä funktioita* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Lisäksi voimme kutsua polynomifunktioiksi myös funktioita*

$$(f_1, \ldots, f_m) = (f_j)_{j=1}^m \mapsto (\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_j} a_{i,j} f_j^i) + c, k_j \in \mathbb{N}, a_{ij} \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R},$$

jotka ovat funktioita $C^\infty(\mathbb{R}^n)^m \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Todistus. Polynomifunktio on yhdistetty funktio projektioista π_i, potensseista $P_j, j \in \mathbb{N}$,, skalaarikertomisista $L_c, c \in \mathbb{R}$, summista S ja vakiofunktioista $c, c \in \mathbb{R}$. Täten se on lauseen 6 perusteella sileä. Samoin jos korvaamme projektiot funktioilla joukosta $C^\infty(R^n)$, saamme lopputuloksena sileän funktion. □

Annetaan esimerkki polynomifunktion konstruktiosta. Funktio

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1^2 + x_1 + 30x_2^{20} + 1000x_3^{400} + 3$$

voidaan esittää yhdistettynä funktiona

$$S(L_2 \circ P_2 \circ \pi_1, S(\pi_1, S(L_{30} \circ P_{20} \circ \pi_2, S(L_{1000} \circ P_{400} \circ \pi_3, 3)))).$$

Kuten lauseessa todettiin, polynomifunktiot sileillä muuttujilla ovat sileitä. Esimerkiksi

$$(x_1, x_2) \mapsto \sin(x_1)^2 + \sin(x_2) + \sin(x_1 + x_2),$$

on polynomifunktio kolmessa muuttujassa $\sin(x_1), \sin(x_2)$ ja $\sin(x_1 + x_2)$ vaikka "lähtöavaruudessa" on ainoastaan kaksi muuttujaa. Se voidaan esittää seuraavana yhdisteenä

$$S(P_2 \circ T_1 \circ \pi_1, S(T_1 \circ \pi_2, T_1 \circ S(\pi_1, \pi_2))).$$

Lemma 19. *On olemassa funktio, joka muodostaa rationaalifunktion*

$$R : C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty_\pm(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), (f, g) \mapsto \frac{f}{g}.$$

Todistus. Rationaalifunktio voidaan esittää yhdistettynä funktiona

$$M(f, P_{-1} \circ g),$$

missä $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja $g \in C^\infty_\pm(\mathbb{R}^n)$. □

Esimerkki sileästä rationaalifunktiosta on

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{e^{x_1} x_2}{x_3^2 + 1},$$

joka voidaan kirjoittaa yhdisteenä

$$R(E \circ M(\pi_1, \pi_2), S(P_2 \circ \pi_3, 1)).$$

Lemma 20. *Itseisarvofunktio*

$$f \mapsto |f|$$

on funktio $C^\infty_+(\mathbb{R}^n) \to C^\infty_+(\mathbb{R}^n)$.

Todistus. Itseisarvofunktio voidaan esittää yhdistettynä funktiona

$$P_{1/2} \circ P_2.$$

Lemman 15 perusteella lähtöjoukolla $C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ funktion P_2 maalijoukko $C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja yhdiste on täten hyvin määritelty. $\square$

Huomataan kuitenkin, ettei esimerkiksi π_i ole sileysluokkaa $C_+^\infty(\mathbb{R}^n)$ millään $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mitä teoriamme siis sanoo erittäin tyypillisestä funktiosta $x \mapsto |x|$?

Olemme määritelleet sileiden funktioiden joukot funktioille, joiden lähtöjoukko on koko avaruus $\mathbb{R}^n$. Mikään ei kuitenkaan estä meitä rajoittamasta tutkimaamme aluetta. Aiemman kappaleen todistukset eivät myöskään mene rikki näin tehdessä. Tutkitaan tätä normifunktion kautta. Normifunktion toinen potenssi

$$x \mapsto \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

voidaan kirjoittaa yhdisteenä

$$S(P_2 \circ \pi_1, S(P_2 \circ \pi_2, \ldots S(P_2 \circ \pi_{n-1}, P_2 \circ \pi_n) \ldots)).$$

Täten se on sileä funktio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se on myös luokkaa $C_\geq^\infty(\mathbb{R}^n)$. Kuitenkin jos tutkimme aluetta $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, se onkin luokkaa $C_+^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Täten, koska $P_{1/2}$ on lemman 15 perusteella $C_+^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to C_+^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, sen yhdiste normifunktion toisen potenssin kanssa on hyvin määritelty ja normifunktio $x \mapsto \|x\|$ on siis myös sileydeltään luokassa $C_+^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Erikoistapauksena tästä saamme vastauksen kysymykseemme. Funktio $x \mapsto |x|$ on sileysluokassa $C_+^\infty(\mathbb{R} \backslash 0)$.

Samalla tapaa voimme tutkia laskuharjoituksissa esiintynyttä funktiota

$$(x_1, x_2) \mapsto x_2^{x_1} = \exp(x_1 \ln(x_2)) = E(M(\pi_1, G \circ \pi_2)).$$

Tämä on hyvin määritelty kun $\pi_2 \in C_+^\infty(A)$, jollain alueella $A \subset \mathbb{R}^2$. Tietenkin suurin ehdon toteuttava alue on $\{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}$ ja täten ylläoleva funktio on sileä tässä alueessa, eli sileysluokassa $C_+^\infty(\{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\})$.