

Sisällys

Johdanto	3
1 Esitietoja	5
1.1 Monistot	5
1.1.1 Sileät monistot	5
1.1.2 Riemannin monistot	7
1.1.3 Kompleksiset monistot	10
1.2 Peiteavaruudet	10
1.2.1 Monistojen peiteavaruudet	10
1.2.2 Riemannin peiteavaruudet	13
1.2.3 Konformiset peiteavaruudet	15
1.3 Whitneyyn jatkolause	15
2 Hyperbolinen puolitaso	17
2.1 Hyperbolisen puolitason isometriat	17
2.1.1 Hyperbolinen puolitaso	17
2.1.2 Hyperbolisen puolitason Möbius-kuvausten ryhmärakenne	17
2.1.3 Hyperbolisen puolitason isometriat	21
2.2 Hyperbolisen puolitason isometrioiden luokittelu	29
2.2.1 Geodeesit ja hyperboliset isometriat	29
2.2.2 Horoympyrät ja paraboliset isometriat	35
3 Hyperboliset pinnat	41
3.1 Reunattomat ja reunalliset hyperboliset pinnat	41
3.1.1 Reunattomien ja reunallisten hyperbolisten pintojen määritelmät	41
3.1.2 Rengasalueet	42
3.1.3 Hyperboliset sylinterit	45
3.1.4 Paraboliset sylinterit	49
3.1.5 Reunattomien ja reunallisten hyperbolisten pintojen yhteys	49
3.2 Y -palat	51
3.2.1 Y -palat	51
3.2.2 Y -palojen isometrisyys	54
3.2.3 Geodeettiset kuusikulmiot	58
4 Kaulukset	65
4.1 Kanoniset kaulukset	65
4.2 Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause	69
4.2.1 Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause kanonisille kauluksille	69

4.2.2	Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause Y -paloille	80
5	Hyperbolisten pintojen rakentaminen	88
5.1	Hyperbolisen pinnan signature	88
5.2	Reunallisten hyperbolisten pintojen minimaaliset geodeesit	88
5.3	Reunallisten hyperbolisten pintojen rakentaminen	91
5.4	Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause liimatuille pinnoille	95
6	Bersin lause	97
6.1	Bersin lause	97
6.2	Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause	102
	Kirjallisuus	103

Johdanto

Pintojen topologinen teoria luokittelee suunnistuvat kompaktit pinnat sen perusteella ovatko ne homeomorfisia Riemannin pallopintaan tai kuinka monen toruksen yhtenäiseen summaan. Tätä ominaisuutta kutsutaan pinnan genukseksi. Kompakteista pinnoista pisteitä poistamalla saadut pinnat voidaan taas luokitella genuksen ja näiden poistettujen pisteiden määrän perusteella. Nämä muodostavat pinnan signaturen. Tällaisia reunattomia pintoja kutsutaan Riemannin pinnoiksi.

Lukuunottamatta hyvin pieniä signatureja pintojen uniformisaatiolause sanoo, konformaalisuuden tasolla, Riemannin pintojen universaalipeiteavaruuden olevan hyperbolinen puolitaso. Pintoja, joiden universaalipeiteavaruus on hyperbolinen puolitaso, kutsutaan hyperbolisiksi pinnoiksi. Leikkaamalla sylintereitä pois näistä pinnoista saadaan reunallisia pintoja, joiden universaalipeiteavaruus on geodeettisesti konvekksi osajoukko hyperbolisesta puolitasosta. Työ tutkii juurikin näitä reunallisia hyperbolisia pintoja.

Paljastuu, että kaikki reunalliset hyperboliset pinnat voidaan rakentaa yksinkertaisista rakennuspaloista, Y -paloista. Täten tietyn tason tutkimus reunallisista hyperbolisista pinnoista voidaan yksinkertaistaa näiden Y -palojen ominaisuuksien tutkimiseen. Myös hyperbolisille pinnoille voidaan määrittellä signature huomioimalla niistä poistettujen sylinterien määrä.

Tunnetuin versio Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseesta kompaktifioi Teichmüllerin avaruuksien teoriassa ilmenevän tietyn signaturen Riemannin pintojen moduliavaruuden. Tässä työssä todistetaan kuitenkin hieman erilainen muotoilu tästä tuloksesta, joka sanoo, että jonolla tietyn signaturen reunallisia hyperbolisia pintoja olevan osajono, joka suppenee, näiden pintojen Riemannin metriikan mielessä, johonkin toiseen reunalliseen hyperboliseen pintaan. Tämän rajalla olevan reunallisen hyperbolisen pinnan signature ei välttämättä ole sama kuin alkuperäisellä jonolla sillä jokin tämän pinnan reunan komponenteista saattaa supeta poistetuksi pisteeksi. Kuitenkin, täyttämällä tämä reunallinen hyperbolinen pinta sylintereillä takaisin Riemannin pinnaksi, reunallisen hyperbolisen pinnan signaturen reunan komponentit muuttuvat takaisin poistetuiksi pisteiksi, eli tuloksessa rajapinnalla onkin sama signature kuin jonon jäsenillä. Täten tuloksesta seuraa hyvin suoraan alkuperäinen versio Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseesta.

Esitietokappaleessa esitellään tarvittavat tulokset monistoista, peiteavaruuksista ja funktioavaruuksien topologioista. Lopussa esitellään myös Whitneyyn jatkolause, jonka avulla kuvausta voidaan jatkaa euklidisen avaruuden osajoukosta koko avaruuteen.

Toinen kappale alkaa määritelmällä hyperboliselle puolitasolle, joka on olennaisin työssä käytetty työkalu. Välittömästi tämän jälkeen todistetaan hyperbolisen puolitason isometrioiden olevan helposti käsiteltävä luokka Möbius kuvauksia ja näiden olevan isomorfisia hyvin yksinkertaiseen matriisiryhmään. Tämän jälkeen tutkitaan tarkemmin hy-

perbolisen puolitason suunnistuksen säilyttäviä kiintopisteettömiä isometrioita. Näiden osoitetaan olevan jaettavissa kahteen luokkaan, hyperbolisiin ja parabolisiin, ja näistä hyperbolisten osoitetaan olevan tiiviissä yhteydessä hyperbolisen puolitason geodeesien kanssa.

Kolmannessa kappaleessa käsitellään itse hyperbolisia pintoja. Kappale alkaa määrittelemällä yksinkertaisimmat hyperboliset pinnat, sylinterit, joiden perusryhmät ovat isomorfisia ryhmän \mathbb{Z} kanssa. Myös nämä jakautuvat hyperbolisiin ja parabolisiin tapauksiin. Näiden avulla osoitetaan vastaavuus reunallisten ja reunattomien hyperbolisten pintojen välillä. Tämän jälkeen määritellään toisiksi yksinkertaisimmat hyperboliset pinnat, Y -palat, joiden perusryhmillä on kolme virittäjää. Osoitetaan, että näihin voidaan upottaa kolme sylinteriä riippuen Y -palan isometrialuokasta ja osoitetaan tämän isometrialuokan riippuvan ainoastaan Y -palan perusryhmän virittäjien, tai vastaavasti sylinterien, hyperbolisuudesta tai parabolisuudesta.

Neljännessä kappaleessa esitellään Y -palojen kanoniset kaulukset. Nämä ovat aiemmin mainitut upotetut sylinterit ja ne antavat ensimmäisen askeleen Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseen todistukseen. Paljastuu, että jono hyperbolisia kauluksia tiettyssä mielessä suppenee joko hyperboliseen tai paraboliseen sylinteriin riippuen hyperbolisten kaulusten reunojen pituuksien raja-arvosta. Tämän jälkeen osoitetaan näiden upotettujen kaulusten olevan erillisiä toisistaan ja täten, koska Y -palan isometrialuokka riippui ainoastaan sylinterien luokista, tulos kanonisten kaulusten suppenemisesta antaa vastaavan suppenemistuloksen myös Y -paloille.

Viidennessä kappaleessa osoitetaan jokaisen hyperbolisen pinnan olevan liimattavissa yhteen Y -paloista ja näiden Y -palojen reunojen koostavan kaikki hyperbolisen pinnan reunan ulkopuoliset suljetut geodeesit. Kuudennessa kappaleessa osoitetaan Bersin lause, joka antaa näiden suljettujen geodeesien pituuksille pinta-alasta riippuvan ylärajan. Aiemmin on kuitenkin osoitettu, että tämä pinta-ala riippuu ainoastaan hyperbolisen pinnan signaturesta. Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause sanoo, että jono Y -paloista liimattuja hyperbolisia pintoja suppenee tiettyyn rajapintaan. Kuitenkin Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause Y -paloille sekä niistä liimatuille X -paloille vaatii liimattavien reunan komponenttien pituuksien olevan rajoitettuja ylhäältä. Täten, koska Bersin lause antaa tällaisen pelkästään pinnan signaturesta riippuvan ylärajan, lopullinen Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause seuraa suoraan Bersin lauseesta.

1 Esitietoja

1.1 Monistot

Tässä osiossa esitellään tarvittavat monistojen peruskäsitteet. Osion lähteenä on käytetty kirjoja [7] [8] sekä kirjan [6] kappaletta 1.

1.1.1 Sileät monistot

Määritellään ensin sileiden monistojen peruskäsitteet.

Määritelmä 1.1.1 (n -monisto). Olkoon M topologinen avaruus ja $n \in \mathbb{N}$. Avaruutta M kutsutaan **reunattomaksi topologiseksi n -monistoksi**, tai lyhyemmin **reunattomaksi monistoksi**, jos se on Hausdorff, N_2 -avaruus ja sen jokaisella pisteellä $p \in M$ on olemassa sellainen ympäristö U , että $U \approx_{\text{homeo}} \mathbb{R}^n$. Tällaista ympäristöä $U \ni p$ ja homeomorfismia $\phi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ kutsutaan koordinaattikartaksi (U, ϕ_U) pisteessä $p \in M$.

Määritelmä 1.1.2 (Reunallinen n -monisto). Olkoon M topologinen avaruus ja $n \in \mathbb{N}$. Avaruutta M kutsutaan **reunalliseksi topologiseksi n -monistoksi**, tai lyhyemmin **reunalliseksi monistoksi**, jos se on Hausdorff, N_2 -avaruus ja sen jokaisella pisteellä $p \in M$ on olemassa sellainen ympäristö U , että U on homeomorfinen avaruuden

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$$

johonkin osajoukkoon V . Tällaista ympäristöä $U \ni p$ ja homeomorfismia $\phi_U : U \rightarrow V$ kutsutaan koordinaattikartaksi (U, ϕ_U) pisteessä $p \in M$.

Reunattomia ja reunallisia monistoja kutsutaan jatkossa monistoiksi.

Määritelmä 1.1.3 (Pinta). Olkoon S reunallinen tai reunaton 2-monisto. Tällöin se on reunallinen tai reunaton **pinta**.

Määritelmä 1.1.4 (C^k -avaruus). Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, sanotaan kuuluvan avaruuteen $C^k(U)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jos sen kaikki enintään asteen k osittaisderivaatat

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{\alpha(1)} \cdots \partial x_{\alpha(j)}},$$

missä $0 < j \leq k$ ja α on j -multi-indeksi, ovat jatkuvia.

Määritelmä 1.1.5 (Sileä monisto). Olkoon M n -monisto. Avaruutta M kutsutaan **sileäksi n -monistoksi**, tai lyhyemmin **sileäksi monistoksi**, jos millä tahansa kahdella pisteellä $p, q \in M$ ja millä tahansa kahdella koordinaattikartalla $(U, \phi_U), (V, \phi_V)$ $p \in U, q \in V$ pätee joko

1 Esitietoja

1. $U \cap V = \emptyset$ tai
2. $\phi_V|_{U \cap V} \circ (\phi_U|_{U \cap V})^{-1} : \phi_U|_{U \cap V}(U \cap V) \rightarrow \phi_V|_{U \cap V}(U \cap V)$ on C^∞ -sileä.

Kuvausta $\phi_V|_{U \cap V} \circ (\phi_U|_{U \cap V})^{-1} : \phi_U|_{U \cap V}(U \cap V) \rightarrow \phi_V|_{U \cap V}(U \cap V)$ kutsutaan siirtymäkuvaukseksi koordinaattikartalta (U, ϕ_U) koordinaattikartalle (V, ϕ_V) .

Määritelmä 1.1.6 (k -sileä kuvaus). Olkoon $k > 0$. Tällöin funktio $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ on k -sileä tai vastaavasti $f \in C^k(M)$, jos jokaisella $p \in M$ on olemassa sellainen koordinaattikartta (U, ϕ_U) , $p \in U$, että $f \circ \phi_U^{-1}$ on C^k -funktio $\phi_U(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Määritelmä 1.1.7 (Derivaatio). Olkoon M monisto, $p \in M$ piste,

$$C^\infty(p) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U) \text{ ja } U \text{ pisteen } p \text{ ympäristö}\}$$

ja $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Tällöin kuvausta v kutsutaan **derivaatioksi** pisteessä $p \in M$, jos

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf,$$

missä $f, g \in C^\infty(p)$.

Määritelmä 1.1.8 (Tangenttiavaruus). Olkoon $T_p M$ kokoelma kaikista derivaatioista pisteessä $p \in M$. Tällöin avaruutta $T_p M$ kutsutaan moniston M **tangenttiavaruudeksi** pisteessä p .

Lemma 1.1.9. Derivaatioiden lineaarikombinaatiot ovat derivaatioita.

Lemma 1.1.10 ([8] 3.10.). Olkoon M n -monisto ja $p \in M$. Tällöin tangenttiavaruus $T_p M$ on n -vektoriavaruus.

Määritelmä 1.1.11 (Tangenttikimppu). Olkoon M sileä monisto ja $TM := \sqcup_{p \in M} T_p M$. Tällöin avaruutta TM kutsutaan moniston M **tangenttikimpuksi**.

Lemma 1.1.12 ([8] 3.18.). Olkoon M sileä n -monisto. Tällöin tangenttikimpulla TM on luonnollinen topologia ja sileä rakenne, jotka tekevät siitä sileän moniston ja projektioista $\pi : TM \rightarrow M$ sileän.

Otetaan jatkossa tangenttikimppun olevan tämä sileä monisto.

Määritellään seuraavaksi suunnistuvat monistot.

Määritelmä 1.1.13 (n -muotojen vektorikimppu). Olkoon M sileä monisto. Tällöin avaruutta $\Lambda^n T^* M := \sqcup_{p \in M} \Lambda^n T_p^* M$, missä $\Lambda^n T_p^* M$ koostuu kaikista alternoivista n -multilinearisista funktioista $(T_p M)^n \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan moniston M **n -muotojen vektorikimpuksi**.

Lemma 1.1.14. Olkoon M sileä n -monisto. Tällöin n -muotojen vektorikimpulla $\Lambda^n T^* M$ on luonnollinen topologia ja sileä rakenne, jotka tekevät siitä sileän moniston ja projektioista $\pi : \sqcup_{p \in M} \Lambda^n T_p^* M \rightarrow M$ sileän.

Otetaan jatkossa n -muotojen vektorikimppu olemaan tämä sileä monisto.

Määritelmä 1.1.15 (Vektorikenttä). Olkoon M sileä monisto ja $v : M \rightarrow TM$ vektorikimppu TM sektio. Tällöin sektiota v kutsutaan globaaliksi **vektorikentäksi**.

Määritelmä 1.1.16 (Kehys). Olkoon M sileä n -monisto. Tällöin jono vektorikenttiä (v_1, \dots, v_n) on globaali **kehys**, jos jokaisessa pisteessä $p \in M$, jono $(v_1(p), \dots, v_n(p))$ on kanta tangenttiavaruudelle T_pM .

Määritelmä 1.1.17 (Suunnistuva monisto). Olkoon M sileä n -monisto. Sileää sektiota $\alpha \in \Lambda^n T^*M$, jolle pätee $\alpha(p) \neq 0$ kaikilla $p \in M$ kutsutaan moniston M **suunnistukseksi**. Monistoa, jolla on suunnistus kutsutaan **suunnistuvaksi**.

Määritelmä 1.1.18 (Käänteinen suunnistus). Olkoon $\alpha : M \rightarrow \Lambda^n T^*M$ suunnistus ja (v_1, \dots, v_n) kehys. Tällöin suunnistus $\alpha' : M \rightarrow \Lambda^n T^*M$ on suunnistuksen α käänteinen suunnistus, jos $\alpha'(p) = -\alpha(p)$ kaikilla $p \in M$.

Lemma 1.1.19 (Kuvauksen differentiaali). Olkoot M ja N sileitä monistoja, $F : M \rightarrow N$ sileä kuvaus ja $p \in M$. Tällöin on olemassa lineaarikuvaus $D_pF : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$, jota kutsutaan kuvauksen F differentiaaliksi pisteessä $p \in M$. Lisäksi on olemassa kuvaus $DF : TM \rightarrow TN$, jolla $DF(p) = D_pF$ ja jota kutsutaan kuvauksen F differentiaaliksi.

Lemma 1.1.20 ([8] 4.5.). Olkoot M ja N sileitä monistoja ja $F : M \rightarrow N$ sileä kuvaus. Jos kuvauksen F differentiaali pisteessä $p \in M$ D_pF on kääntyvä kaikilla pisteillä $p \in M$, niin F on lokaali diffeomorfismi.

1.1.2 Riemannin monistot

Määritellään ensin tarvittavat konseptit Riemannin metriikalle.

Määritelmä 1.1.21 (Sisätulo). Olkoon V vektoriavaruus. Funktiota $\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan **sisätuloksi**, jos μ on symmetrinen, bilineaarinen ja positiividefiniitti funktio. Paria (V, μ) kutsutaan **sisätuloavaruudeksi**.

Määritelmä 1.1.22 (Vektorin normi). Olkoon (V, μ) sisätuloavaruus. Tällöin arvoa

$$\mu(v, v)$$

vektorille $v \in V$ kutsutaan vektorin v **normiksi**.

Määritelmä 1.1.23 (Symmetristen bilineaaristen funktioiden vektorikimppu). Olkoon M monisto ja $\Sigma^2 V^*$ vektoriavaruuden V^* symmetristen bilineaaristen funktioiden avaruus. Avaruutta $\Sigma^2 T^*M := \sqcup_{p \in M} \Sigma^2 T_p^*M$ kutsutaan moniston M **symmetristen bilineaaristen funktioiden vektorikimpuksi**.

Lemma 1.1.24. Olkoon M sileä monisto. Tällöin symmetristen bilineaaristen funktioiden vektorikimppulla $\Sigma^2 T^*M$ on luonnollinen topologia ja sileä rakenne, jotka tekevät siitä sileän moniston ja projektioista $\pi : \Sigma^2 T^*M \rightarrow M$ sileän.

Otetaan jatkossa symmetristen bilineaaristen funktioiden vektorikimppu olevan sileä monisto.

Määritelmä 1.1.25 (Riemannin monisto). Olkoon M sileä n -monisto. Sileää sektiota $\mu : M \rightarrow \Sigma^2 T^*M$, jolle pätee, että $\mu(p)$ on sisätulo kaikilla $p \in M$ kutsutaan **Riemannin metriikaksi**. Paria (M, μ) kutsutaan **Riemannin monistoksi**.

Tutkitaan seuraavaksi Riemannin monistojen polkuja.

Lemma 1.1.26. Olkoon (M, μ) Riemannin monisto. Tällöin $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$, joka on määritelty kaavalla

$$d(p, q) = \inf_{c \in C} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mu(c'(t), c'(t)) dt,$$

missä $p, q \in M$ ja C koostuu kaikista sellaisista C^∞ -sileistä poluista $c : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, $c(-\epsilon) = p$, $c(\epsilon) = q$, että $c'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, kun $p \neq q$, on metriikka. Täten (M, d_μ) on metrinen avaruus.

Määritelmä 1.1.27 (Polun pituus). Polun $c \in C$ **pituus** $\ell(c)$ on

$$\ell(c) = \int_a^b \mu(c'(t), c'(t)) dt.$$

Määritelmä 1.1.28 (Isometria). Olkoot (M, μ_M) ja (N, μ_N) Riemannin monistoja. Sileää kuvausta $f : M \rightarrow N$ kutsutaan **isometriaksi** jos

$$\mu_N(Df(v), Df(w)) = \mu_M(v, w)$$

kaikilla $v, w \in T_p M$ ja jokaisella $p \in M$.

Määritelmä 1.1.29 (Lokaali isometria). Olkoot (M, μ_M) ja (N, μ_N) Riemannin monistoja. Sileää kuvausta $f : M \rightarrow N$ kutsutaan **lokaaliksi isometriaksi**, jos jokaisella pisteellä $p \in M$ on sellainen ympäristö $U \subset M$, että $f|_U$ on isometria moniston N avoimeen osajoukkoon.

Määritelmä 1.1.30 (Yksikkönopeudella parametrisoitu polku). Olkoon $\epsilon > 0$ ja $c : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$ polku. Tällöin polun c sanotaan olevan **parametrisoitu yksikkönopeudella tai pituudensa mukaan**, jos $\|c'(t)\| = 1$, jokaisella $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, tai vastaavasti $\ell(c|_{[-\delta+t, t+\delta]}) = 2\delta$ kaikilla $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ja $\delta \in \mathbb{R}_+$, millä $[-\delta+t, t+\delta] \subset [-\epsilon, \epsilon]$.

Määritelmä 1.1.31 (Geodeesi). Olkoon (M, μ) Riemannin monisto ja $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, sellainen pituudensa mukaan parametrisoitu polku, että kaikilla $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ on olemassa sellainen $\delta \in \mathbb{R}_+$, että polulle $\gamma_\delta := \gamma|_{[t-\delta, t+\delta]}$ pätee $\ell(\gamma_\delta) = d(\gamma_\delta(t-\delta), \gamma_\delta(t+\delta))$. Tällöin polkua γ kutsutaan **geodeesiksi tai lokaaliksi geodeesiksi**.

Lemma 1.1.32. Olkoon $p \in M$. Tällöin on olemassa sellaiset origon $0 \in T_p M$ ympäristöt $U \subset T_p M$ ja kuvaus $\exp_p : U \rightarrow M$, että kaikilla $v \in U$ pätee

$$d(p, \exp_p(v)) = \|v\|.$$

Lisäksi, jos $\|v\| = 1$ ja $t \in \mathbb{R}_+$ on sellainen, että $tv \in U$, niin kuvaus

$$\exp_p \circ \dot{v} : [0, t] \rightarrow M,$$

1 Esitietoja

missä $\dot{v} : \mathbb{R} \rightarrow T_p M$ on määritelty kaavalla $t \mapsto tv$, on geodeesi pisteiden p ja $\exp_p(tv)$ välillä.

Kuvausta $\exp_p : U \rightarrow M$ kutsutaan eksponentiaalikuvaukseksi pisteessä $p \in M$.

Lemma 1.1.33 ([7] 5.20). *Olko M ja N Riemannin monistoja, $p \in M$ ja $\sigma : M \rightarrow N$ lokaali isometria. Tällöin*

$$\sigma \circ \exp_p = \exp_{\sigma(p)} \circ d_p \sigma.$$

Lemma 1.1.34. *Olko M Riemannin monisto, $p \in M$ ja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ geodeesi, jolla $\gamma(0) = p$. Tällöin on olemassa sellainen $v \in T_p M$, että*

$$\gamma = \exp_p \circ \dot{v}.$$

Määritellään nimitykset erilaisille geodeesiin liittyville konsepteille täydellisen Riemannin moniston tapauksessa.

Lemma 1.1.35. *Olko M Riemannin monisto, joka on täydellinen metrisenä avaruutena. Tällöin jokaisessa pisteessä $p \in M$, $\exp_p \circ \dot{v}(t)$ on määritelty kaikilla $t \in \mathbb{R}$.*

Lemma 1.1.36 ([7] 6.21.). *Olko M täydellinen ja yhtenäinen Riemannin monisto. Tällöin jokaisen kahden pisteen $p, q \in M$ välillä on geodeesi $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M$, jolla $\gamma(-\epsilon) = p$, $\gamma(\epsilon) = q$ ja $\ell(\gamma) = d(p, q)$.*

Määritelmä 1.1.37. *Olko M Riemannin monisto ja U origon ympäristö, jolla $\exp_p : U \rightarrow M$ on määritelty. Piste $p \in M$ **injektiivisyysräde** $\text{injrad}(p)$ on supremum luvuista $r > 0$, joilla $\exp_p : U \rightarrow M$ on injektiivinen kuulassa $B_r(0) \subset U$.*

Korollari 1.1.38. *Olko M täydellinen ja yhtenäinen Riemannin monisto ja $p \in M$, jolla $\text{injrad}(p) = \infty$. Tällöin $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ on kääntyvä.*

Määritelmä 1.1.39. *Olko M täydellinen Riemannin monisto. Tällöin geodeesia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ kutsutaan **parametrisoiduksi geodeesiksi**, geodeesia $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, **parametrisoiduksi geodeesin osaksi**, kuvajoukkoa $\gamma(\mathbb{R})$ **parametrisoimattomaksi geodeesiksi** ja kuvajoukkoa $\gamma(-\epsilon, \epsilon)$ **parametrisoimattomaksi geodeesin osaksi**.*

Määritellään lopulta tilavuus Riemannin monistolle.

Lemma 1.1.40. *Olko (M, μ) Riemannin monisto. Tällöin on olemassa merkkiin asti yksikäsitteinen n -muoto vol_M , jolle pätee*

$$\text{vol}_M(e_1, \dots, e_n) = 1$$

kaikille tangenttikimppun TM ortonormaaleille kehyksille (e_1, \dots, e_n) .

Lemma 1.1.41 (Tilavuus). *Olko (M, μ) suunnistuva Riemannin monisto. Tällöin on olemassa Borel-joukot sisältävä σ -algebra Σ , joka on potenssijoukon $\mathcal{P}(M)$ osajoukko ja funktio $\int \text{vol}_M : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, jonka sanotaan mittaavan joukon $U \in \Sigma$ tilavuutta.*

1.1.3 Kompleksiset monistot

Määritellään kompleksisten monistojen peruskäsitteet.

Määritelmä 1.1.42 (Holomorfinen kuvaus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$). Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Tällöin kuvauksen f sanotaan olevan **holomorfinen**, jos se on kompleksisesti derivoituva.

Määritelmä 1.1.43 (Kompleksinen pinta). Olkoon M sileä 2-monisto. Pintaa M kutsutaan **kompleksiseksi pinnaksi**, jos sen siirtymäkuvaukset kaikilla koordinaattikartoilla (U, ϕ_U) ja (V, ϕ_V) , $U, V \subset M$ ovat holomorfisia, kun tehdään samaistus $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Lemma 1.1.44. Olkoon S suunnistuva ja sileä pinta. Tällöin pinnalle S on olemassa kartasto, joka tekee siitä kompleksisen pinnan.

Määritelmä 1.1.45 (Riemannin pinta). Olkoon S reunaton, suunnistuva ja sileä pinta, joka on myös kompleksinen pinta. Tällöin pintaa S kutsutaan **Riemannin pinnaksi**.

Määritelmä 1.1.46 (Holomorfinen kuvaus). Olkoot M ja N kompleksisia pintoja. Kuvausta $f : M \rightarrow N$ kutsutaan **holomorfiniseksi**, jos kaikilla koordinaattikartoilla (U, ϕ_U) , $U \subset M$, ja (V, ϕ_V) , $V \subset N$, joko

1. $f(U) \cap V = \emptyset$ tai
2. $\phi_V \circ f \circ (\phi_U)^{-1}$ on holomorfinen kuvauksena $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Määritelmä 1.1.47 (Konformikuvaus). Kuvausta $f : M \rightarrow N$ kompleksisten pintojen välillä kutsutaan **konformiseksi**, jos se on holomorfinen ja sen $D_p f \neq 0$ kaikilla $p \in M$.

Määritelmä 1.1.48 (Konforminen ekvivalenssi). Kompleksiset pinnat M ja N ovat **konformisesti ekvivalentteja**, jos niiden välillä on bijektiivinen konformikuvaus.

1.2 Peiteavaruudet

Tässä osiossa esitellään ensin monistojen peiteavaruudet. Sen jälkeen käsitellään peiteavaruuksia Riemannin monistojen ja kompleksisten monistojen tapauksessa. Osion lähimpinä on käytetty kirjan [11] kappaletta 10 ja kirjan [7] kappaletta 2.

1.2.1 Monistojen peiteavaruudet

Määritelmä 1.2.1 (Peiteavaruus). Olkoot X monisto, \tilde{X} polkuyhtenäinen avaruus ja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ surjektiivinen, avoin ja jatkuva kuvaus. Avaruutta \tilde{X} kutsutaan moniston X **peiteavaruudeksi**, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö $U \subset X$, joka toteuttaa seuraavan kaavion

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim_{\text{homeo}}} & U \times F \\ \downarrow p & \swarrow & \\ U & & \end{array},$$

missä F on jokin kiinnitetty diskreetti avaruus. Kuvausta p kutsutaan peiteavaruuden \tilde{X} **peitekuvaukseksi** tai **projektioksi**. Paria (\tilde{X}, p) kutsutaan **peitteeksi**.

Kuvauksia, erityisesti polkuja ja silmukoita, voidaan nostaa peiteavaruuksiin.

Lemma 1.2.2. *[[11] 10.13.] Olkoot (X, x_0) yhtenäinen pisteellinen monisto, (Y, y_0) yhdesti yhtenäinen pisteellinen monisto ja $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ jatkuva pisteellinen kuvaus. Jos (\tilde{X}, p) on peiteavaruus monistolle (X, x_0) ja $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, on olemassa yksikäsitteinen nosto $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$, joka on jatkuva pisteellinen kuvaus, eli seuraava kaavio kommutoi*

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array} .$$

Korollaari 1.2.3. *Olkoon X monisto ja olkoon (\tilde{X}, p) sen peite. Olkoot lisäksi $\tilde{x} \in \tilde{X}$, Tällöin jokaisella polulla $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow X, \epsilon \in \mathbb{R}_+$ on sellainen yksikäsitteinen nosto $\tilde{\gamma} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \tilde{X}$, että $\tilde{\gamma}(-\epsilon) = \tilde{x}$.*

Korollaari 1.2.4. *Olkoon X monisto ja olkoon (\tilde{X}, p) sen peite. Olkoot lisäksi $\tilde{x} \in \tilde{X}$, Tällöin jokaisella silmukalla $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow X, \epsilon \in \mathbb{R}_+$ on sellainen yksikäsitteinen nosto $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \tilde{X}$, että $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$.*

Tekstissä käytetään pääasiassa yhdesti yhtenäisiä peiteavaruuksia, eli universaaleja peiteavaruuksia.

Määritelmä 1.2.5 (Universaali peiteavaruus). **Universaali peiteavaruus** on peiteavaruus, joka on yhdesti yhtenäinen.

Lemma 1.2.6 ([11] 10.17.). *Universaali peiteavaruus (\tilde{X}, p) toteuttaa seuraavan universaaliominaisuuden. Jos (\tilde{X}', p') on moniston X peiteavaruus, niin on olemassa sellainen peite $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$, että seuraava kaavio kommutoi*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & \tilde{X}' \\ \downarrow p & \swarrow p' & \\ X & & \end{array} .$$

Korollaari 1.2.7. *Olkoon (\tilde{X}, p) moniston X universaali peite. Tällöin (\tilde{X}, p) on yksikäsitteinen seuraavassa mielessä: jos (\tilde{X}', p') on moniston X universaali peite, niin on olemassa sellainen homeomorfismi $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$, että seuraava kaavio kommutoi*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & \tilde{X}' \\ \downarrow p & \swarrow p' & \\ X & & \end{array} .$$

Peiteavaruuksien käsittelyssä käytetään pääasiassa peitemuunnoksia, homeomorfismeja ja peiteavaruudelta itselleen.

Määritelmä 1.2.8 (Peitemuunnos). *Olkoon (\tilde{X}, p) peiteavaruus monistolle X . Homeomorfismia $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ kutsutaan **peitemuunnokseksi**, jos sille pätee*

$$p = p \circ h.$$

Peitemuunnokset muodostavat ryhmän, jota kutsutaan peiteavaruuden peiteryhmäksi.

Lemma 1.2.9 ([11] 10.29.). *Olkoon X yhtenäinen monisto ja \tilde{X} sen universaali peiteavaruus. Tällöin avaruuden \tilde{X} peiteryhmä on isomorfinen moniston X perusr ryhmän $\pi_1(X)$ kanssa.*

Merkitään jatkossa universaalien peiteavaruuden \tilde{X} peiteryhmää $\pi_1(X)$.

Lemma 1.2.10. [[11] 10.19.] *Olkoon \tilde{X} yhtenäisen moniston X universaali peiteavaruus ja $\sigma \in \pi_1(X)$ peitemuunnos. Tällöin peitemuunnoksella $\sigma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ ei ole kiintopisteitä avaruudessa \tilde{X} .*

Todetaan lopuksi muutama tulos universaalien peiteavaruuksien tekijäavaruuksista.

Määritelmä 1.2.11 (Ryhmän toiminta avaruudessa). *Olko G topologinen ryhmä, \tilde{X} topologinen avaruus ja $\phi : G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ sellainen kuvaus, että*

1. $\phi(g, \phi(g', x)) = \phi(gg', x)$ kaikilla $g, g' \in G, x \in \tilde{x}$ ja
2. $\phi(e, x) = x$, missä $e \in G$ on ryhmän identiteettialkio ja $x \in \tilde{x}$.

Tällöin kuvausta ϕ kutsutaan ryhmän G **toiminnaksi** avaruudessa \tilde{X} .

Lemma 1.2.12. *Olko G topologinen ryhmä, \tilde{X} topologinen avaruus ja $\phi : G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ ryhmän G toiminta avaruudessa \tilde{X} . Tällöin tekijäavaruus*

$$\tilde{X}/G,$$

joka saadaan samaistamalla pisteet $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$, joilla $g\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ jollain $g \in G$, on topologinen avaruus.

Lemma 1.2.13. [[11] 10.50. ja 10.53.] *Olko G jokin perusr ryhmän $\pi_1(X)$ aliryhmä ja \tilde{X} yhtenäisen moniston X universaali peiteavaruus. Tällöin tekijäavaruus*

$$\tilde{X}_G := \tilde{X}/G$$

on monisto ja peiteavaruus monistolle X . Lisäksi $\pi_1(\tilde{X}_G) \simeq G$.

Korollaari 1.2.14. *Olko \tilde{X} universaali peiteavaruus monistolle X . Tällöin*

$$\tilde{X}/\pi_1(X) \approx_{\text{homeo}} X.$$

Lemma 1.2.15. [[11] 10.54.] Olkoon Γ yhdesti yhtenäisen moniston \tilde{X} homeomorfismin $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ muodostaman ryhmän diskreetti ja aidosti epäjatkua aliryhmä. Tällöin tekijäavaruuden

$$\tilde{X}/\Gamma$$

universaali peiteavaruus on \tilde{X} ja

$$\pi_1\left(\tilde{X}/\Gamma\right) \simeq \Gamma.$$

1.2.2 Riemannin peiteavaruudet

Suurin osa äskeisistä tuloksista pätee vahvempina myös Riemannin peiteavaruuksille.

Määritelmä 1.2.16 (Riemannin peiteavaruus). Peitettä (\tilde{M}, p) Riemannin monistolle M kutsutaan **Riemannin peitteeksi** tai **isometriseksi peitteeksi**, jos \tilde{M} on Riemannin monisto ja p on lokaali isometria.

Koska Riemannin peitekuvaus on paikallinen isometria, niin lemma 1.2.2 antaa seuraavan tuloksen.

Lemma 1.2.17. Olkoon $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M, \epsilon \in \mathbb{R}_+$, yhtenäisen Riemannin moniston M geodeesi ja (\tilde{M}, p) moniston M Riemannin peite. Tällöin geodeesille γ on olemassa pisteen $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0))$ valintaa vaille yksikäsitteinen nosto $\tilde{\gamma} \subset \tilde{M}$ ja tämä nosto on avaruuden \tilde{M} geodeesi. Vastaavasti jos $\tilde{\gamma}$ on peiteavaruuden \tilde{M} lokaali geodeesi, sen projektio $p(\tilde{\gamma})$ on lokaali geodeesi Riemannin monistolla M .

Universaalit Riemannin peiteavaruudet ovat myös yksikäsitteisiä.

Lemma 1.2.18. Olkoon (\tilde{X}, p) Riemannin moniston X universaali Riemannin peite. Tällöin (\tilde{X}, p) on yksikäsitteinen siinä mielessä, että, jos (\tilde{X}', p) on moniston X universaali Riemannin peite, niin on olemassa sellainen isometria $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$, että seuraava kaavio kommutoi

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & \tilde{X}' \\ \downarrow p & \swarrow p' & \\ X & & \end{array} .$$

Lemma 1.2.19. [[7] 2.31.] Olkoon (\tilde{M}, p) peite monistolle M , missä \tilde{M} on Riemannin monisto ja p on sileä. Oletetaan lisäksi, että peiteryhmä koostuu isometrioista. Tällöin monistolla M on yksikäsitteinen Riemannin metriikka, joka tekee peitteestä Riemannin peitteen.

Peitemuunnokset tarkentuvat isometrioiksi Riemannin peitteiden tapauksessa.

Lemma 1.2.20. Olkoon \tilde{M} Riemannin peiteavaruus Riemannin monistolle M . Tällöin peitemuunnokset $\sigma \in \pi_1(M)$ ovat isometrioita $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$.

Lemma 1.2.14 yleistyy Riemannin peitteille.

Lemma 1.2.21. *Olkoon \widetilde{M} universaali Riemannin peiteavaruus Riemannin monistolle M . Tällöin*

$$\widetilde{M}/_{\pi_1(M)} \approx_{\text{isom}} M.$$

Todistetaan vielä tulos injektiivisyysäteistä tekijäavaruuksissa.

Lemma 1.2.22. *Olkoon $\Sigma \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ aliryhmä, joka toimii aidosti epäjatkuvasti. Jos pisteen z ekvivalenssiluokkaa avaruudessa $\mathbb{H}/_{\Sigma}$ merkitään $\mathbb{H}/_{\Sigma}z$, pätee*

$$\text{injrad}(\mathbb{H}/_{\Sigma}z) = \frac{1}{2} \inf_{\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}} d(z, \sigma z),$$

missä 1 on identiteettikuvaus.

Todistus. Osoitetaan ensin, että

$$\text{injrad}(\mathbb{H}/_{\Sigma}z) \leq \frac{1}{2} \inf_{\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}} d(z, \sigma z).$$

Olkoon $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/_{\Sigma}$ tekijätopologian projektio. Jos $\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}$, eli $z \neq \sigma(z)$, on olemassa yksikäsitteinen pisteiden z ja $\sigma(z)$ etäisyyden antava parametrisoitu geodeesin osa $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}$. Koska π on Riemannin peitekuvaus, $\pi \circ \gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}/_{\Sigma}$ on parametrisoitu geodeesin osa, jolle pätee $\pi \circ \gamma(-\epsilon) = \pi \circ \gamma(\epsilon) = \Sigma z$. Valitaan sellainen piste $w \in \gamma((-\epsilon, \epsilon))$, että $d(z, w) = d(w, \sigma(z)) = (1/2)d(z, \sigma(z))$. Tällöin on olemassa kaksi sellaista tangenttivektoria $v_1, v_2 \in T_{\Sigma z}(\mathbb{H}/_{\Sigma})$, että $\|v_k\| = (1/2)d(z, \sigma(z))$ ja $\exp_{\Sigma z}(v_k) = \pi(w)$, missä $k \in \{1, 2\}$. Täten injektiivisyysäteen määritelmän perusteella

$$\text{injrad}(\mathbb{H}/_{\Sigma}z) \leq \frac{1}{2} \inf_{\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}} d(z, \sigma z).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\text{injrad}(\mathbb{H}/_{\Sigma}z) \geq \frac{1}{2} \inf_{\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}} d(z, \sigma z).$$

Lemman 1.1.33 perusteella $\exp_{\Sigma z} \circ d_z \pi = \pi \circ \exp_z$. Täten $\exp_{\Sigma z}$ on injektio joukossa $B_r(0) \subset T_z \mathbb{H}$, $r := \frac{1}{2} \inf_{\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}} d(z, \sigma z)$, jos π on injektio joukossa $B_r(z) \subset \mathbb{H}$. Oletetaan, että on olemassa $p, q \in B_r(z)$, $p \neq q$, ja $\pi(p) = \pi(q)$. Tällöin lemموjen 1.2.21 ja 1.2.20 perusteella on olemassa isometria $\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}$, jolla $\sigma(p) = q$. Kuitenkin kolmioepäyhtälöllä saadaan

$$d(z, \sigma(z)) \leq d(z, q) + d(\sigma(p), \sigma(z)) = d(z, q) + d(p, z) < 2r,$$

mikä on ristiriita luvun r valinnan kanssa. Täten $\exp_{\Sigma z}$ on injektio joukossa $B_r(0)$ ja

$$\text{injrad}(\mathbb{H}/_{\Sigma}z) \geq r = \frac{1}{2} \inf_{\sigma \in \Sigma \setminus \{1\}} d(z, \sigma z).$$

□

1.2.3 Konformiset peiteavaruudet

Määritelmä 1.2.23 (Konforminen peiteavaruus). *Kompleksisen pinnan M peiteavaruutta (\widetilde{M}, p) kutsutaan **konformiseksi peitteeksi**, jos peitekuvaus p on konformikuvaus.*

Määritelmä 1.2.24 (Konforminen peitemuunnos). *Konformisen peitteen (\widetilde{M}, p) automorfismia $\sigma : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ kutsutaan **konformiseksi peitemuunnokseksi**, jos $p = p \circ \sigma$ ja σ on konformikuvaus.*

Kompleksisten pintojen tapauksessa on olemassa vahva tulos universaaleista peiteavaruuksista.

Lause 1.2.25 (Uniformisaatiolause, [5] 1.8.8.). *Riemannin pinnan S konforminen universaali peiteavaruus on konformisesti ekvivalentti avaruuden*

1. *Riemannin pallopinnan \mathbb{S}^2 kanssa, jos S on konformisesti ekvivalentti Riemannin pallopinnan \mathbb{S}^2 kanssa,*
2. *kompleksisen tason \mathbb{C} kanssa, jos S on konformisesti ekvivalentti kompleksitason \mathbb{C} kanssa, punkteeratun tason $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kanssa tai homeomorfinen toruksen \mathbb{T}^2 kanssa, tai*
3. *hyperbolisen puolitason \mathbb{H} kanssa, jos S ei kuulu aiempiin tapauksiin.*

Tämän perusteella saadaan tulos.

Lemma 1.2.26. *Jos S on Riemannin pinta varustettuna vakiokaarevaisella Riemannin metriikalla sen isometrinen universaali peiteavaruus on isometrinen avaruuden*

1. *\mathbb{S}^2 kanssa, jos pinnan S Gaussin kaarevuus on vakio $+1$*
2. *\mathbb{C} kanssa, jos pinnan S Gaussin kaarevuus on vakio nolla, tai*
3. *\mathbb{H} kanssa, jos pinnan S Gaussin kaarevuus on vakio -1 .*

1.3 Whitneyyn jatkolause

Tässä osiossa esitellään Whitneyyn jatkolause, jonka avulla osajoukossa $S \subset \mathbb{R}^n$ määritelty funktio voidaan jatkaa koko avaruuteen \mathbb{R}^n . Kappaleen lähteinä on käytetty kirjoja [2] kappaletta 2 ja [12] kappaletta 6.

Määritelmä 1.3.1 (Osittaisderivaattaoperaattori). *Merkitään D^α operaattoria*

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha(1)} \cdots \partial x_{\alpha(j)}}$$

missä $j \in \mathbb{N}$ ja α on j -multi-indeksi. Olkoon lisäksi D^0 identiteettioperaattori.

Lemma 1.3.2. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Tällöin funktio $|\cdot|_m : C^m(U) \rightarrow \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla*

$$|f|_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{K \subset U, x \in K} |D^\alpha f(x)|,$$

missä $f \in C^m(U)$ ja $K \subset U$ on kompakti, on seminormi.

Määritelmä 1.3.3 (Avaruuden $C^k(U)$ C^k -topologia). *Avaruuden $C^k(U)$ C^k -topologia on seminormien $|\cdot|_m, m \in \{1, \dots, k\}$ indusoima topologia eli jono $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C^k(U)$ $f_n \rightarrow f$, jos ja vain jos $|f_n - f|_m \rightarrow 0$ kaikilla $m \in \{1, \dots, k\}$.*

C^k -topologiassa jono funktioita $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti funktiota f , jos osittaisderivaatat $D^\alpha f_n, 0 \leq |\alpha| \leq k$ suppenevat paikallisen tasaisesti kohti vastaavia funktioita $D^\alpha f$ funktioina avaruuksissa $C^k(U)$.

Määritelmä 1.3.4. *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ suljettu joukko. Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan kuuluvan avaruuteen $C^k(S)$, jos on olemassa sellainen joukon S ympäristö $U \subset \mathbb{R}^n$ ja sellainen funktio $\tilde{f} \in C^k(U)$, että $\tilde{f}|_S = f$.*

Lemma 1.3.5. *Jos $S \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, on olemassa jatkuva laajennusoperaattori $C^k(S) \rightarrow C^k(\mathbb{R}^n)$. Eli jokaiselle $f \in C^k(S)$ on olemassa sellainen $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$, että $\tilde{f}|_S = f$.*

Lemma 1.3.6. *Olkoot $f \in C^k(S)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko ja $j = (j_1, \dots, j_n)$ multiindeksi, jolla $|j| := \sum_i j_i \leq k$. Tällöin sen derivaatta f^j voidaan kirjoittaa Taylorin polynomina*

$$f^j(x) = \sum_{|j+l| \leq k} \frac{f^{j+l}(y)}{l_1! \dots l_n!} (x - y)^l + R_j(x, y),$$

kaikilla $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$ ja kaikilla $y = (y_1, \dots, y_n) \in S$, $(x - y)^l := (x_1 - y_1)^{l_1} \dots (x_n - y_n)^{l_n}$ ja $R_j : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$.

Määritelmä 1.3.7 (Lipschitz-avaruus). *Olkoon $f \in C^k(S)$. Tällöin $f \in \text{Lip}_k(S)$ jos*

1. $f^j(x) < M$ kaikilla $x \in S$ ja kaikilla $0 \leq |j| < k$.
2. $R_j(x, y) < M|x - y|^{k-|j|}$ kaikilla $x, y \in S, 0 \leq |j| < k$ ja jollain $M > 0$.

Huomataan kuvauksen $f \in C^k(S)$ kuuluvan avaruuteen $\text{Lip}_k(S)$ jos sen kaikkien derivaattojen kuvajoukot ovat kompakteja.

Lemma 1.3.8 ([12] VI.2.4.). *Lemman 1.3.5 laajennusoperaattori voidaan rajoittaa olemaan kuvaus $\text{Lip}_k(S) \rightarrow \text{Lip}_k(\mathbb{R}^n)$*

2 Hyperbolinen puolitaso

2.1 Hyperbolisen puolitason isometriat

Osion lähteenä on käytetty kirjan [6] kappaletta 1 ja kirjan [9] kappaletta 1.

2.1.1 Hyperbolinen puolitaso

Määritellään ensin hyperbolinen puolitaso ja sen perusominaisuudet

Määritelmä 2.1.1 (Hyperbolinen puolitaso). *Hyperbolinen puolitaso* \mathbb{H} on puolitaso

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbb{C}$$

varustettuna Riemannin metriikalla $g_{\mathbb{H}} := (\operatorname{Im} z)^{-2} g_{\text{eucl}}$, missä g_{eucl} on tason \mathbb{R}^2 tavallinen euklidinen Riemannin metriikka.

Hyperbolisen puolitason reunaa $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Riemannin pallopinnan $\overline{\mathbb{C}}$ osajoukkona kutsutaan sen pisteiksi äärettömydessä. Merkitään $\|\cdot\|$ kompleksitason euklidista normia.

Lemma 2.1.2 (Hyperbolisen puolitason etäisyysfunktio). *Hyperbolisen puolitason* \mathbb{H} *etäisyysfunktio*lle $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow [0, \infty)$ pätee

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{\|z - w\|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{\frac{1}{2}}} \text{ kaikilla } z, w \in \mathbb{H}.$$

Lisäksi etäisyysfunktioille pätee

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \left\| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right\| \text{ kaikilla } z, w \in \mathbb{H}.$$

Lemma 2.1.3. *Hyperbolinen puolitaso on täydellinen metrisenä avaruutena.*

Lemma 2.1.4. *Olkoon $p \in \mathbb{H}$ piste. Tällöin injektiiivisyysäde $\operatorname{inrad}(p)$ on ääretön.*

Lemma 2.1.5. *Hyperbolisen puolitason Gaussin kaarevuus on -1 jokaisessa pisteessä $p \in \mathbb{H}$.*

2.1.2 Hyperbolisen puolitason Möbius-kuvausten ryhmärakenne

Osoitetaan seuraavaksi, että hyperbolisen puolitason kiinnittävien Möbius-kuvausten ryhmä on isomorfinen ryhmän $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ kanssa.

Merkitään Riemannin pallopintaa $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ symbolilla $\hat{\mathbb{C}}$.

2 Hyperbolinen puolitaso

Määritelmä 2.1.6 (Möbius-kuvaus). *Kuvaus $\sigma : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ on Möbius-kuvaus, jos on olemassa sellaiset luvut $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, että $ad - bc \neq 0$ ja*

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kaikilla $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Möbius-kuvaukset muodostavat ryhmän \mathbb{M} kuvausten yhdistämisen suhteen.

Määritelmä 2.1.7. *Olkoon $\mathbb{M}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{M}$ niiden Möbius kuvausten $\sigma \in \mathbb{M}$ osajoukko, joille pätee, että on olemassa sellaiset reaalityluvut $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, että*

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kaikilla $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Osjoukko $\mathbb{M}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{M}$ on aliryhmä. Jätetään hetkellisesti todistamatta, että $\mathbb{M}(\mathbb{H})$ kiinnittää hyperbolisen puolitason.

Määritelmä 2.1.8. *Lineaariryhmän $GL(2, \mathbb{R})$ aliryhmää*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

kutsutaan erityiseksi lineaariryhmäksi $SL(2, \mathbb{R})$

Määritelmä 2.1.9. *Tekijäryhmää*

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} /_{\pm I_2},$$

missä $I_2 \in SL(2, \mathbb{R})$ on identiteettimatriisi, kutsutaan projektiviseksi erityiseksi lineaariryhmäksi $PSL(2, \mathbb{R})$.

Todistetaan isomorfismin olemassaolo askeleittain.

Määritelmä 2.1.10. *Merkitään $\mathcal{M}_0 : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ kuvausta, joka on määritelty*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right).$$

Lemma 2.1.11. *Kuvauksen $\mathcal{M}_0 : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ indusoima kuvaus $\mathcal{M} : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on hyvin määritelty.*

Todistus. Jokaista alkia $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ vastaa kaksi matriisia ryhmässä $SL(2, \mathbb{R})$. Nämä ovat

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ja } A_2 = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = -A_1.$$

2 Hyperbolinen puolitaso

Tällöin

$$\mathcal{M}_0(A_1) = \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) = \left(z \mapsto \frac{-1 az + b}{-1 cz + d} \right) = \left(z \mapsto \frac{-az + -b}{-cz + -d} \right) = \mathcal{M}_0(A_2).$$

Täten $\mathcal{M} : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on hyvin määritelty. □

Lemma 2.1.12. *Kuvaus $\mathcal{M} : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on homomorfismi.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\mathcal{M}_0 : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on homomorfismi. Olkoot $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$. Jos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix},$$

niin

$$AB = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}.$$

Lisäksi $\mathcal{M}_0(A)$ on määritelty

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

ja $\mathcal{M}_0(B)$ on määritelty

$$z \mapsto \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

eli $\mathcal{M}_0(A) \circ \mathcal{M}_0(B)$ on määritelty

$$z \mapsto \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} = \frac{aa'z + ab' + bc'z + bd'}{ca'z + cb' + dc'z + dd'} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}.$$

Täten $\mathcal{M}_0(AB) = \mathcal{M}_0(A) \circ \mathcal{M}_0(B)$ ja \mathcal{M}_0 on homomorfismi.

Olkoot $A, B \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Tällöin $A', -I_2 A', B', -I_2 B' \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ovat näiden alkuiden alkukuvia indusoidussa kuvauksessa. Nyt $\mathcal{M}_0(A') = \mathcal{M}_0(-I_2 A')$, $\mathcal{M}_0(B') = \mathcal{M}_0(-I_2 B')$ ja $\mathcal{M}_0(A'B') = \mathcal{M}_0(-I_2(A'B')) = \mathcal{M}_0((-I_2 A')(-I_2 B'))$ ja siten $\mathcal{M}(AB) = \mathcal{M}(A) \circ \mathcal{M}(B)$. Täten myös $\mathcal{M} : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on homomorfismi. □

Lemma 2.1.13. *Kuvaus $\mathcal{M} : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on surjektio.*

Todistus. Olkoon $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tällöin Möbius-kuvaukselle $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ pätee

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\tau az + b}{\tau cz + d} = \frac{\tau az + \tau b}{\tau cz + \tau d} =: \frac{a_\tau z + b_\tau}{c_\tau z + d_\tau}$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$. Nyt pätee

$$\tau a_\tau d - \tau b_\tau c = \tau^2(ad - bc).$$

2 Hyperbolinen puolitaso

ja, jos valitaan $\tau = \pm\sqrt{1/(ad-bc)}$, saadaan

$$1 = \tau a \tau d - \tau b \tau c.$$

Erityisesti, jos $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ on määritelty

$$A := \begin{bmatrix} \tau a & \tau b \\ \tau c & \tau d \end{bmatrix},$$

sille pätee $\det A = 1$, eli $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ja $\mathcal{M}_0(A) = \sigma$. Täten $\mathcal{M}_0 : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on surjektio.

Olkoon $\tau_1 = \sqrt{1/(ad-bc)}$ ja

$$\begin{bmatrix} \tau_1 a & \tau_1 b \\ \tau_1 c & \tau_1 d \end{bmatrix}$$

alkukuva alkiole $A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Tällöin $\mathcal{M}(A) = \sigma$, eli myös $\mathcal{M} : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on surjektio. □

Lemma 2.1.14. *Kuvaus $\mathcal{M} : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on injektio.*

Todistus. Olkoot $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ sellaiset, että $\mathcal{M}_0(A) = \mathcal{M}_0(B)$. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix},$$

missä $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$ac'z^2 + (ad' + bc')z + bd' = a'c^2z^2 + (a'd + b'c)z + b'd$$

eli

$$ac' = a'c, \quad ad' + bc' = a'd + b'c \text{ ja } bd' = b'd.$$

Erityisesti

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} \text{ ja } \frac{b'}{b} = \frac{d'}{d},$$

eli on olemassa sellaiset $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a' = \tau_1 a, \quad c' = \tau_1 c, \quad b' = \tau_2 b \text{ ja } d' = \tau_2 d.$$

Täten yhtälö

$$ad' + bc' = a'd + b'c$$

2 Hyperbolinen puolitaso

on yhtäpitävää yhtälön

$$\tau_2 ad + \tau_1 bc = \tau_1 ad + \tau_2 bc$$

kanssa ja

$$(\tau_2 - \tau_1)(ad - bc) = 0.$$

Koska $ad - bc \neq 0$, pätee $\tau_2 = \tau_1$, eli matriisille B pätee

$$B = \begin{bmatrix} \tau_1 a & \tau_1 b \\ \tau_1 c & \tau_1 d \end{bmatrix}.$$

Nyt $\det B = \tau^2(ad - bc)$ ja, koska $\det B = \det A = 1$, täytyy päteä $\tau = \pm 1$. Täten $\mathcal{M}_0^{-1}\mathcal{M}_0(A) = \{A, -I_2A\}$, eli kuvauksen $\mathcal{M}_0 : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ indusioitu kuvaus \mathcal{M} avaruudelta $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ on injektio. \square

Nyt lemmoista 2.1.11, 2.1.12, 2.1.13 ja 2.1.14 seuraa

Korollari 2.1.15. *Kuvaus $\mathcal{M} : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbb{H})$ on isomorfismi.*

2.1.3 Hyperbolisen puolitason isometriat

Osoitetaan seuraavaksi, että hyperbolisen puolitason konformikuvausten $\mathrm{Conf}(\mathbb{H})$ ryhmä on ryhmä $\mathbb{M}(\mathbb{H})$ ja että ryhmä $\mathbb{M}(\mathbb{H})$ on hyperbolisen puolitason suunnistuvien isometrioiden $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ ryhmä.

Aloitetaan osoittamalla, että Möbius-kuvaus kiinnittää hyperbolisen puolitason, jos ja vain jos se kuuluu ryhmään $\mathbb{M}(\mathbb{H})$.

Lemma 2.1.16. *Olkoon $\sigma \in \mathbb{M}$ Möbius kuvaus. Tällöin $\sigma(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jos ja vain jos $\sigma \in \mathrm{Image} \mathcal{M}$.*

Todistus. Olkoon $\sigma \in \mathbb{M}$ määritelty

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Osoitetaan, että, jos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, niin $\sigma(\mathbb{R} \cup \infty) = \mathbb{R} \cup \infty$.

Jos $z \in \mathbb{R}$, niin $az + b \in \mathbb{R}$ ja $cz + d \in \mathbb{R}$. Tällöin joko

$$\frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{R}$$

tai $cz + d = 0$ ja

$$\frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

Täten, jos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, eli $\sigma \in \mathrm{Image} \mathcal{M}$, $\sigma(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että, jos $\sigma(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, niin $\sigma \in \mathrm{Image} \mathcal{M}$. Oletetaan, että kaikilla $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $\sigma(\lambda) =: \lambda' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2 Hyperbolinen puolitaso

Jos $c = 0, d \neq 0$ tai σ olisi vakiokuvaus $\sigma(z) = \infty$ kaikilla $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Täten

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Koska $\sigma(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $b/d \in \mathbb{R}$ ja

$$\frac{a}{d} = \sigma(1) - \frac{b}{d} \in \mathbb{R}.$$

Täten

$$\sigma(z) = \frac{\frac{a}{d}z + 0 \cdot \frac{b}{d}}{0 \cdot z + 1},$$

eli $\sigma \in \text{Image } \mathcal{M}$.

Jos $c \neq 0, d = 0$ pätee

$$\sigma(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}.$$

Täten voidaan merkitä $a = c\tau_1$, missä $\tau_1 \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz} = \frac{c\tau_1 z + b}{cz} = \tau_1 + \frac{b}{c} \frac{1}{z},$$

kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nyt

$$\sigma(1) = \tau_1 + \frac{b}{c} \in \mathbb{R}$$

ja täten $b/d \in \mathbb{R}$, eli voidaan kirjoittaa $b = \tau_2 c$, missä $\tau_2 \in \mathbb{R}$. Saadaan

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz} = \frac{c\tau_1 z + c\tau_2}{cz} = \frac{\tau_1 z + \tau_2}{z}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, eli $\sigma \in \text{Image } \mathcal{M}$.

Jos $c \neq 0, d \neq 0$, pätee

$$\sigma(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$$

ja

$$\sigma(0) = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}.$$

Täten voidaan merkitä $a = c\tau_1$ ja $b = d\tau_2$, missä $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c\tau_1 z + d\tau_2}{cz + d},$$

2 Hyperbolinen puolitaso

kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{-(d/c)\}$, ja siis

$$(cz + d)\sigma(z) = c\tau_1 z + d\tau_2,$$

jos $z \neq -(d/c)$. Nyt

$$cz(\sigma(z) - \tau_1) + d(\sigma(z) - \tau_2) = z(\sigma(z) - \tau_1) + \frac{d}{c}(\sigma(z) - \tau_2) = 0$$

ja valitsemalla $z \in \mathbb{R} \setminus \{-(d/c)\}$ saadaan $d/c \in \mathbb{R}$. Täten voidaan merkitä $d = c\tau_3$, missä $\tau_3 \in \mathbb{R}$ ja saadaan

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c\tau_1 z + c\tau_3\tau_2}{cz + c\tau_3} = \frac{\tau_1 z + \tau_3\tau_2}{z + \tau_3},$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, eli $\sigma \in \text{Image } \mathcal{M}$. □

Lemma 2.1.17. *Olkoon $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Möbius-kuvaus, joka on määritelty kaavalla*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $z \in \mathbb{C}$. Tällöin $\sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ jos ja vain jos $ad - bc > 0$.

Todistus. Olkoon $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$, eli $z \in \mathbb{H}$, ja $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $ad - bc > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \frac{ax + iy + \frac{b}{a}}{cx + iy + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \left(x + iy + \frac{b}{a}\right) \frac{x - iy + \frac{d}{c}}{\|x + iy + \frac{d}{c}\|^2} \\ &= \frac{a}{c} \frac{1}{\|x + iy + \frac{d}{c}\|^2} \left(x^2 - ixy + ixy + \left(\frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right)x + \frac{bd}{ac} + \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)iy\right). \end{aligned}$$

Tämän imaginaariosa on

$$\frac{a}{c} \frac{1}{\|x + iy + \frac{d}{c}\|^2} \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right) y = \frac{1}{\|x + iy + \frac{d}{c}\|^2} \frac{a}{c} \frac{1}{ac} (ad - bc) y.$$

Täten, koska normi on positiivinen, $y > 0$ ja luvuilla ac ja $\frac{a}{c}$ on sama merkki, imaginaariosan merkki riippuu ainoastaan luvun $ad - bc$ merkistä. Erityisesti, jos $ad - bc > 0$, $\sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ ja, jos $ad - bc < 0$, $\sigma(\mathbb{H}) \neq \mathbb{H}$. □

2 Hyperbolinen puolitaso

Korollari 2.1.18. *Olkkoon $\sigma \in \mathbb{M}$. Tällöin $\sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, jos ja vain jos $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$.*

Otetaan tunnetuksi seuraava tulos.

Lause 2.1.19 ([10] 5.8.3.). *Hyperbolisen puolitason konformiset automorfismit $\text{Conf}(\mathbb{H})$ ovat hyperbolisen puolitason Möbius-kuvaukset $\mathbb{M}(\mathbb{H})$.*

Osoitetaan seuraavaksi, että hyperbolisen puolitason suunnistuksen säilyttävien isometrioiden ryhmä on ryhmä $\mathbb{M}(\mathbb{H})$

Lemma 2.1.20. *Olkkoot $p, q \in \mathbb{H}$. Tällöin on olemassa sellainen Möbius-kuvaus $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$, että $\sigma(p) = q$.*

Todistus. Olkkoot $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{H}$. Tällöin Möbius-kuvaukset

$$\phi_1 := z \mapsto z - p_1 \quad \text{ja} \quad \phi_2 := z \mapsto z - q_1$$

kuvaavat pisteet $p_1, q_1 \in \mathbb{R}$ pisteelle $0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja pisteen $\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ pisteelle ∞ . Lisäksi ϕ_1 kuvaa pisteen $(p_1, p_2) \in \mathbb{H}$ pisteelle $p_2i \in \mathbb{H}$ ja ϕ_2 kuvaa pisteen $(q_1, q_2) \in \mathbb{H}$ pisteelle $q_2i \in \mathbb{H}$. Huomataan myös, että kuvausten $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{M}$ determinantti on 1 ja ne ovat reaalikertoimisia, eli $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$. Lisäksi Möbius-kuvaus

$$z \mapsto \frac{e^{(1/2)\ln(q_2/p_2)} z}{e^{-(1/2)\ln(q_2/p_2)}} = \frac{q_2}{p_2} z$$

on reaalikertoiminen, sen determinantti on 1 ja kuvaa pisteen p_2i pisteelle q_2i . Täten kuvaus $\phi_2^{-1} \circ \lambda \circ \phi_1 \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ kuvaa pisteen (p_1, p_2) pisteelle (q_1, q_2) . \square

Lemma 2.1.21. *Olkkoon $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ määritelty kaavalla*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$. Tällöin sen differentiaalilin $D\sigma$ matriisi pisteessä $i \in \mathbb{H}$ on

$$D_i\sigma = \frac{1}{d^2 + c^2} \begin{bmatrix} d^2 - c^2 & 2cd \\ -2cd & d^2 - c^2 \end{bmatrix}.$$

Todistus. Möbius-kuvauksen $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ kompleksinen derivaatta pisteessä $z \in \mathbb{H}$ on määritelty kaavalla

$$D\sigma(z) = D\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

2 Hyperbolinen puolitaso

Jos merkitään $z = x + iy$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}_+$, niin derivaatta voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} D\sigma(x + iy) &= \frac{1}{(c(x + iy) + d)^2} = \frac{1}{\|(c(x + iy) + d)\|^2 \overline{(c(x + iy) + d)^2}} \\ &= \frac{1}{\|c^2(x + iy)^2 + 2cd(x + iy) + d^2\|^2 \overline{(c^2(x + iy)^2 + 2cd(x + iy) + d^2)}} \\ &= \frac{1}{\|(cx + d)^2 - c^2y^2 + 2c(cx + d)iy\|^2 \overline{((cx + d)^2 - c^2y^2 + 2c(cx + d)iy)}} \\ &= \frac{1}{\|(cx + d)^2 - c^2y^2 + 2c(cx + d)iy\|^2} \left((cx + d)^2 - c^2y^2 - 2c(cx + d)iy \right). \end{aligned}$$

Jos merkitään $\sigma(z) = u(z) + iv(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{H}$, missä $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, niin pätee

$$D\sigma(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x + iy),$$

eli

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x + iy) = \frac{1}{\|(cx + d)^2 - c^2y^2 + 2c(cx + d)iy\|^2} \left((cx + d)^2 - c^2y^2 \right)$$

ja

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x + iy) = \frac{1}{\|(cx + d)^2 - c^2y^2 + 2c(cx + d)iy\|^2} (-2c(cx + d)y).$$

Cauchy–Riemannin yhtälöiden perusteella

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Täten differentiaalin $D\sigma$ matriisi on

$$D\sigma(x + iy) = \frac{1}{\|(cx + d)^2 - c^2y^2 + 2c(cx + d)iy\|^2} \begin{bmatrix} (cx + d)^2 - c^2y^2 & 2c(cx + d)y \\ -2c(cx + d)y & (cx + d)^2 - c^2y^2 \end{bmatrix}.$$

Erityisesti pisteessä $i = 0 + i \cdot 1$ tämä saa muodon

$$\begin{aligned} D_i\sigma &= \frac{1}{\|d^2 - c^2 + 2dci\|^2} \begin{bmatrix} d^2 - c^2 & 2cd \\ -2cd & d^2 - c^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(d^2 - c^2)^2 + (2dc)^2}} \begin{bmatrix} d^2 - c^2 & 2cd \\ -2cd & d^2 - c^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(d^2 + c^2)^2} \begin{bmatrix} d^2 - c^2 & 2cd \\ -2cd & d^2 - c^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.1.22. *Olkoon $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$. Tällöin σ on isometria pisteessä $i \in \mathbb{H}$.*

2 Hyperbolinen puolitaso

Todistus. Olkoon $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$. Halutaan osoittaa, että $\sigma^*(g_{\mathbb{H}})(\sigma(i)) = g_{\mathbb{H}}(i)$ eli, että $g_{\mathbb{H}}(i)(v, w) = g_{\mathbb{H}}(\sigma(i))(D_i\sigma(v), D_i\sigma(w))$, missä $v, w \in T_i\mathbb{H}$. Ensinnäkin

$$\sigma(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{\|ci + d\|^2} = \frac{ac + bd + (ad - bc)i}{d^2 + c^2} = \frac{ac + bd + i}{d^2 + c^2}.$$

Tämän imaginaariosa on

$$\operatorname{Im} \sigma(i) = \frac{1}{d^2 + c^2},$$

eli $g_{\mathbb{H}}(\sigma(i)) = (d^2 + c^2)^2 g_{\text{eucl}}(\sigma(i))$.

Seuraavaksi, jos $(v_1, v_2) \in T_i\mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} D_i\sigma(v_1, v_2) &= \frac{1}{(d^2 + c^2)^2} \begin{bmatrix} d^2 - c^2 & 2cd \\ -2cd & d^2 - c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(d^2 + c^2)^2} \begin{bmatrix} (d^2 - c^2)v_1 + 2cdv_2 & -2cdv_1 + (d^2 - c^2)v_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Täten, jos $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_i\mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} g_{\text{eucl}}(\sigma(i))(D_i\sigma(v_1, v_2), D_i\sigma(w_1, w_2)) &= \frac{1}{(d^2 + c^2)^4} \left(((d^2 - c^2)v_1 + 2cdv_2)((d^2 - c^2)w_1 + 2cdw_2) \right. \\ &\quad \left. + (-2cdv_1 + (d^2 - c^2)v_2)(-2cdw_1 + (d^2 - c^2)w_2) \right) \\ &= \frac{1}{(d^2 + c^2)^4} \left((d^2 - c^2)^2(v_1w_1 + v_2w_2) + (2cd)^2(v_1w_1 + v_2w_2) \right. \\ &\quad \left. + (2 - 2)(2cd(d^2 - c^2))(v_2w_1 + v_1w_2) \right) \\ &= \frac{1}{(d^2 + c^2)^4} \left((d^2 - c^2)^2 + (2cd)^2 \right) (v_1w_1 + v_2w_2) \\ &= \frac{1}{(d^2 + c^2)^4} (d^2 + c^2)^2 (v_1w_1 + v_2w_2) \\ &= \frac{(v_1w_1 + v_2w_2)}{(d^2 + c^2)^2} = \frac{g_{\text{eucl}}(i)((v_1, v_2), (w_1, w_2))}{(d^2 + c^2)^2}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}}(\sigma(i))(D_i\sigma(v_1, v_2), D_i\sigma(w_1, w_2)) &= (d^2 + c^2)^2 \frac{g_{\text{eucl}}(i)((v_1, v_2), (w_1, w_2))}{(d^2 + c^2)^2} \\ &= g_{\text{eucl}}(i)((v_1, v_2), (w_1, w_2)). \end{aligned}$$

Täten σ on isometria pisteessä i . □

2 Hyperbolinen puolitaso

Lemma 2.1.23. *Olkoon $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$. Tällöin σ on isometria $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$.*

Todistus. Olkoon $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$. Halutaan osoittaa, että $\sigma^*g_{\mathbb{H}} = g_{\mathbb{H}}$ eli, että $g_{\mathbb{H}}(p)(v, w) = g_{\mathbb{H}}(\sigma(p))(d\sigma(v), d\sigma(w))$ kaikilla $p \in \mathbb{H}$ ja $v, w \in T_p\mathbb{H}$. Möbius-kuvaus määräytyy yksikäsitteisesti määrämällä kolmen pisteen $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{H}$ kuvat $\sigma(p_1), \sigma(p_2), \sigma(p_3) \in \mathbb{H}$. Täten, kiinnittämällä kaksi pistettä $q_1, q_2 \in \mathbb{H}, q_1 \neq q_2$, sekä piste $p \in \mathbb{H}, p \neq q_1, p \neq q_2$, σ voidaan jakaa yksikäsitteisesti Möbius-kuvauksiksi $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{M}$, joilla pätee

$$\begin{aligned}\sigma_1(q_1) &= q_1, \quad \sigma_1(q_2) = q_2, \quad \sigma_1(p) = i, \\ \sigma_2(q_1) &= \sigma(q_1), \quad \sigma_2(q_2) = \sigma(q_2), \quad \sigma_2(i) = \sigma(p).\end{aligned}$$

Lemman 2.1.18 perusteella $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$. Tällöin $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma$ ja $D_p\sigma = D_{\sigma_1(p)}\sigma_2 D_p\sigma_1$. Nyt lemmän 2.1.22 perusteella voidaan todeta, että $(\sigma_1)^{-1}$ ja σ_2 ovat isometrioita pisteessä i , σ_1 on kuvauksen $(\sigma_1)^{-1}$ käänteiskuvaus, eli isometria pisteessä p , ja täten $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ on isometria mielivaltaisessa pisteessä $p \in \mathbb{H}$. \square

Lemma 2.1.24. *Olkoon $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ sellainen, että se kiinnittää pisteen $i \in \mathbb{H}$. Tällöin*

$$\sigma(z) = \frac{az - b}{bi + a},$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a^2 + b^2 = 1$.

Todistus. Olkoon $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $ad - bc = 1$. Jos

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i$$

pätee

$$ai + b = ci^2 + di = -c + di.$$

Täten $a = d$ ja $-b = c$ ja σ voidaan kirjoittaa muodossa

$$z \mapsto \frac{az - b}{bi + a}.$$

Ehdosta $ad - bc = 1$ seuraa $a^2 + b^2 = 1$. \square

Lemma 2.1.25. *Olkoot $v, w \in T_i\mathbb{H}, \|v\| = \|w\| = 1$. Tällöin on olemassa sellainen Möbius-kuvaus $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$, että $\sigma(i) = i$ ja $D_i\sigma = w$.*

Todistus. Lemman 2.1.24 perusteella, jos $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ ja $\sigma(i) = i$, niin σ voidaan määritellä kaavalla

$$z \mapsto \frac{az - b}{bi + a},$$

2 Hyperbolinen puolitaso

missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a^2 + b^2 = 1$. Lemman 2.1.21 ja ehdon $a^2 + b^2 = 1$ perusteella

$$D_i\sigma = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix}.$$

Olkoon $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in T_i\mathbb{H}$ sellaisia, että $v_1^2 + v_2^2 = 1, w_1^2 + w_2^2 = 1$. Koska (v_1, v_2) ja (w_1, w_2) ovat yksikkövektoreita, niin on olemassa kierto

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

missä $\theta \in [0, 2\pi)$, jolle pätee $A(v_1, v_2) = (w_1, w_2)$. Nyt $a, b \in \mathbb{R}$ voidaan valita sellaisiksi, että

$$D_i\sigma = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = A$$

ja täten

$$D_i\sigma(v_1, v_2) = (w_1, w_2).$$

□

Lemma 2.1.26. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ hyperbolisen puolitason suunnistuksen säilyttävä isometria. Tällöin $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$.*

Todistus. Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Lemman 2.1.20 perusteella on olemassa sellainen $\phi \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$, että $i \mapsto \sigma(i)$. Lemman 2.1.25 perusteella, jos $v \in T_i\mathbb{H}$ ja $v' \in T_{\sigma(i)}\mathbb{H}$, on olemassa Möbius-kuvaus $\psi \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$, että $\psi(i) = i$ ja $D_i\psi(v) = (d_i\phi)^{-1}(v')$. Erityisesti $d_i\phi \circ d_i\psi(v) = v'$ ja siten $d_i(\phi \circ \psi)(v) = v'$

Koska $d_i\sigma$ on suunnistuksen säilyttävän isometrian differentiaali, se kuvaa avaruuden $T_i\mathbb{H}$ suunnistetun ortonormaalien kannan avaruuden $T_{\sigma(i)}\mathbb{H}$ suunnitetuksi ortonormaaliksi kannaksi. Täten $d_i\sigma$ määräytyy täysin sen perusteella, mille vektorille $v' \in T_{\sigma(i)}\mathbb{H}$ kuvaus $D_i\sigma$ kuvaa vektorin $v \in T_i\mathbb{H}$ ja äskeisen perusteella on olemassa sellaiset Möbius-kuvaukset $\phi, \psi \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$, että $d_i(\phi \circ \psi) = d_i\sigma$. Koska hyperbolinen puolitaso \mathbb{H} on yhtenäinen, lemmän 2.1.3 perusteella täydellinen ja lemmän 2.1.4 perusteella sen injektiivisyysäde kaikissa pisteissä on ääretön lemmän, niin korollaarin 1.1.38 perusteella eksponentiaalikuvaus on kääntyvä. Täten lemmän 1.1.33 perusteella voidaan kirjoittaa $\sigma = \exp_{\sigma(i)} \circ d_i\sigma \circ \exp_i^{-1}$ ja $\phi \circ \psi = \exp_{\sigma(i)} \circ d_i(\phi \circ \psi) \circ \exp_i^{-1}$. Täten $\sigma = \phi \circ \psi$ ja siis $\sigma \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$. □

Nyt lemmoista 2.1.23 ja 2.1.26 saadaan korollaari.

Korollaari 2.1.27. *Hyperbolisen puolitason isometrioille pätee $\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = \mathbb{M}(\mathbb{H})$.*

Lemmasta 2.1.19 seuraa tämän jälkeen.

Korollaari 2.1.28. *Pätee $\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = \text{Conf}(\mathbb{H})$.*

Korollaari 2.1.15 saa seuraavan muodon.

Korollaari 2.1.29. *Kuvaus $\mathcal{M} : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on isomorfismi.*

2.2 Hyperbolisen puolitason isometrioiden luokittelu

Seuraavaa lemmaa ei todisteta. Katso esimerkiksi kirjan [9] kappale 1.B.

Lemma 2.2.1. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Tällöin joko*

1. *isometria σ kiinnittää yhden pisteen $z \in \mathbb{H}$,*
2. *isometria σ kiinnittää kaksi pistettä $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tai*
3. *isometria σ kiinnittää yhden pisteen $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

2.2.1 Geodeesit ja hyperboliset isometriat

Tutkitaan hyperbolisen puolitason hyperbolisia isometrioita ja niihin läheisesti liittyviä hyperbolisen puolitason geodeesejä.

Aloitetaan määrittelemällä prototyyppillinen hyperbolinen isometria ja tutkimalla sen ominaisuuksia.

Määritelmä 2.2.2 (Isometria T_l). *Olkoon $l > 0$. Merkitään $T_l : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ kuvausta*

$$z \mapsto e^l z.$$

*Kuvausta T_l kutsutaan hyperbolisen puolitason **prototyyppilliseksi hyperboliseksi isometriaksi venytyksellä l .***

Lemma 2.2.3. *Olkoon $l > 0$. Tällöin $T_l \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$.*

Todistus. Voidaan kirjoittaa

$$T_l(z) = e^l z = \frac{e^{l/2} z}{e^{-(l/2)}}.$$

kaikilla $z \in \mathbb{H}$. Täten T_l on reaalikertoiminen Möbius kuvaus ja $\det T_l = e^{l/2} e^{-(l/2)} = 1$, eli $T_l \in \mathbb{M}(\mathbb{H})$ ja tulos seuraa korollarista 2.1.27. \square

Lemma 2.2.4. *Isometria $T_l, l > 0$, kiinnittää joukon $i\mathbb{R}_+$.*

Todistus. Olkoon $l > 0$ ja $ix \in i\mathbb{R}_+$. Tällöin

$$T_l(ix) = e^l ix \in i\mathbb{R}_+.$$

\square

Lemma 2.2.5. *Isometria $T_l, l > 0$, kiinnittää tasan kaksi pistettä äärettömydessä, $0 \in \overline{\mathbb{H}}$ ja $\infty \in \overline{\mathbb{H}}$.*

Todistus. Olkoon $l > 0$. Ensinnäkin $T_l(0) = e^l 0 = 0$ ja $T_l(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} e^l z = \infty$. Jos $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $T_l(z) = e^l z \neq z$. Täten T_l kiinnittää äärettömydessä tarkalleen pisteet 0 ja ∞ . \square

2 Hyperbolinen puolitaso

Määritellään seuraavaksi hyperbolisen puolitason prototyyppillinen geodeesi ja tämän avulla kaikki hyperbolisen puolitason geodeesit.

Lemma 2.2.6. *Polku*

$$t \mapsto e^t i,$$

missä $t \in \mathbb{R}$, on parametrisoitu geodeesi.

Todistus. Olkoon

$$\gamma(t) = e^t i$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Tällöin $\dot{\gamma}(t) = (0, e^t)$, eli vektorin $\dot{\gamma}(t)$ normi on

$$g_{\mathbb{H}}(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{\langle (0, e^t), (0, e^t) \rangle}{(\operatorname{Im} e^t i)^2} = \frac{e^{2t}}{e^{2t}} = 1$$

ja γ on täten parametrisoitu yksikkönopeudella. Erityisesti kaikilla $\gamma_\epsilon := \gamma|_{[t, t+\epsilon]}$, $\ell(\gamma_\epsilon) = \epsilon$. Nyt

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(e^t i, e^{t+\epsilon} i)\right) = \frac{e^{t+\epsilon} - e^t}{2\sqrt{e^{t+\epsilon} e^t}} = \frac{e^t e^\epsilon - 1}{e^t 2e^{(1/2)\epsilon}} = \sinh\left(\frac{1}{2}\epsilon\right),$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}_+$. Täten $\ell(\gamma_\epsilon) = \epsilon = d(\gamma(t), \gamma(t + \epsilon))$ ja γ on parametrisoitu geodeesi. \square

Määritelmä 2.2.7 (Prototyyppillinen parametrisoitu geodeesi). *Olkoon $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ määritelty kaavalla*

$$t \mapsto e^t i.$$

Tällöin polkua γ kutsutaan hyperbolisen puolitason **prototyyppilliseksi parametrisoiduksi geodeesiksi**.

Määritelmä 2.2.8 (Prototyyppillinen parametrisoimaton geodeesi). *Olkoon $\Gamma = i\mathbb{R}_+$ hyperbolisen puolitason prototyyppillisen parametrisoidun geodeesin kuvajoukko. Tällöin joukkoa Γ kutsutaan hyperbolisen puolitason **prototyyppilliseksi parametrisoimattoksi geodeesiksi**.*

Määritelmä 2.2.9. *Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}_+$. Merkitään $O(a, b)$ puoliympyrää*

$$\{be^{i\theta} + a \mid \theta \in (0, \pi)\}.$$

Lemma 2.2.10. *Hyperbolisen puolitason parametrisoimattomat geodeesit ovat*

1. *positiivisen imaginaariakselin siirrot $i\mathbb{R}_+ + a$, missä $a \in \mathbb{R}$ ja*
2. *puoliympyrät, joiden keskipisteet ovat reaaliakselilla, eli joukot $O(a, b)$, missä $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}_+$.*

Hyperbolisen puolitason parametrisoidut geodeesit ovat nämä parametrisoimattomat geodeesit parametrisoituna pituudensa mukaan.

2 Hyperbolinen puolitaso

Todistus. Olkoon $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, mielivaltainen parametrisoidun geodeesin osa, joka on määritelty kaavalla

$$t \mapsto \exp_p(tv),$$

missä $p \in \mathbb{H}$, $v \in T_p\mathbb{H}$. Olkoon $\partial/\partial y$ toinen koordinaattivektori hyperbolisen puolitason tavallisissa koordinaateissa. Tällöin lemmän 2.1.25 perusteella on olemassa sellaiset isometriat $\phi, \psi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, että $\phi(i) = p$, $\psi(i) = i$ ja $d_i\psi(\partial/\partial y) = (d_i\phi)^{-1}(v)$. Nyt

$$\gamma(t) = \exp\left(d_i\phi \circ d_i\psi\left(t\frac{\partial}{\partial y}\right)\right),$$

kaikilla $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ja lemmän 1.1.33 perusteella

$$\gamma(t) = \phi \circ \psi \circ \exp_i\left(t\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Huomataan, että polku

$$\gamma'(t) := \exp_i\left(t\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

missä $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, on hyperbolisen puolitason prototyyppillisen parametrisoidun geodeesin osa. Erityisesti jokainen hyperbolisen puolitason parametrisoimaton geodeesi on kuva prototyyppillisen parametrisoimattomasta geodeesista.

Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, joka on määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $ad - bc = 1$. Halutaan osoittaa, että kaikilla σ prototyyppillisen parametrisoimattoman geodeesin kuva on joko puoliympyrä tai imaginaariakselin siirto.

Ensinnäkin, jos $\sigma(0) = 0$ ja $\sigma(\infty) = \infty$, tai $\sigma(0) = \infty$ ja $\sigma(\infty) = 0$, prototyyppillisen parametrisoimattoman geodeesin kuva on itsensä ja tulos pätee.

Oletetaan seuraavaksi, että $\sigma(\infty) = \infty$, eli $c = 0$ ja $\sigma(0) = b/d$. Halutaan osoittaa, että prototyyppillisen parametrisoimattoman geodeesin $i\mathbb{R}_+$ kuva on imaginaariakselin siirto eli

$$\sigma(\tau i) = \tau' i + a$$

kaikilla $\tau \in \mathbb{R}_+$, missä $\tau' \in \mathbb{R}_+$ ja $a \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\sigma(\tau i) = \frac{a\tau i + b}{d} = \frac{a\tau}{d}i + \frac{b}{d}.$$

Täten $\sigma(i\mathbb{R}_+) \subset i\mathbb{R}_+ + b/d$.

Olkoon $\kappa i + b/d \in i\mathbb{R}_+ + b/d$. Valitsemalla $\tau = (d/a)\kappa$ saadaan, $\kappa i + b/d \in \sigma(i\mathbb{R}_+)$. Täten $i\mathbb{R}_+ + b/d \subset \sigma(i\mathbb{R}_+)$ ja tulos pätee tässä tapauksessa.

Oletetaan, että $\sigma(0) = \infty$, eli $d = 0$, ja $\sigma(\infty) = a/c$. Halutaan taas osoittaa, että prototyyppillisen parametrisoimattoman geodeesin $i\mathbb{R}_+$ kuva on imaginaariakselin siirto.

2 Hyperbolinen puolitaso

Koska

$$\sigma(\tau i) = \frac{a\tau i + b}{c\tau i} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c\tau}i,$$

kaikilla $\tau \in \mathbb{R}_+$, niin tulos saadaan kuten äskeisessä tapauksessa.

Oletetaan lopuksi, että $\sigma(0) = b/d$ ja $\sigma(\infty) = a/c$, eli $c \neq 0, d \neq 0$. Lisäksi, jottei σ ole vakiokuvaus, oletetaan, ettei $a = b = 0$. Halutaan osoittaa, että kaikilla $\tau i \in i\mathbb{R}_+$ $\sigma(\tau i)$ kuuluu jollekin puoliympyrälle. Isometriaa σ voidaan normalisoida isometrialla ψ , joka on määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{z - (\sigma(\infty) - (1/2)(\sigma(\infty) - \sigma(0)))}{(1/2)(\sigma(\infty) - \sigma(0))},$$

jolloin $\psi \circ \sigma(0) = -1$ ja $\psi \circ \sigma(\infty) = 1$. Nyt $\sigma(\tau i)$ kuuluu puoliympyrälle, jos $\|\psi \circ \sigma(\tau i)\| = 1$. Ensinnäkin

$$\psi(z) = \frac{z - \left(\frac{a}{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)} = \frac{z - \frac{a}{c} + \frac{1}{2cd}}{\frac{1}{2cd}} = 2d(cz - a) + 1.$$

Täten

$$\begin{aligned} \psi(\sigma(z)) &= 2d\left(c\frac{az+b}{cz+d} - a\right) + 1 = 2d\left(\frac{caz+cb-acz-ad}{cz+d} - a\right) + 1 \\ &= -\frac{2d}{cz+d} + 1 = \frac{-2d+cz+d}{cz+d} = \frac{cz-d}{cz+d}. \end{aligned}$$

Siis

$$\psi(\sigma(\tau i)) = \frac{c\tau i - d}{c\tau i + d} = \frac{1}{\|c\tau i + d\|^2}(-1)(c\tau i - d)(c\tau i - d) = \frac{-c^2\tau^2 - 2cd\tau i + d^2}{c^2\tau^2 + d^2}$$

ja

$$\begin{aligned} \|\psi(\sigma(\tau i))\| &= \frac{1}{c^2\tau^2 + d^2} \sqrt{(d^2 - c^2\tau^2)^2 + (2cd\tau)^2} \\ &= \frac{1}{c^2\tau^2 + d^2} \sqrt{d^4 - 2c^2d^2\tau^2 + c^4\tau^4 + 4c^2d^2\tau^2} \\ &= \frac{1}{c^2\tau^2 + d^2} \sqrt{c^2\tau^2 + d^2} = 1. \end{aligned}$$

Täten $\sigma(i\mathbb{R}_+)$ on puoliympyrän $O\left(\left(\frac{a}{c} - (1/2)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)\right), (1/2)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)\right)$ osajoukko.

Oletetaan, että $z_0 \in O\left(\left(\frac{a}{c} - (1/2)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)\right), (1/2)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)\right)$, eli $z_0 = (1/2)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)e^{i\theta} + \left(\frac{a}{c} - (1/2)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)\right)$, missä $\theta \in (0, \pi)$, ja osoitetaan, että $\sigma^{-1}(z) \in i\mathbb{R}_+$. Ensinnäkin σ^{-1} voidaan määritellä kaavalla

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

2 Hyperbolinen puolitaso

Täten

$$\begin{aligned}
 \sigma^{-1}(z_0) &= \frac{d \left(\frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d} \right) e^{i\theta} + \left(\frac{a}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d} \right) \right) \right) - b}{-c \left(\frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d} \right) e^{i\theta} + \left(\frac{a}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d} \right) \right) \right) + a} \\
 &= \frac{\frac{1}{2c} (e^{i\theta} - 1 + 2ad - 2bc)}{-\frac{1}{2d} (e^{i\theta} - 1 + 2ad - 2ad)} \\
 &= -\frac{d e^{i\theta} + 1}{c e^{i\theta} - 1} \\
 &= -\frac{d}{c} \frac{1}{\|e^{i\theta} - 1\|} (\cos \theta + (\sin \theta)i + 1)(\cos \theta - (\sin \theta)i - 1) \\
 &= -\frac{d}{c} \frac{1}{\|e^{i\theta} - 1\|} (-2(\sin \theta)i).
 \end{aligned}$$

Tämä kuuluu joukkoon $i\mathbb{R}_+$ sillä $\sigma^{-1}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. Täten puoliympyrä $O\left(\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right), \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)\right)$ on kuvan $\sigma(i\mathbb{R}_+)$ osajoukko. Tulos siis pätee myös tässä tapauksessa. \square

Jätetään todistamatta seuraava lemma.

Lemma 2.2.11. *Seuraavat yksikäsitteisyystulokset pätevät hyperbolisen puolitason geodeeseille.*

1. Jokaiselle kahdelle parametrisoimattomalle geodeesille γ, γ' $\overline{\gamma} \cap \overline{\gamma'} = \{p\}, p \in \overline{\mathbb{H}}$ tai $\overline{\gamma} \cap \overline{\gamma'} = \emptyset$.
2. Jokaisen kahden pisteen $p_1, p_2 \in \overline{\mathbb{H}}$ välillä kulkee sellainen yksikäsitteinen parametrisoitu geodeesin osa $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{H}}, a, b, \in \mathbb{R}$, että $\gamma(a) = p_1, \gamma(b) = p_2$.
3. Jokaisen kahden parametrisoimattoman geodeesin γ, γ' välillä kulkee sellainen yksikäsitteinen parametrisoitu geodeesin osa $\gamma'' : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}, \gamma''(a) \in \gamma, \gamma''(b) \in \gamma', \gamma''$ kohtaa geodeesien γ ja γ' parametrisaatiot ortogonaalisesti, $\ell(\gamma'')$ on minimaalinen tällaisten geodeesien luokassa ja geodeesin γ'' pituus on etäisyys $d(\gamma, \gamma')$.
4. Jokaisen parametrisoimattoman geodeesin γ ja pisteen äärettömyydessä $p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ välillä kulkee yksikäsitteinen parametrisoidun geodeesin osa $\gamma' : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$, jolle $\gamma'(0) \in \gamma, \gamma'(\infty) = p$.

Lemma 2.2.12. *Jokaista kahta hyperbolisen puolitason geodeesin kuvajoukkoa γ_1, γ_2 ja pisteitä $p_1 \in \gamma_1, p_2 \in \gamma_2$ vastaa sellainen isometria $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, että*

$$\sigma(\gamma_1) = \gamma_2 \quad \text{ja} \quad \sigma(p_1) = p_2.$$

Todistus. Olkoot γ_1 ja γ_2 hyperbolisen puolitason parametrisoimattomia geodeeseja, joiden pisteet äärettömyydessä ovat $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin isometrialle $\phi_1 \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, joka on määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{z - a_1}{z - b_1},$$

2 Hyperbolinen puolitaso

pätee $\phi_1(a_1) = 0$ ja $\phi_1(b_1) = \infty$. Vastaavasti on olemassa sellainen isometria $\phi_2 \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, että $\phi_2(a_2) = 0$ ja $\phi_2(b_2) = \infty$.

Olkoot $p_1 \in \gamma_1$ ja $p_2 \in \gamma_2$. Koska geodeesit γ_1 ja γ_2 kuvautuvat geodeesille $i\mathbb{R}_+$, $\phi_1(p_1) \in i\mathbb{R}_+$ ja $\phi_2(p_2) \in i\mathbb{R}_+$. Täten isometria $\psi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, joka on määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{e^{(1/2)\ln(\phi_2(p_2)/\phi_1(p_1))} z}{e^{-(1/2)\ln(\phi_2(p_2)/\phi_1(p_1))}} = \frac{\phi_2(p_2)}{\phi_1(p_1)} z$$

kiinnittää pisteet $0, \infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja kuvaa pisteen $\phi_1(p_1)$ pisteelle $\phi_2(p_2)$.

Nyt kuvaukselle $\sigma := \phi_2^{-1} \circ \psi \circ \phi_1$ pätee

$$\sigma(\gamma_1) = \gamma_2 \quad \text{ja} \quad \sigma(p_1) = p_2.$$

□

Määritellään lopulta hyperboliset isometriat ja vastaavat ominaisuudet niille.

Määritelmä 2.2.13 (Hyperbolinen isometria). *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ isometria, joka on konjugaatti isometrian T_l kanssa jollain $l > 0$, eli*

$$\sigma = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}$$

*jollain $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Tällöin isometriaa σ kutsutaan **hyperboliseksi**.*

Lemma 2.2.14. *Hyperbolinen isometria kiinnittää tasan kaksi pistettä äärettömydessä.*

Todistus. Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ hyperbolinen ja

$$\sigma = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}$$

jollain $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ ja T_l , missä $l > 0$. Tällöin lemmän 2.2.5 perusteella

$$\sigma(\phi(0)) = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}(\phi(0)) = \phi \circ T_l(0) = \phi(0)$$

ja vastaavasti $\sigma(\phi(\infty)) = \phi(\infty)$. Oletetaan, että $\sigma(z) = z$ jollain $z \in \mathbb{R} \setminus \{\phi(0), \phi(\infty)\}$. Tällöin

$$\sigma(z) = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}(z) = \phi(z'),$$

missä $z' = T_l \circ \phi^{-1}(z) \neq \phi^{-1}(z)$, koska T_l kiinnittää ainoastaan pisteet $0, \infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Täten kuvauksen ϕ bijektiivisyyden perusteella $\phi(z') \neq z$ ja siis $\sigma(z) \neq z$. □

Seuraavaa lemmaa ei todisteta. Katso esimerkiksi kirjan [9] kappale 1.B.

Lemma 2.2.15. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ sellainen, että se kiinnittää kaksi pistettä $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Tällöin σ on hyperbolinen.*

Lemma 2.2.16. *Hyperbolinen isometria kiinnittää tasan yhden parametrisoimattoman geodeesin.*

2 Hyperbolinen puolitaso

Todistus. Lemman 2.2.14 perusteella, jos $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on hyperbolinen, se kiinnittää tasan kaksi pistettä äärettömyydessä. Koska jokaisella hyperbolisen puolitason parametrisoimattomalla geodeesilla γ on kaksi pistettä äärettömyydessä ja nämä määrävät geodeesin γ yksikäsitteisesti, niin σ voi kiinnittää enintään yhden parametrisoimattoman geodeesin γ .

Osoitetaan, että σ joka tapauksessa kiinnittää yhden geodeesin. Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ konjugaatti isometriaan T_l , missä $l > 0$, eli

$$\sigma = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}.$$

Koska $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, se kuvaa prototyyppillisen parametrisoimattoman geodeesin $i\mathbb{R}_+$ jollekin toiselle hyperbolisen puolitason parametrisoimattomalle geodeesille. Täten joukko $\phi(i\mathbb{R}_+)$ on parametrisoimaton geodeesi. Jos $z \in \phi(i\mathbb{R}_+)$, niin

$$\sigma(z) = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}(z) = \phi \circ T_l(z')$$

missä $z' \in i\mathbb{R}_+$, eli

$$\phi \circ T_l(z') = \phi(z''),$$

missä myös $z'' \in i\mathbb{R}_+$. Täten $\sigma(\phi(i\mathbb{R}_+)) \subset \phi(i\mathbb{R}_+)$.

Koska $\sigma = \phi \circ (T_l)^{-1} \circ \phi^{-1}$ ja myös $(T_l)^{-1}$ kiinnittää parametrisoimattoman geodeesin $i\mathbb{R}_+$, saadaan vastaavasti, että $\sigma^{-1}(\phi(i\mathbb{R}_+)) \subset \phi(i\mathbb{R}_+)$. Täten $\phi(i\mathbb{R}_+) \subset \sigma(\phi(i\mathbb{R}_+))$, $\phi(i\mathbb{R}_+) = \sigma(\phi(i\mathbb{R}_+))$ ja σ kiinnittää tasan yhden parametrisoimattoman geodeesin. \square

2.2.2 Horoympyrät ja paraboliset isometriat

Tutkitaan seuraavaksi hyperbolisen puolitason parabolisia isometrioita ja niiden kiinnittämiä horosyklejä

Aloitetaan määrittelemällä prototyyppillinen parabolinen isometria ja tutkimalla sen ominaisuuksia.

Määritelmä 2.2.17 (Isometria P). *Merkitään $P : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ kuvausta*

$$z \mapsto z + 1.$$

*Kuvauksia P ja P^{-1} kutsutaan hyperbolisen puolitason **prototyyppilliseksi paraboliseksi isometrioiksi**.*

Lemma 2.2.18. *Isometria P kiinnittää joukot $\mathbb{R} + ai$, $a > 0$.*

Todistus. Olkoon $z_1 + ai \in \mathbb{R} + ai$, $z_1 \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Tällöin $P(z_1 + ai) = (z_1 + 1) + ai \in \mathbb{R} + ai$. \square

Lemma 2.2.19. *Isometria P kiinnittää tarkalleen pisteen ∞ .*

Todistus. Ensinnäkin $P(\infty) = \infty + 1 = \infty$. Jos $z \in \mathbb{H} \setminus \{\infty\}$, niin $P(z) = z + 1 \neq z$. \square

Määritellään seuraavaksi horoympyrät.

2 Hyperbolinen puolitaso

Määritelmä 2.2.20 (Prototyyppillinen horoympyrä). *Prototyyppillinen parametrisoitu horoympyrä on polku $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, joka on määritelty kaavalla*

$$t \mapsto t + iy,$$

missä $y \in \mathbb{R}_+$.

Prototyyppillinen parametrisoimatton horoympyrä on joukko

$$\mathbb{R} + iy,$$

missä $y \in \mathbb{R}_+$.

Määritelmä 2.2.21. *Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}_+$. Merkitään $H(a, b)$ ympyrää*

$$\left\{ be^{i\theta} + bi + a \mid \theta \in ((3\pi/2), \pi/2) \right\}.$$

Määritelmä 2.2.22 (Horoympyrä). *Parametrisoitu horoympyrä on joko prototyyppillinen parametrisoitu horoympyrä tai parametrisaatio ympyrälle $H(a, b)$, missä $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+$.*

Parametrisoimatton horoympyrä on joko prototyyppillinen parametrisoimatton horoympyrä tai ympyrä $H(a, b)$, missä $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+$.

Lemma 2.2.23. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ määritelty kaavalla*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

ja olkoon $m \in \mathbb{R}_+$. Tällöin prototyyppillisen parametrisoimattoman horoympyrän

$$\mathbb{R} + \frac{i}{2c^2m}$$

kuva on parametrisoimatton horoympyrä $H(a/c, m)$ tai prototyyppillinen parametrisoimatton horoympyrä itse.

Todistus. Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja olkoon $m \in \mathbb{R}_+$. Olkoot lisäksi

$$A := \mathbb{R} + \frac{i}{2c^2m}$$

ja

$$B := H(a/c, m)$$

Osoitetaan, että $\sigma^{-1}(B) = A$ eli, että $\sigma(A) = B$. Isometria σ^{-1} voidaan määritellä

2 Hyperbolinen puolitaso

kaavalla

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Olkoon $z_0 := me^{i\theta} + mi + \frac{a}{c} \in B$, missä $\theta \in ((3/2)\pi, (1/2)\pi)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(z_0) &= \frac{dz_0 - b}{-cz_0 + a} = \frac{dm(e^{i\theta} + i) + \frac{da}{c} - b}{-cm(e^{i\theta} + i) + a - a} \\ &= \frac{\frac{ad-bc}{c}}{-cm(e^{i\theta} + i)} - \frac{d}{ci} \\ &= \frac{1}{-c^2m(e^{i\theta} + i)} - \frac{d}{c} \\ &= \frac{1}{-c^2m(\cos \theta + (\sin \theta + 1)i)} - \frac{d}{c} \\ &= \frac{-c^2m(\cos \theta - (\sin \theta + 1)i)}{\| -c^2m(\cos \theta + (\sin \theta + 1)i) \|} - \frac{d}{c} \\ &= \frac{-c^2m(\cos \theta - (\sin \theta + 1)i)}{c^4m^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1 + 2 \sin \theta)} - \frac{d}{c} \\ &= -\frac{\cos \theta - (\sin \theta + 1)i}{2c^2m(\sin \theta + 1)} - \frac{d}{c} \\ &= -\frac{\cos \theta}{2c^2m(\sin \theta + 1)} - \frac{d}{c} + \frac{i}{2c^2m}. \end{aligned}$$

Täten $\sigma^{-1}(z_0) \in A$ ja siis $\sigma^{-1}(B) \subset A$

Osoitetaan seuraavaksi, että $A \subset \sigma^{-1}(B)$. Olkoon $z \in B$ ja $z'_0 = \lambda + \frac{i}{2c^2m}$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että yhtälöllä

$$z'_0 = \sigma^{-1}(z)$$

on ratkaisu. Yhtälö saa muodon

$$\lambda = -\frac{\cos \theta}{2c^2m(\sin \theta + 1)} - \frac{d}{c},$$

missä $\theta \in ((3/2)\pi, (1/2)\pi)$. Täten riittää ratkaista

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta + 1} = \lambda',$$

missä $\lambda' \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että ratkaisu on

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{1 - \lambda'}{1 + \lambda'} \right) = i \ln \left(\frac{i + \frac{1 - \lambda'}{1 + \lambda'}}{i - \frac{1 - \lambda'}{1 + \lambda'}} \right).$$

2 Hyperbolinen puolitaso

Ensinnäkin

$$\cos(2 \arctan(x)) = \frac{e^{i2 \arctan(x)} + e^{-i2 \arctan(x)}}{2} = \frac{\frac{i-x}{i+x} + \frac{i+x}{i-x}}{2} = -\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja

$$\sin(2 \arctan(x)) = \frac{e^{i2 \arctan(x)} - e^{-i2 \arctan(x)}}{2i} = \frac{\frac{i-x}{i+x} - \frac{i+x}{i-x}}{2i} = \frac{2x}{1+x^2}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ eli

$$\sin(2 \arctan(x)) + 1 = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}.$$

Täten

$$\frac{\cos 2 \arctan(x)}{\sin 2 \arctan(x) + 1} = \frac{1-x^2}{(1+x)^2}$$

ja siten

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta + 1} = \frac{1 - \left(\frac{1-\lambda'}{1+\lambda'}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2\right)^2} = \frac{\frac{4\lambda'}{(1+\lambda')^2}}{\left(\frac{2}{1+\lambda'}\right)^2} = \lambda'.$$

Voidaan valita arkustangentin haara siten, että $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ((3/2)\pi, -(1/2)\pi)$, jolloin kosinin ja sinin periodisuuden perusteella on olemassa sellainen $\theta' \in ((3/2)\pi, -(1/2)\pi)$, että $\sigma^{-1}(\theta') = \sigma^{-1}(\theta)$. Täten $A \subset \sigma^{-1}(B)$ ja siis $A = \sigma^{-1}(B)$ todistaen tuloksen. \square

Määritellään lopulta hyperbolisen puolitason paraboliset isometriat ja osoitetaan niiden kiinnittävän joukon horoympyröitä.

Määritelmä 2.2.24 (Parabolinen isometria). *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ isometria, joka on konjugaatti isometrian P tai P^{-1} kanssa, eli*

$$\sigma = \phi \circ P \circ \phi^{-1} \quad \text{tai} \quad \sigma = \phi \circ P^{-1} \circ \phi^{-1}$$

*jollain $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Tällöin isometriaa σ kutsutaan **paraboliseksi**.*

Lemma 2.2.25. *Parabolinen isometria kiinnittää tasan yhden pisteen äärettömydessä.*

Todistus. Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ parabolinen ja

$$\sigma = \phi \circ P \circ \phi^{-1}$$

jollain $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ ja P . Tällöin lemmän 2.2.19 perusteella

$$\sigma(\phi(\infty)) = \phi \circ P \circ \phi^{-1}(\phi(\infty)) = \phi \circ P(\infty) = \phi(\infty).$$

Oletetaan, että $\sigma(z) = z$ jollain $z \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\sigma(z) = \phi \circ P \circ \phi^{-1}(z) = \phi(z'),$$

2 Hyperbolinen puolitaso

missä $z' = P \circ \phi^{-1}(z) \neq \phi^{-1}(z)$, koska P kiinnittää ainoastaan pisteen $\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Täten kuvauksen ϕ bijektiivisyyden perusteella $\phi(z') \neq z$ ja σ ei täten kiinnitä pistettä z .

Tapaus, missä σ on konjugaatti isometriaan P^{-1} seuraa vastaavasti. □

Seuraavaa lemmaa ei todisteta. Katso esimerkiksi kirjan [9] kappale 1.B.

Lemma 2.2.26. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ sellainen, että se kiinnittää yhden pisteen $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Tällöin σ on parabolinen.*

Korollaari 2.2.27. *Parabolinen isometria ei kiinnitä yhtäkään hyperbolisen puolitason geodeesia.*

Todistus. Jotta parabolinen isometria $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ kiinnittäisi hyperbolisen puolitason geodeesin, sen täytyisi kiinnittää tämän geodeesin pisteet äärettömyydessä. Kuitenkin parabolinen isometria σ kiinnittää tasan yhden pisteen äärettömyydessä ja täten σ ei voi kiinnittää yhtäkään hyperbolisen puolitason geodeesia. □

Lemma 2.2.28. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ parabolinen isometria, joka ei kiinnitä pistettä $\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ja $a \in \mathbb{R}$ sellainen, että $\sigma(a) = a$. Tällöin σ kiinnittää parametrisoimat-
tomat horoympyrät $H(a, b)$, missä $b \in \mathbb{R}_+$.*

Todistus. Lemman 2.2.25 perusteella, jos $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on parabolinen ja ei kiinnitä pistettä $\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se kiinnittää tasan yhden pisteen $a \in \mathbb{R}$ äärettömyydessä. Jokaisella hyperbolisen puolitason parametrisoimattomalla horoympyrällä γ on yksi piste äärettömyydessä ja piste a määrää joukon horoympyröitä Γ , joka koostuu horoympyröistä $H(a, b)$, missä $b \in \mathbb{R}_+$. Täten σ voi kiinnittää enintään tämän joukon horoympyröitä.

Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ konjugaatti isometriaan P eli

$$\sigma = \phi \circ P \circ \phi^{-1}.$$

Koska $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, se kuvaa prototyypillisen parametrisoimattoman horoympyrän A

$$A = \mathbb{R} + ai,$$

missä $a \in \mathbb{R}_+$, jollekin toiselle hyperbolisen puolitason parametrisoimattomalle horoympyrälle B , jonka piste äärettömyydessä on $\phi(\infty) \in \mathbb{R}$. Joukko $\phi(A)$ on lemmän 2.2.23 perusteella parametrisoimaton horoympyrä. Jos $z \in \phi(A)$, niin

$$\sigma(z) = \phi \circ P \circ \phi^{-1}(z) = \phi \circ P(z')$$

missä $z' \in A$, eli

$$\phi \circ P(z') = \phi(z''),$$

missä myös $z'' \in A$. Täten $\sigma(\phi(A)) \subset \phi(A)$ ja σ kiinnittää pisteen $\phi(\infty)$ äärettömyydessä.

Koska $\sigma = \phi \circ (P)^{-1} \circ \phi^{-1}$ ja myös $(P)^{-1}$ kiinnittää parametrisoimattoman horoympyrän A , saadaan vastaavasti, että $\sigma^{-1}(\phi(A)) \subset \phi(A)$. Täten $\phi(A) \subset \sigma(\phi(A))$ ja σ

2 Hyperbolinen puolitaso

kiinnittää tasan luokan horoympyröitä, joiden piste äärettömydessä on kuvauksen σ kiinnittämä piste äärettömydessä. \square

3 Hyperboliset pinnat

3.1 Reunattomat ja reunalliset hyperboliset pinnat

Tässä osiossa on käytetty lähteinä kirjan [6] kappaletta 4 ja kirjan [5] kappaletta 3.

3.1.1 Reunattomien ja reunallisten hyperbolisten pintojen määritelmät

Määritellään ensin työssä käsiteltävät hyperboliset pinnat.

Määritelmä 3.1.1 (Hyperbolinen pinta). *Olkoon S Riemannin pinta varustettuna Riemannin metriikalla h . Pinnan S sanotaan olevan **hyperbolinen pinta**, tai **reunaton hyperbolinen pinta**, jos pinnan S jokaisella pisteellä on ympäristö, joka on isometrisen jonkin avaruuden \mathbb{H} avoimen osajoukon kanssa.*

Määritelmä 3.1.2 (Reunallinen hyperbolinen pinta). *Olkoon S sileä suunnistuva reunaton tai reunallinen pinta varustettuna Riemannin metriikalla h . Olkoon lisäksi sen jokainen reunan komponentti diffeomorfinen avaruuden \mathbb{S}^1 kanssa. Pinnan S sanotaan olevan **reunallinen hyperbolinen pinta** ja metriikan h **Poincarén metriikka**, jos pinnan S jokaisella pisteellä on ympäristö, joka on isometrinen avaruuden*

$$\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

avoimen osajoukon kanssa.

Lemma 3.1.3. *Reunallisen hyperbolisen pinnan reunan komponentit ovat parametrisoimattomia suljettuja geodeeseja.*

Todistus. Jokaisella reunallisen hyperbolisen pinnan S reunan komponentin $\partial_i S$ pisteellä $p \in \partial_i S$ on ympäristö U , joka on isometrinen avaruuden \mathbb{H}_+ avoimen osajoukon $V \subset \mathbb{H}_+$ kanssa. Olkoon $f : U \rightarrow V$ tällainen isometria. Koska $U \cap \partial_i S$ on avoin reunalla $\partial_i S$, alueen invarianssilauseen, katso esimerkiksi kirjan [11] lause 6.3.6, perusteella

$$f(U \cap \partial_i S) = V \cap \partial \mathbb{H}_+$$

on avoin reunalla $\partial \mathbb{H}_+$. Täten, koska $i\mathbb{R}_+ = \partial \mathbb{H}_+ \subset \mathbb{H}$ on parametrisoimaton lokaali geodeesi ja f on isometria, joukko $U \cap \partial_i S$ on lokaali parametrisoimaton geodeesi. Täten $\partial_i S$ on parametrisoimaton geodeesi. Koska $\partial_i S$ on diffeomorfinen avaruuteen \mathbb{S}^1 , niin $\partial_i S$ on suljettu. \square

3.1.2 Rengasalueet

Esitellään seuraavaksi yksinkertaisimmat hyperboliset pinnat, sylinterit, ja todistetaan niille muutama luokittelutulos.

Määritelmä 3.1.4 (Rengasalue). *Riemannin pinta A on **rengasalue**, jos sen perusryhmä $\pi_1(A)$ on ääretön syklinen ryhmä eli $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$.*

Määritelmä 3.1.5 (Hyperbolinen sylinteri). *Olkoon C hyperbolinen pinta, joka on isometrinen tekijäavaruuden*

$$\mathbb{H}/\langle T_l \rangle,$$

*kanssa, missä $l > 0$. Tällöin pinnan C sanotaan olevan **hyperbolinen sylinteri**.*

Määritelmä 3.1.6 (Parabolinen sylinteri). *Olkoon C hyperbolinen pinta, joka on isometrinen tekijäavaruuden*

$$\mathbb{H}/\langle P \rangle.$$

*kanssa. Tällöin pinnan C sanotaan olevan **parabolinen sylinteri**.*

Lemma 3.1.7. *Olkoon C hyperbolinen pinta, jonka perusryhmä on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa. Tällöin se isometrinen joko avaruuden*

$$\mathbb{H}/\langle T_l \rangle$$

kanssa tai avaruuden

$$\mathbb{H}/\langle P \rangle$$

kanssa.

Todistus. Koska hyperbolisen pinnan C perusryhmä on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa, täytyy lemموjen 1.2.20 ja 1.2.21 perusteella olla olemassa sellainen isometria $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, että

$$C \approx_{\text{Isom}} \mathbb{H}/\langle \sigma \rangle,$$

Koska σ on avaruuden C peitekuvaus, niin lemman 1.2.10 mukaan kuvauksella σ ei voi olla kiintopisteitä avaruudessa \mathbb{H} . Täten lemموjen 2.2.1, 2.2.15 ja 2.2.26 perusteella σ on joko hyperbolinen tai parabolinen.

Olkoon σ hyperbolinen. Tällöin

$$\sigma = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}$$

missä $l > 0$ ja $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Koska $\sigma \circ \phi = \phi \circ T_l$, niin jokaisella $n \in \mathbb{Z}$ pätee $\sigma^n \circ \phi = \phi \circ T_l^n$. Näin ollen $\bar{\phi} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ laskeutuu isometriaksi

$$\bar{\phi} : \mathbb{H}/\langle T_l \rangle \rightarrow \mathbb{H}/\langle \sigma \rangle,$$

3 Hyperboliset pinnat

jolla kaavio

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}/\langle T_l \rangle & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{H}/\langle \sigma \rangle \end{array},$$

kommutoi. Näin ollen $C \approx_{\text{Isom}} \mathbb{H}/\langle \sigma \rangle \approx_{\text{Isom}} \mathbb{H}/\langle T_l \rangle$.

Vastaavalla todistuksella saadaan, että, jos σ on parabolinen, niin

$$C \approx_{\text{Isom}} \mathbb{H}/\langle \sigma \rangle \approx_{\text{Isom}} \mathbb{H}/\langle P \rangle.$$

□

Lause 3.1.8. *Olkkoon A rengasalue. Tällöin A on konformisesti ekvivalentti joko*

1. *punkteeratun tason $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,*
2. *rengasalueen $A_M := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e^{2\pi M}\}$, $M \in (0, \infty)$, tai*
3. *rengasalueen $A_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$ kanssa.*

Todistus. Olkkoon \tilde{A} rengasalueen A universaali peiteavaruus. Koska rengasalueen määritelmän perusteella rengasalueen A perusr ryhmä $\pi_1(A)$ on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa, lemmän 1.2.14 perusteella on olemassa sellainen peiteavaruuden \tilde{A} konforminen automorfismi $\gamma \in \pi_1(A)$, että

$$\tilde{A}/\langle \gamma \rangle \approx_{\text{conf}} A.$$

Lauseen 1.2.25 perusteella \tilde{A} on konformisesti ekvivalentti joko avaruuden \mathbb{S}^2 , \mathbb{C} tai \mathbb{H} kanssa. Käydään läpi nämä tapaukset.

Jos $\tilde{A} \approx_{\text{conf}} \mathbb{S}^2$, niin lauseen 1.2.25 perusteella $A \approx_{\text{conf}} \mathbb{S}^2$, eli A ei ole rengasalue.

Olkkoon $\tilde{A} \approx_{\text{conf}} \mathbb{C}$. Tällöin lauseen 1.2.25 perusteella A on rengasalue, jos ja vain jos $A \approx_{\text{conf}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Olkkoon $\tilde{A} \approx_{\text{conf}} \mathbb{H}$. Tällöin lemموjen 2.1.28, 1.2.10 ja 2.2.1 perusteella γ on joko hyperbolinen tai parabolinen hyperbolisen puolitason Möbius kuvaus. Olkkoon γ parabolinen. Tällöin se on konjugaatti hyperbolisen puolitason \mathbb{H} Möbius kuvauksen $\alpha : z \mapsto z \pm 1$ kanssa.

Olkkoon $\varphi : (0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla $z \mapsto \exp(-2\pi iz)$. Tämä on injektio. Olkkoon $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$\|\varphi(z)\| = \|\exp(-2\pi i(x + iy))\| = \exp(|\text{Re}(-2\pi i(x + iy))|) = \exp(2\pi y),$$

eli $\varphi((0, 1] \times \mathbb{R}_+) \subset A_\infty$. Kuvaus $\psi : A_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ voidaan määritellä kaavalla

$$z \mapsto \frac{i}{2\pi} \ln(z) = \frac{i}{2\pi} (\ln(\|z\|) + i \arg(z)).$$

3 Hyperboliset pinnat

Siirrytään napakoordinaatteihin lähtöavaruuden sisältävässä avaruudessa \mathbb{C} . Tällöin $A_\infty = (1, \infty) \times (0, 2\pi]$. Nyt, koska $\ln((1, \infty)) = \mathbb{R}_+$, niin maalijoukon \mathbb{H} euklidisisissa koordinaateissa.

$$\psi(A_\infty) = \frac{i}{2\pi}(\mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi]) = (0, 1] \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{H}.$$

Täten ψ on injektio joukkoon $(0, 1] \times \mathbb{R}_+$ ja $\psi = \varphi^{-1}$. Erityisesti $A_\infty \subset \varphi((0, 1] \times \mathbb{R}_+)$ ja siis $\varphi((0, 1] \times \mathbb{R}_+) = A_\infty$. Laajennetaan kuvaus φ kuvaukseksi $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, z \rightarrow \exp(-2\pi iz)$, huomataan, että $\varphi \circ \alpha = \varphi$. Tällöin φ faktoroiduu konformiseksi ekvivalenssiksi $\widehat{\varphi} : A \approx_{\text{conf}} \widetilde{A} / \langle \alpha \rangle \rightarrow A_\infty$.

Olkoon γ hyperbolinen. Tällöin se on konjugaatti hyperbolisen puolitason \mathbb{H} Möbius kuvauksen $\alpha : z \mapsto e^l z, l > 0$, kanssa. Kuvaus $\xi : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{H}$, joka on määritelty kaavalla $z \mapsto e^z$ on holomorfinen ja konforminen ekvivalenssi. Olkoon $\xi^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \times (0, \pi)$. Tällöin $\alpha' := \xi^{-1} \circ \alpha$ on kuvaus $z \mapsto z + l$. Täten kuvaus ξ laskeutuu konformiseksi ekvivalenssiksi

$$\mathbb{H} / \langle \alpha \rangle \approx_{\text{conf}} \mathbb{R} \times (0, \pi) / \langle \alpha' \rangle.$$

Olkoon $\phi : (0, l] \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ määritelty kaavalla $z \mapsto \exp(-2\pi(1/l)iz)$. Tällöin jokaisella $z = x + iy \in (0, l] \times (0, \pi)$

$$\|\phi(z)\| = \|\exp(-2\pi \frac{1}{l} i(x + iy))\| = \exp(|\operatorname{Re}(-2\pi \frac{1}{l} i(x + iy))|) = \exp(2\pi \frac{1}{l} y),$$

eli, jos

$$A_{\frac{\pi}{l}} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < \|z\| < \exp(2\pi \frac{\pi}{l}) \right\},$$

niin $\phi((0, l] \times (0, \pi)) \subset A_{\frac{\pi}{l}}$. Kuvaus $\psi : A_{\frac{\pi}{l}} \rightarrow \mathbb{C}$ voidaan määritellä kaavalla

$$z \mapsto \frac{li}{2\pi} \ln(z) = \frac{li}{2\pi} (\ln(\|z\|) + i \arg(z)).$$

Siirrytään napakoordinaatteihin lähtöjoukon sisältävässä avaruudessa \mathbb{C} . Tällöin $A_{\frac{\pi}{l}} = (1, \exp(2\pi(\pi/l))) \times (0, 2\pi]$. Nyt, koska $\ln((1, \exp(2\pi(\pi/l)))) = (0, 2\pi(\pi/l))$, niin maalijoukon \mathbb{C} euklidisisissa koordinaateissa

$$\psi(A_{\frac{\pi}{l}}) = \frac{li}{2\pi} ((0, 2\pi(\pi/l)) \times (0, 2\pi]) = (0, l] \times (0, \pi).$$

Täten ψ on injektio joukkoon $(0, l] \times (0, \pi)$ ja $\psi = \phi^{-1}$. Täten $A_{\frac{\pi}{l}} \subset \phi((-l, 0] \times (0, \pi))$ ja siis $\phi((0, l] \times (0, \pi)) = A_{\frac{\pi}{l}}$. Laajentamalla kuvausta ϕ olemaan kuvaus $\mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$, huomataan, että $\phi \circ \alpha' = \phi$. Täten ϕ faktoroiduu konformiseksi ekvivalenssiksi

$$\widehat{\phi} : \mathbb{R} \times (0, \pi) / \langle \alpha' \rangle \rightarrow A_{\frac{\pi}{l}}$$

ja aiemman perusteella

$$A \approx_{\text{conf}} \mathbb{H} / \langle \alpha \rangle \approx_{\text{conf}} A_{\frac{\pi}{l}}.$$

□

Lemma 3.1.9. *Rengasalue A_∞ on konformisesti ekvivalentti punkteeratun kiekon \mathbb{D}^* kanssa.*

Todistus. Olkoon $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$. Tällöin f on konformikuvaus. Jos $z \in A_\infty$, niin $\|f(z)\| \in (0, 1)$, eli $f(z) \in \mathbb{D}^*$ ja $f(A_\infty) \subset \mathbb{D}^*$. Lisäksi, jos $z_0 \in \mathbb{D}^*$, niin ratkaisu yhtälöön $1/z = z_0$ on $z = 1/z_0$ ja, koska $\|z_0\| \in (0, 1)$, niin $\|z\| \in (1, \infty)$. Täten $\mathbb{D}^* \subset f(A_\infty)$ ja siis $f(A_\infty) = \mathbb{D}^*$. □

Lemmasta 3.1.8 saadaan seuraavat korollaarit.

Korollaari 3.1.10. *Hyperbolinen sylinteri on diffeomorfinen annuluksen*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < \|z\| < r_2\}$$

kanssa, missä $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, r_1 < r_2$.

Korollaari 3.1.11. *Parabolinen sylinteri on diffeomorfinen punkteeratun kiekon*

$$\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \|z\| < r\}$$

kanssa, missä $r \in \mathbb{R}_+$.

3.1.3 Hyperboliset sylinterit

Tässä aliosiossa todistetaan muutaman perustuloksen hyperboliselle sylinterille ja määrittellään sen avulla hyödyllisiä reunallisia hyperbolisia pintoja.

Määritelmä 3.1.12 (Yksinkertainen silmukka). *Olkoon M monisto ja $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ silmukka. Tällöin c on yksinkertainen, jos $c(t) \neq c(s)$ kaikilla $t, s \in \mathbb{S}^1$.*

Lemma 3.1.13. *Olkoon C hyperbolinen sylinteri. Tällöin pinnalla C on tasan yksi kutistumaton yksinkertainen suljettu parametrisoitu geodeesi.*

Jatkossa lemmän kuvaamia hyperbolisen sylinterin yksikäsitteisiä epätriviaaleja yksinkertaisia suljettuja parametrisoituja geodeeseja kutsutaan hyperbolisen sylinterin minimaalisiksi geodeeseiksi. Todistus osoittaa, että nämä suljetut geodeesit minimoivat pituuden homotopialuokassaan. Tämän minimaalisen parametrisoidun geodeesin kuvajoukkoa kutsutaan minimaaliseksi parametrisoimattoksi geodeesiksi.

Todistus. Hyperbolinen sylinteri C on tekijäavaruus $\mathbb{H}/\langle T_l \rangle$, missä $l > 0$. Olkoon sen peitekuvaus $p : \mathbb{H} \rightarrow C$. Olkoon $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ prototyyppillinen parametrisoitu geodeesi. Merkitään $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$ silmukkaa $\tilde{\gamma}/\langle T_l \rangle$. Koska peitekuvaus p on paikallinen isometria ja $\tilde{\gamma}$ on parametrisoitu geodeesi, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow C$ on parametrisoitu geodeesi. Koska tekijäavaruus C samaistaa pisteet $e^{nl}z, n \in \mathbb{Z}, z \in (0, e^l]i$, geodeesi γ on yksinkertainen ja suljettu. Lisäksi γ on kutistumaton, sillä sen nosto on ryhmän $\pi_1(C)$ virittäjän kiinnittäjä. Täten γ on kutistumaton yksinkertainen suljettu parametrisoitu geodeesi $\mathbb{S}^1 \rightarrow C$.

3 Hyperboliset pinnat

Olkoon γ' kutistumaton suljettu geodeesi, jonka homotopialuokkaa vastaa perusryhmän $\pi_1(C)$ virittäjän T_l potenssi $T_l^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Koska silmukan γ' nosto on paikallinen geodeesi ja sen homotopialuokkaa vastaavan isometrian T_l^n kiinnittämä geodeesi on prototyypillinen parametrisoitu geodeesi, lemmän 2.2.5 perusteella täytyy päteä, että $\gamma' = \tilde{\gamma}/T_l^n$ sillä muuten γ' ei olisi suljettu geodeesi. Täten geodeesilla γ' on sama kuvajoukko kuin suljetulla geodeesilla γ . Koska tekijäavaruus C samaistaa pisteet $e^{kl}z, k \in \mathbb{N}, z \in (0, e^l]i$, ja T_l^n samaistaa polun $\tilde{\gamma}$ pisteet $e^{nkl}z, k \in \mathbb{N}, z \in (0, e^l]i$, polku γ' kiertää sylinterin C useampaan kertaan. Täten γ' ei ole yksinkertainen.

Täten sylinterillä C on olemassa tasan yksi kutistumaton yksinkertainen suljettu parametrisoitu geodeesi. \square

Lemma 3.1.14. *Olkoon $C = \mathbb{H}/\langle T_l \rangle, l > 0$, hyperbolinen sylinteri. Tällöin sen minimaalisen geodeesin pituus on l .*

Todistus. Olkoon $p : \mathbb{H} \rightarrow C$ peitekuvaus ja $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$ parametrisoitu minimaalinen geodeesi. Tällöin silmukan γ pituus saadaan minimaalisena etäisyytenä joukon $p^{-1}(\gamma)$ kahden pisteen välillä. Silmukan γ pituus $\ell(\gamma)$ saadaan siis pisteiden i ja $e^l i$ välisestä hyperbolisesta etäisyydestä. Laskemalla

$$\sinh \frac{1}{2} d(i, e^l i) = \frac{\|e^l i - i\|_{\text{eucl}}}{2\sqrt{\text{Im } i \text{ Im } e^l i}} = \frac{e^l - 1}{2e^{\frac{l}{2}}} = -\sinh\left(-\frac{l}{2}\right) = \sinh\left(\frac{l}{2}\right).$$

Täten $d(i, e^l i) = l$ ja siten $\ell(\gamma) = l$. \square

Aloitetaan määrittämään reunallisia hyperbolisia sylintereitä.

Määritelmä 3.1.15 (Reunallinen hyperbolinen sylinteri). *Olkoon*

$$C = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z \geq 0\} / \langle T_l \rangle.$$

*Tällöin avaruutta C kutsutaan **reunalliseksi hyperboliseksi sylinteriksi reunan pituudella l ja sitä merkitään $C(l, \infty)$***

Lemma 3.1.16. *Olkoon C reunallinen hyperbolinen pinta, jonka perusryhmä on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa, jonka reuna on yhtenäinen ja tämän reunan pituus on $l > 0$. Tällöin se on isometrinen reunallisen hyperbolisen sylinterin $C(l, \infty)$, reunan pituudella l , kanssa*

Todistus. Olkoot

$$\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z \geq 0\}, \quad \mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z \leq 0\}$$

ja $\iota : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{H}_-, z \mapsto -\bar{z}$, suunnistuksen kääntävä isometria.

Merkitään pinnan C kartastoa $(U_p, \varphi_p)_{p \in C}$, missä $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{H}_+$. Voidaan määritellä avaruus C^{-1} , joka on isometrinen pinnan C kanssa, mutta jolla on vastakkainen suunnistus. Jos merkitään U_p^{-1} joukkoa U_p avaruudessa C^{-1} , avaruudelle C^{-1} voidaan määritellä kartasto $(U_p^{-1}, \iota \circ \varphi_p)_{p \in C}$, missä $\iota \circ \varphi_p : U_p^{-1} \rightarrow \mathbb{H}_-$.

3 Hyperboliset pinnat

Määritellään pinnan C tuplaus C^2 antamalla avaruudelle $C \sqcup C^{-1}$ tekijätopologia, jossa reunojen ∂C ja ∂C^{-1} pisteet samaistetaan. Olkoon $p \in C$ ja $U_p \subset C$ ympäristö, jolla $\varphi(U_p) \cap \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa sellainen kuvaus $\varphi^2 : U_p \cup U_p^{-1} \rightarrow \mathbb{H}$, että, jos $z \in U_p \subset U_p \cup U_p^{-1}$, niin $\varphi^2(z) = \varphi(z) \in \mathbb{H}_+ \subset \mathbb{H}$ ja vastaavasti, jos $z \in U_p^{-1} \subset U_p \cup U_p^{-1}$, niin $\varphi^2(z) = \iota \circ \varphi(z) \in \mathbb{H}_- \subset \mathbb{H}$. Lisäksi $\varphi^2(U_p \cup U_p^{-1})$ on diffeomorfinen avaruuden \mathbb{H} avoimen osajoukon kanssa.

Nyt pinnalle C^2 on olemassa kartasto avaruuteen \mathbb{H} , joka koostuu kartoista $(U_p \cup U_p^{-1}, \varphi^2)$ kun $\varphi(U_p) \cap \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \neq \emptyset$ ja kartoista (U_p, φ) , $(U_p^{-1}, \iota \circ \varphi_p)$ muilla $p \in C^2$.

Pinnan C reuna on kutistumaton suljettu parametrisoimaton geodeesi ja, koska avaruuden C luonnollinen upotus tekijäavaruuteen C^2 on isometria ja pinnan C perusryhmän ja pinnan C^2 perusryhmän välillä on isomorfismi, tämä reuna kuvautuu kutistumattomaksi suljetuksi parametrisoimattoksi geodeesiksi avaruuteen C^2 . Avaruus C^2 varustettuna tällä kartastolla on reunaton hyperbolinen pinta, sen perusryhmä on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa ja sillä on yksi kutistumaton yksinkertainen suljettu parametrisoimaton geodeesi. Täten lemموjen 3.1.13, 3.1.23 ja 3.1.7 perusteella pinta C^2 on isometrinen hyperbolisen sylinterin

$$\mathbb{H} / \langle T_l \rangle.$$

kanssa. Avaruuden C luonnollinen upotus tekijäavaruuteen C^2 tekee avaruudesta C isometrisen avaruuden

$$\{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\} / \langle T_l \rangle.$$

kanssa. □

Reunallisen hyperbolisen sylinterin geodeettista reunaa kutsutaan sylinterin minimaaliseksi geodeesiksi.

Määritelmä 3.1.17 (Rajoitettu reunallinen hyperbolinen sylinteri). *Olkoon*

$$C(l, r) := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ ja } d(z, i\mathbb{R}_+) \leq r\} / \langle T_l \rangle,$$

missä $l, r > 0$. Tällöin avaruutta $C(l, r)$ kutsutaan **rajoitetuksi reunalliseksi hyperboliseksi sylinteriksi geodeettisen reunan pituudella l ja leveydellä r** . Avaruuden $C(l, r)$ reunan komponenttia, joka ei ole geodeettinen, kutsutaan sen ei-geodeettiseksi reunaksi.

Korollaari 3.1.18. *Olkoon C' reunallinen hyperbolinen sylinteri ja*

$$C = \{z \in C' \mid d(z, \partial C') \leq r\},$$

missä $r > 0$. Tällöin C on isometrinen rajoitetun reunallisen hyperbolisen sylinterin $C(l, r)$ kanssa.

Todistus. Avaruus C voidaan upottaa isometrisesti reunalliseen hyperboliseen sylinteriin C' . Täten tulos saadaan toistamalla lemmän 3.1.16 todistus. □

3 Hyperboliset pinnat

Määritelmä 3.1.19 (Rajoitettujen hyperbolisten sylinterien liimaus). *Olkoon*

$$C^2(l, r) := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, i\mathbb{R}_+) \leq r\} / \langle T_l \rangle,$$

missä $l, r > 0$. Tällöin avaruutta C kutsutaan **kahden rajoitetun hyperbolisen sylinterin liimaukseksi minimaalisen geodeesin pituudella l ja leveydellä r** .

Korollaari 3.1.20. *On olemassa sellainen isometrinen upotus $\eta_1 : C(l, r) \hookrightarrow C^2(l, r)$ ja sellainen suunnistuksen kääntävä isometrinen upotus $\eta_2 : C(l, r) \hookrightarrow C^2(l, r)$, että $\eta_1(C(l, r)) \cap \eta_2(C(l, r))$ on parametrisoimaton suljettu geodeesi.*

Todistus. Olkoot

$$\Omega^2(r) := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, i\mathbb{R}_+) \leq r\}$$

ja

$$\Omega(r) := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ ja } d(z, i\mathbb{R}_+) \leq r\}.$$

Nyt isometrinen inkluusio $\Omega(r) \hookrightarrow \Omega^2(r)$ laskeutuu isometriseksi upotukseksi

$$\Omega(r) / \langle T_l \rangle \hookrightarrow \Omega^2(r) / \langle T_l \rangle$$

eli isometriseksi upotukseksi $C(l, r) \hookrightarrow C^2(l, r)$. Vastaavasti saadaan toinen suuntauksen kääntävä upotus. Näiden upotusten kuvien leikkaus on

$$i\mathbb{R}_+ / \langle T_l \rangle \subset \Omega^2(r) / \langle T_l \rangle,$$

joka on suljettu parametrisoimaton geodeesi. □

Määritelmä 3.1.21 (Rajoitetun hyperbolisen sylinterin ja reunallisen hyperbolisen sylinterin liimaus). *Olkoon*

$$C = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, i\mathbb{R}_+) \leq r, \text{ kun } \operatorname{Re} z \geq 0, \text{ tai } \operatorname{Re} z < 0\} / \langle T_l \rangle.$$

Tällöin avaruutta C kutsutaan **rajoitetun hyperbolisen sylinterin ja reunallisen hyperbolisen sylinterin liimaukseksi minimaalisen geodeesin pituudella l ja leveydellä r** . Avaruutta C merkitään $\mathcal{C}(l, r)$.

Korollaari 3.1.22. *On olemassa sellainen isometrinen upotus $\eta_1 : C(l, r) \hookrightarrow \mathcal{C}(l, r)$ ja sellainen suunnistuksen kääntävä isometrinen upotus $\eta_2 : C(l, \infty) \hookrightarrow \mathcal{C}(l, r)$, että $\eta_1(C(l, r)) \cap \eta_2(C(l, \infty))$ on parametrisoimaton suljettu geodeesi.*

Todistus. Olkoot

$$\Omega'(r) := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, i\mathbb{R}_+) \leq r, \text{ kun } \operatorname{Re} z \geq 0\}, \Omega_1(r) := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ ja } d(z, i\mathbb{R}_+) \leq r\}$$

ja

$$\Omega_2(r) := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

3 Hyperboliset pinnat

Nyt isometrinen inklusio $\Omega_1(r) \hookrightarrow \Omega^2(r)$ laskeutuu isometriseksi upotukseksi

$$\Omega_1(r)/\langle T_l \rangle \hookrightarrow \Omega'(r)/\langle T_l \rangle$$

eli isometriseksi upotukseksi $C(l, r) \hookrightarrow C'(l, r)$. Vastaavasti saadaan upotus

$$\Omega_2(r)/\langle T_l \rangle \hookrightarrow \Omega'(r)/\langle T_l \rangle$$

eli suuntauksen kääntävä isometrinen upotus $C(l, \infty) \hookrightarrow C'(l, r)$. Näiden upotusten kuvien leikkaus on

$$i\mathbb{R}_+/\langle T_l \rangle \subset \Omega'(r)/\langle T_l \rangle,$$

joka on suljettu parametrisoimatonta geodeesi. \square

3.1.4 Paraboliset sylinterit

Tässä aliosiossa todistetaan lemmaa 3.1.13 vastaava tulos parabolisille sylintereille ja rajoitetaan parabolisesta sylinteristä toinen hyödyllinen sylinteri.

Lemma 3.1.23. *Olkoon C parabolinen sylinteri. Tällöin pinnalla C ei ole yhtäkään yksinkertaista suljettua parametrisoimatonta geodeesia.*

Todistus. Pinta C on tekijäavaruus hyperbolisesta puolitasosta parabolisella isometrialla $P : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, z \rightarrow z + 1$. Oletetaan, että parabolisella sylinterillä C olisi suljettu parametrisoitu geodeesi $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$. Olkoon sen lähtöpiste $\gamma(1) = z, z \in C$, ja olkoon \tilde{z} pisteen z alkukuva tekijäkuvauksessa.

Jos $p : \mathbb{H} \rightarrow C$ on peitekuvaus, joukko $p^{-1}\{z\}$ on muotoa $\{P^n(\tilde{z}) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\tilde{z} + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Täten joukko $p^{-1}\{z\}$ sisältyy avaruuden prototyypilliselle parametrisoimattomalle horosyklille $c = \mathbb{R} + \text{Im } \tilde{z}$. Erityisesti siis parametrisoidun geodeesin γ noston $\tilde{\gamma}$ kuvajoukon tulisi kohdata horosykli c äärettömän monessa pisteessä. Kuitenkin $\tilde{\gamma}$ on hyperbolisen puolitason geodeesi, eli se on joko imaginaariakselin siirto tai reaaliakselikeskeinen puoliympyrä eikä tämä voi siis päteä. Täten sylinterillä C ei ole yhtäkään suljettua parametrisoitua tai parametrisoimatonta geodeesia. \square

Määritelmä 3.1.24 (Rajoitettu parabolinen sylinteri). *Olkoon C pinta, joka on isometrinen avaruuden*

$$C_\infty(a) := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im } z \geq a\}/\langle P \rangle,$$

*kanssa, missä $a > 0$. Tällöin pinnan C sanotaan olevan **rajoitettu parabolinen sylinteri parametrilla a** .*

3.1.5 Reunattomien ja reunallisten hyperbolisten pintojen yhteys

Osoitetaan, että reunallisesta hyperbolisesta pinnasta voidaan saada reunaton hyperbolinen pinta luonnollisella tavalla.

3 Hyperboliset pinnat

Lemma 3.1.25. *Olkoon S reunallinen hyperbolinen pinta ja I indeksijoukko, joka indeksöi pinnan S reunan komponentit $\partial_i S, i \in I$. Tällöin on olemassa sellainen reunaton hyperbolinen pinta S' ja isometriset upotukset $c : S \hookrightarrow S', c_i : C(\ell(\partial_i S), \infty) \hookrightarrow S', i \in I$, että jokaisella $i \in I$ $c(S) \cap c_i(C(\ell(\partial_i S), \infty))$ on suljettu geodeesi, $S' = c(S) \cup \bigcup_{i \in I} c_i(C(\ell(\partial_i S), \infty))$ ja että $c_i(C(\ell(\partial_i S), \infty)) \cap c_j(C(\ell(\partial_j S), \infty)) = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$.*

Reunatonta hyperbolista pintaa S' kutsutaan **reunallista hyperbolista pintaa S vastaavaksi reunattomaksi hyperboliseksi pinnaksi**.

Todistus. Tarkastellaan reunan komponenttia $\partial_i S$ jollain $i \in I$. Reunallisen hyperbolisen pinnan määritelmän mukaisesti tämä on homeomorfinen avaruuden \mathbb{S}^1 kanssa ja reunan komponenttien äärellisen määrän takia on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}_+$, että

$$tb_i(r) := \{s \in S \mid d(s, \partial_i S) < r\}$$

on diffeomorfinen avaruuden $\mathbb{S}^1 \times [0, 1)$ kanssa jokaisella $i \in I$. Joukko $tb_i(r)$ on reunallinen pinta, joka perii reunalliselta hyperboliselta pinnalta S kartaston, jolla jokainen sen kartta on isometrinen avaruuden

$$\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

avoimen osajoukon kanssa. Pinnalla $tb_i(r)$ on ainakin yksi geodeettinen reuna ja sen perusryhmä on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa. Täten on olemassa sellainen reunan ympäristö reunallisessa hyperbolisessa sylinterissä $C(\ell(\partial_i S), \infty)$, joka on yhtenäinen, ja $tb_i(r)$ on isometrinen tämän ympäristön kanssa. Lemman 3.1.18 perusteella pintaa $tb_i(r)$ vastaava ympäristö on isometrinen rajoitetun reunallisen hyperbolisen sylinterin $C(\ell(\partial_i S), r)$ kanssa. Täten $tb_i(r)$ on upotettavissa rajoitetun hyperbolisen sylinterin ja reunallisen hyperbolisen sylinterin liimaukseen $\mathcal{C}(\ell(\partial_i S), r)$. Koska $\mathcal{C}(\ell(\partial_i S), r) = C(\ell(\partial_i S), r) \cup C(\ell(\partial_i S), \infty)$ ja $C(\ell(\partial_i S), r) \cap C(\ell(\partial_i S), \infty) = \gamma$, missä γ on suljettu geodeesi, niin suljetulla geodeesilla γ , tulos on todistettu yhdelle reunan komponentille.

Äskeisellä konstruktiolla saadaan reunallinen hyperbolinen pinta S_1 , jossa avaruudelle

$$S \sqcup C(\ell(\partial_1 S), \infty)$$

annetaan topologia ja Riemannin metriikka, jotka tekevät siitä reunallisen hyperbolisen pinnan ja johon on olemassa upotukset $c : S \hookrightarrow S_1$ ja $c_1 : C(\ell(\partial_1 S), \infty) \hookrightarrow S_1$. Tällä reunallisella hyperbolisella pinnalla, jokaisella reunan komponentin $\partial_1 S$ pisteellä on ympäristö, joka on isometrinen hyperbolisen puolitason \mathbb{H} avoimen osajoukon kanssa. Konstruktio voidaan toistaa tälle reunalliselle hyperboliselle pinnalle, jolloin myös jokaisella reunan komponentin $\partial_2 S$ pisteellä on ympäristö, joka on isometrinen hyperbolisen puolitason \mathbb{H} avoimeen osajoukkoon. Toistamalla konstruktiota iteratiivisesti kaikilla $i \in I$ saadaan pinta S' , joka on hyperbolinen pinta ja jolle on olemassa upotukset $c : S \hookrightarrow S'$ ja $c_i : C(\ell(\partial_i S), \infty) \hookrightarrow S', i \in I$, jotka toteuttavat halutut ominaisuudet. \square

Lemma 3.1.26. *Olkoon S reunallinen hyperbolinen pinta, joka on upotettu lemmän 3.1.25 kautta saatuun reunattomaan hyperboliseen pintaan S' . Jos (\mathbb{H}, p) on pinnan S' universaalipeite, $p^{-1}(S)$ on geodeesisesti konvekssi hyperbolisen puolitason \mathbb{H} osajoukko.*

Todistus. Olkoon S reunallinen hyperbolinen pinta, S' lemmän 3.1.25 avulla saatu reunaton hyperbolinen pinta, jonne S on isometrisesti upotettu ja (\mathbb{H}, p) pinnan S' universaalipeite. Ensinnäkin pinnan $S' \setminus S$ komponentit ovat hyperbolisia sylintereitä $\{C(l_i, \infty)\}_{i \in I}$, missä $l_i \in \mathbb{R}_+$ ja I on indeksijoukko, joka käy läpi reunallisen pinnan S reunan komponentit $\partial_i S, i \in I$. Koska hyperbolisilla sylintereillä $\{C(l_i, \infty)\}_{i \in I}$ on geodeettinen reuna, ne nousevat hyperbolisen puolitason parametrisoimattomien geodeesien rajoittamiksi joukoiksi. Täten, koska näiden geodeesien rajoittamat joukot ovat yhtenäisiä ja sisältävät hyperbolisen puolitason reunan näiden geodeesien päätepisteiden äärettömyydessä välillä, joukon $p^{-1}(S)$ täytyy olla yhtenäinen. Olkoon $p_1, p_2 \in p^{-1}(S)$. Tällöin niiden välillä on yksikäsitteinen parametrisoimattoman geodeesin osa γ . Koska $p^{-1}(S)$ on yhtenäinen ja geodeesin osa γ voi kohdata joukon $p^{-1}(\partial S)$ geodeettiset komponentit ainoastaan yhdessä pisteessä, joukon $p^{-1}(S)$ täytyy olla geodeettisesti konvekssi. \square

3.2 Y -palat

3.2.1 Y -palat

Määritellään ensin Y -palat ja muutama tulos niiden perusrhmien virittäjistä. Tästä saadaan korollaareina, että Y -paloihin voidaan upottaa tietty määrä hyperbolisia ja parabolisia sylintereitä riippuen niiden signaturesta.

Määritelmä 3.2.1 (Reunallinen Y -pala). *Olkoon Y reunallinen hyperbolinen pinta, joka on diffeomorfinen pallopinnan S^2 kanssa, josta on poistettu m erillistä avoimen kiekon kanssa diffeomorfasta aluetta ja k pistettä. Tällöin pintaa Y kutsutaan **signaturen** $(0, m, k)$ **reunalliseksi Y -palaksi**.*

Määritelmä 3.2.2. *Olkoon \bar{Y} reunallisen Y -palan Y täydellistymä. Tällöin pisteitä $\bar{Y} \setminus Y$ kutsutaan Y -palan Y pisteiksi äärettömyydessä.*

Lemma 3.2.3. *Y -palan Y perusrhmällä $\pi_1(Y)$ on kolme virittäjää $\sigma_i, i \in \{1, 2, 3\}$, joille pätevät relaatiot $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3, \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1$ ja $\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2$.*

Todistus. Määritelmän perusteella Y -pala Y on diffeomorfinen avoimeen kiekkoon \mathbb{D} , josta on poistettu kaksi toisistaan ja reunasta erillistä diffeomorfasta kiekkoa \mathbb{D} tai pistettä. Täten avaruudella Y on kolme ei-vapaasti homotooppista silmukkaa. Kaksi, c_1 ja c_2 , poistettujen diffeomorfisten kiekkojen tai pisteiden ympärillä ja yksi, c_3 , ulkoreunan ympärillä. Suunnistamattomina nämä kattavat kaikki toisiinsa ei-vapaasti homotooppiset yksinkertaiset silmukat Y -palalla Y .

Jos kiinnitetään piste $s \in Y$, niin c_1, c_2 ja c_3 ovat vapaasti homotooppisia kolmen silmukan γ_1, γ_2 ja γ_3 kanssa, joilla $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0) = s$. Huomataan, että jos polut ovat suunnattuja positiivisesti, yhteenliitetty polku $\gamma_2\gamma_1$ on homotooppinen polun γ_3 kanssa. Erityisesti siis perusrhmä on isomorfinen sellaisen ryhmän kanssa, jolla on

3 Hyperboliset pinnat

kolme virittäjää σ_1, σ_2 ja σ_3 ja jolle pätee relaatio $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$. Vastaavasti $\sigma_2\sigma_3 = \sigma_1$ ja $\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2$. \square

Lemma 3.2.4. *Y -palan Y , jonka signature on $(0, m, k)$ perusryhmän $\pi_1(Y)$ virittäjistä m kappaletta on hyperbolisia ja k parabolisia.*

Todistus. Lemman 3.2.3 perusteella signaturen $(0, m, k)$ Y -palan Y perusryhmällä $\pi_1(Y)$ on kolme virittäjää ja nämä vastaavat epätriviaaleja silmukoita c_1, c_2 ja c_3 poistettujen diffeomorfisten kiekkojen $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ ja poistettujen pisteiden p_{m+1}, \dots, p_3 ympärillä.

Olkoon $\sigma_i, i \in \{1, 2, 3\}$, virittäjä, joka vastaa silmukkaa c_i poistetun diffeomorfisen kiekon Δ_i ympärillä. Koska Y on reunallinen hyperbolinen pinta, reuna $\partial\Delta_i$ on geodeettinen ja homeomorfinen avaruuden \mathbb{S}^1 kanssa. Lisäksi on olemassa sellainen $r \in \mathbb{R}_+$, että

$$tb_i(r) := \{s \in S \mid d(s, \partial\Delta_i) < r\}$$

on diffeomorfinen avaruuden $\mathbb{S}^1 \times [0, 1)$ kanssa. Joukko $tb_i(r)$ on reunallinen pinta, joka perii reunalliselta hyperboliselta pinnalta S kartaston, jolla jokainen sen kartta on isometrinen avaruuden

$$\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

avoimen osajoukon kanssa. Koska sillä on ainakin yksi geodeettinen reuna ja sen perusryhmä on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa, se vastaa jotain yhtenäistä reunan ympäristöä reunallisessa hyperbolisessa sylinterissä $C(\ell(\partial\Delta_i), \infty)$ ja on isometrinen tämän reunan ympäristön kanssa. Lemman 3.1.18 perusteella tämä ympäristö on isometrinen rajoitetun reunallisen hyperbolisen sylinterin $C := C(\ell(\partial\Delta_i), r)$ kanssa.

Olkoon $\iota : C \hookrightarrow Y$ isometrinen upotus, joka saadaan upotuksesta $tb_i(r) \hookrightarrow Y$. Tällöin ι indusoi kuvauksen $\iota^* : \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(Y)$. Koska silmukka c_i sisältyy joukkoon $tb_i(r)$ ja on homotooppinen reunan $\partial\Delta_i$ kanssa, ι^* kuvaa sylinterin C perusryhmän $\pi_1(C)$ hyperbolisen virittäjän silmukkaa c_i vastaavalle perusryhmän $\pi_1(Y)$ virittäjälle, joka on täten hyperbolinen. Täten, jos $\sigma_i, i \in \{1, 2, 3\}$, vastaa poistettua diffeomorfista kiekkoa ympäröivää silmukkaa, se on hyperbolinen.

Olkoon $\sigma_i, i \in \{1, 2, 3\}$, virittäjä, joka vastaa silmukkaa c_i poistetun pisteen p_i ympärillä. Tällöin on olemassa pisteen p_i ympäristö $tb_i(r_i)$, missä $r_i > 0$, joka on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{S}^1 \times (0, 1)$ kanssa ja diffeomorfinen punkteeratun kiekon \mathbb{D}^* kanssa. Nyt $tb_i(r_i)$ on pinta ja, koska sen perusryhmä on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z} kanssa, se on isometrinen jonkin avaruuden \mathbb{H} osajoukon V tekijäavaruuden

$$V / \langle \sigma \rangle$$

kanssa, missä $\sigma \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$. Täten se on lemmän 3.1.7 perusteella upotettavissa joko hyperboliseen tai paraboliseen sylinteriin. Kuitenkin, koska $tb_i(r_i)$ on diffeomorfinen punkteerattuun kiekkoon, sitä ei voi diffeomorfisesti upottaa hyperboliseen sylinteriin. Täten σ on parabolinen. Olkoon $C := V / \langle \sigma \rangle$. Tällöin on olemassa isometrinen upotus $\iota : C \hookrightarrow Y$, joka saadaan upotuksesta $tb_i(r_i) \hookrightarrow Y$. Kuten aiemmin, tämä upotus indusoi kuvauksen perusryhmien $\pi_1(C)$ ja $\pi_1(Y)$ välille ja silmukkaa $c_i, i \in \{1, 2, 3\}$, joka ympäröi poistettua pistettä, vastaava virittäjä σ_i on parabolinen. \square

3 Hyperboliset pinnat

Äskeisen todistuksen yhteydessä todistettiin seuraavat korollaarit.

Korollaari 3.2.5. *Olkoon Y signaturen $(0, m, k)$ Y -pala, jonka reunan komponentit ovat $\partial_i Y, i \in \{1, \dots, m\}$, ja, jonka perusr ryhmän hyperboliset virittäjät ovat $\sigma_i, i \in \{1, \dots, m\}$. Tällöin isometria σ_i on konjugaatti prototyyppilliseen hyperbolisen isometrian $T_{\ell(\partial_i Y)}$ kanssa kaikilla $i \in \{1, \dots, m\}$.*

Todistus. Äskeisen lemmän 3.2.4 perusteella Y -palan Y virittäjät vastaavat rajoitetun hyperbolisen sylinterin $C(\ell(\partial\Delta_i), r)$ virittäjää. Täten tulos seuraa lemmasta 3.1.14 ja määritelmästä 3.1.17. \square

Korollaari 3.2.6. *Y -palaan Y , jonka signature on $(0, m, k), m+k=3$, voidaan upottaa m kappaletta rajoitettuja reunallisia hyperbolisia sylintereitä.*

Todistus. Olkoon $\sigma_i, i \in \{1, 2, 3\}$, virittäjä, joka vastaa silmukkaa c_i poistetun diffeomorfisen kiekon Δ_i ympärillä. Tällöin äskeisen lemmän 3.2.4 todistuksen perusteella

$$tb_i(r) := \{s \in S \mid d(s, \partial\Delta_i) \leq r\}$$

on isometrinen rajoitetun reunallisen hyperbolisen sylinterin $C(\ell(\partial\Delta_i), r)$ kanssa ja on upotettavissa Y -palaan Y . \square

Korollaari 3.2.7. *Y -palaan Y , jonka signature on $(0, m, k), m+k=3$, voidaan upottaa k kappaletta rajoitettuja parabolisia sylintereitä.*

Todistus. Olkoon $\sigma_i, i \in \{1, 2, 3\}$, virittäjä, joka vastaa silmukkaa c_i poistetun pisteen p_i ympärillä. Tällöin äskeisen lemmän 3.2.4 todistuksen perusteella ympäristö tb_i pisteen p_i ympärillä on isometrinen jonkin avaruuden \mathbb{H} osajoukon V tekijäavaruuden

$$V / \langle \sigma \rangle$$

kanssa, missä $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on parabolinen. Täten on olemassa sellainen avaruuden \mathbb{H} osajoukko V' , että tb_i on isometrinen tekijäavaruuden

$$C := V' / \langle P \rangle$$

kanssa, missä P on prototyyppillinen parabolinen isometria. Lisäksi, koska tb_i on diffeomorfinen punkteerattuun kiekkoon \mathbb{D}^* , avaruuden C täytyy sisältää parabolisen sylinterin piste äärettömyydessä. Täten osajoukon V' täytyy sisältää piste äärettömyydessä $\infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja sisältää jonkin parametrisoimattoman horosyklin $\mathbb{R} + ai, a \in \mathbb{R}_+$, yläpuolisen joukon

$$\{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im } z \geq a\}.$$

Tällöin C sisältää rajoitetun parabolisen sylinterin, joka on isometrisesti upotettavissa avaruuteen Y . \square

3.2.2 Y -palojen isometrisyys

Osoitetaan, että Y -palojen isometrialuokat määräytyvät täysin niiden signaturen ja reunan komponenttien pituuksien perusteella.

Aloitetaan määrittelemällä jäljen itseisarvo, jota käytetään lopullisessa todistuksessa.

Lemma 3.2.8. *Olkoon $|\operatorname{tr}| : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ kuvaus*

$$|\operatorname{tr}|(A) \mapsto |\operatorname{tr}(A')|$$

missä $A' \in SL(2, \mathbb{R})$ on matriisin $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ alkukuvassa tekijäkuvauksessa $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$. Tällöin $|\operatorname{tr}|$ on hyvin määritelty kuvaus.

Kuvausta $|\operatorname{tr}|$ kutsutaan **jäljen itseisarvoksi**.

Todistus. Kuvaus $\operatorname{tr} : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ on hyvin määritelty kuvaus. Olkoon $A \in SL(2, \mathbb{R})$, avaruus $PSL(2, \mathbb{R})$ samaistaa matriisit A ja $-I_2A$. Koska

$$\operatorname{tr}(A) = -\operatorname{tr}(-I_2A),$$

niin

$$|\operatorname{tr}(A)| = |\operatorname{tr}(-I_2A)|$$

ja täten $|\operatorname{tr}| : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ on hyvin määritelty. □

Korollaari 3.2.9. *Kuvaus $|\operatorname{Tr}| = |\operatorname{tr}| \circ \mathcal{M}^{-1} : \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, missä $\mathcal{M} : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$ on lemmän 2.1.29 isomorfismi, on hyvin määritelty.*

Lemma 3.2.10. *Olkoon $\sigma \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$ hyperbolinen isometria. Tällöin $|\operatorname{Tr}|(\sigma) > 2$.*

Todistus. Olkoon $\sigma \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$ on hyperbolinen, eli

$$\sigma = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1},$$

missä $l > 0$ ja $\phi \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$. Tällöin

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma) = A \begin{bmatrix} e^{l/2} & 0 \\ 0 & e^{-(l/2)} \end{bmatrix} A^{-1},$$

missä $A = \mathcal{M}^{-1}(\phi)$. Koska matriisin jälki ei muutu konjugoinnissa

$$|\operatorname{Tr}|(\sigma) = |\operatorname{tr}| \left(\begin{bmatrix} e^{l/2} & 0 \\ 0 & e^{-(l/2)} \end{bmatrix} \right) = e^{l/2} + e^{-(l/2)}.$$

Olkoon $f : (1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$ funktio $x \mapsto x + (1/x)$. Tällöin derivaatta $D(f)$ on funktio $x \mapsto x - x^{-2}$. Koska $x \mapsto x^{-2}$ on laskeva, derivaatta $D(f)$ on kasvava. Lisäksi $f(1) = 2$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ eli $f((1, \infty)) = (2, \infty)$. Nyt

$$|\operatorname{Tr}|(\sigma) = e^{l/2} + e^{-(l/2)} = f(e^{l/2}) > 2.$$

3 Hyperboliset pinnat

Täten, jos $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on hyperbolinen, $|\text{Tr}|(\sigma) > 2$. \square

Korollaari 3.2.11. *Olkoon $H \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ isometrioiden $T_l, l > 0$, muodostama aliryhmä. Tällöin $|\text{Tr}| : H \rightarrow (2, \infty)$ on bijektio.*

Korollaari 3.2.12. *Olkoon Y signaturen $(0, m, k)$ Y -pala, jonka reunan komponentit ovat $\partial_i Y, i \in \{1, \dots, m\}$. Tällöin perusryhmän $\pi_1(Y)$ hyperbolisen virittäjän σ_i jälki on määritelty yksikäsitteisesti pituudesta $\ell(\partial_i Y)$.*

Todistus. Korollaarin 3.2.5 perusteella hyperbolinen virittäjä $\sigma_i, i \in \{1, \dots, m\}$ on konjugaatti isometriaan $T_{\ell(\partial_i Y)}$. Korollaarin 3.2.11 perusteella isometrian $T_{\ell(\partial_i Y)}$ jälki on yksikäsitteinen kunhan tiedetään pituus $\ell(\partial_i Y)$. Koska jälki ei muutu konjugoinnissa, isometrian σ_i jälki on yksikäsitteisesti määritelty pituudesta $\ell(\partial_i Y)$. \square

Lemma 3.2.13. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ parabolinen isometria. Tällöin $|\text{Tr}|(\sigma) = 2$.*

Todistus. Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on parabolinen, eli

$$\sigma = \phi \circ P \circ \phi^{-1},$$

tai

$$\sigma = \phi \circ P^{-1} \circ \phi^{-1},$$

missä $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Oletetaan, että σ on konjugaatti isometrian P kanssa. Tällöin

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma) = A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A^{-1},$$

missä $A = \mathcal{M}^{-1}(\phi)$. Koska matriisin jälki ei muutu konjugoinnissa

$$|\text{Tr}|(\sigma) = \left| \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right| = 2.$$

Jos σ on konjugaatti isometrian P^{-1} kanssa, tulos saadaan vastaavasti. \square

Seuraavaa todistusta varten tarvitaan matriisiesitykset tietyille isometriaille.

Lemma 3.2.14. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ ja $\sigma(\infty) = 1$. Tällöin*

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma) = \begin{bmatrix} a & d - a^{-1} \\ a & d \end{bmatrix}$$

missä $a, d \in \mathbb{R}$.

Todistus. Jos

$$A = \begin{bmatrix} a & d - a^{-1} \\ a & d \end{bmatrix},$$

3 Hyperboliset pinnat

missä $a, d \in \mathbb{R}$, niin

$$\det A = ad - (ad - 1) = 1$$

eli $\sigma \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$. Jos $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$,

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $z \in \mathbb{H}$ ja $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ja $\sigma(\infty) = 1$, niin $a = c$ ja $b, d \in \mathbb{R}$. Nyt, jos $d \in \mathbb{R}$, voidaan valita luku $a \in \mathbb{R}$ sellaiseksi, että $b = d - a^{-1}$. Täten

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma) = \begin{bmatrix} a & d - a^{-1} \\ a & d \end{bmatrix}$$

missä $a, d \in \mathbb{R}$. □

Lemma 3.2.15. *Olkoon $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ parabolinen ja $\sigma(0) = 0$. Tällöin*

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix},$$

missä $c \in \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Jos $\sigma(0) = 0$, niin $b = 0$ ja $d \neq 0$. Koska $\det \sigma = ad - bc = ad = 1$ ja $|\text{tr}(\sigma)| = a + d = 2$ täytyy päteä $a = d = 1$. Täten

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix},$$

missä $c \in \mathbb{R}$. □

Todistetaan lopulta tämän aliosion päätulos.

Lause 3.2.16. *Y -pala Y on isometriaa vaille yksikäsitteisesti määrätty sen signaturen $(0, m, k)$, $m + k = 3$, ja reunan komponenttien $\partial_i Y$, $i \in \{1, \dots, m\}$, pituuksien kautta.*

Todistus. Olkoot Y ja Y' sellaisia signaturen $(0, m, k)$, $m + k = 3$, Y -paloja, joiden reunan komponentit ovat $\partial_i Y$ ja $\partial_i Y'$, $i \in \{1, \dots, m\}$, että $\ell(\partial_i Y) = \ell(\partial_i Y')$. Olkoot \bar{Y} ja \bar{Y}' reunattomia hyperbolisia pintoja, jotka ovat lemmän 3.1.25 mielessä reunallisia hyperbolisia pintoja Y ja Y' vastaavia reunattomia hyperbolisia pintoja. Tällöin lemmän 1.2.21 perusteella

$$\bar{Y} \approx_{\text{isom}} \mathbb{H} / \pi_1(Y) \quad \text{ja} \quad \bar{Y}' \approx_{\text{isom}} \mathbb{H} / \pi_1(Y').$$

Täten $Y \approx_{\text{isom}} Y'$, jos $\pi_1(Y)$ ja $\pi_1(Y')$ ovat konjugaatiota vaille samat.

3 Hyperboliset pinnat

Lemman 3.2.3 perusteella jokaisen Y -palan perusryhmällä on kolme virittäjää σ_1, σ_2 ja σ_3 , joille pätee relaatio $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$. Osoitetaan, että, jos $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in [2, \infty)$ ovat kiinnitettyjä ja isometrioille $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ pätee $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$ ja $|\text{tr}|(\sigma_1) = \tau_1, |\text{tr}|(\sigma_2) = \tau_2$ ja $|\text{tr}|(\sigma_3) = \tau_3$, niin $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ovat konjugaatiota vaille yksikäsitteisesti määrättyjä. Koska lemmän 3.2.12 perusteella hyperbolisen virittäjän $\sigma_i, i \in \{1, \dots, m\}$, jäljen itseisarvo on yksikäsitteisesti määrätty Y -palan reunan komponenttien pituuksista, tämä todistaa tuloksen.

Oletetaan ensin, että ainakin yksi virittäjästä on hyperbolinen. Voidaan olettaa, että tämä on σ_1 . Koska σ_1 on hyperbolinen, on olemassa isometria $\psi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$, jolla $\psi \circ \sigma_1 \circ \psi^{-1} = T_l$, missä $l \in (0, \infty)$. Konjugoidaan kaikkia virittäjiä σ_1, σ_2 ja σ_3 isometrialla ψ , jolloin voidaan olettaa yleisyyttä menettämättä, että $\sigma_1 = T_l$. Olkoon $a := \sigma_2(\infty)$. Tällöin konjugoimalla kaikkia virittäjiä isometrialla $T_{\ln(1/a)}$, voidaan olettaa $\sigma_2(\infty) = 1$ ja σ_1 on yhä jokin prototyypillinen hyperbolinen isometria. Tällöin lemmän 3.2.14 perusteella

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma_1) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} (\pm I_2), \quad \mathcal{M}^{-1}(\sigma_2) = \begin{bmatrix} b & c - b^{-1} \\ b & c \end{bmatrix} (\pm I_2),$$

missä $a > 1$ ja $b, c \in \mathbb{R}$. Relaatiossa $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$ perusteella

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma_3) = \begin{bmatrix} ab & d_1 \\ d_2 & a^{-1}c \end{bmatrix} (\pm I_2),$$

joillain vakioilla $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, missä I_2 on identiteettimatriisi. Olkoon

$$|\text{Tr}|(\sigma_1) = \tau_1, \quad |\text{Tr}|(\sigma_2) = \tau_2 \text{ ja } |\text{Tr}|(\sigma_3) = \tau_3,$$

missä $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathbb{R}_+$. Nyt matriisien jäljistä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \tau_1 &= |a + a^{-1}| \\ \tau_2 &= |b + c| \\ \tau_3 &= |ab + a^{-1}c|. \end{cases}$$

Kirjan [6] lemmän 4.3.5. todistuksen perusteella tämä yhtälöryhmä määrää matriisit $\mathcal{M}^{-1}(\sigma_1), \mathcal{M}^{-1}(\sigma_2)$ ja $\mathcal{M}^{-1}(\sigma_3)$ yksikäsitteisesti avaruudessa $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Täten, koska \mathcal{M} on isomorfismi, isometriat $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ ovat yksikäsitteisesti määrättyjä.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikki virittäjät ovat parabolisia. Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ isometrioiden σ_1 ja σ_2 kiinnittämät pisteet äärettömydessä. Tällöin konjugoimalla isometrialla, joka kuvaa pisteen a_1 pisteelle ∞ ja pisteen a_2 pisteelle 0 , voidaan olettaa, että isometria σ_1 kiinnittää pisteen ∞ ja σ_2 kiinnittää pisteen 0 . Konjugoimalla isometrialla T_l , missä $l > 0$, voidaan olettaa, että $\sigma_1 = P$ ja σ_2 kiinnittää yhä pisteen 0 .

Nyt lemmän 3.2.15 perusteella

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\pm I_2), \quad \mathcal{M}^{-1}(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} (\pm I_2),$$

3 Hyperboliset pinnat

ja relaation $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$ perusteella

$$\mathcal{M}^{-1}(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 1+b & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} (\pm I_2).$$

Jotta σ_3 olisi parabolinen, eli $|\text{Tr}(\sigma_3)| = 2$ täytyisi päteä $b = -4$. Täten σ_1, σ_2 ja σ_3 ovat yksikäsitteisesti määrättyjä, jos Y -palan signature on $(0, 0, 3)$. \square

Korollaari 3.2.17. *Kaksi reunallista Y -palaa ovat isometrisia, jos ja vain jos niiden signature on sama ja niiden reunan komponenttien pituudet ovat samat.*

Todistus. Jos Y -palojen Y ja Y' signaturet $(0, m, k)$ ja $(0, m', k')$ eivät ole samat, ne eivät ole diffeomorfisia toisiinsa. Täten ne eivät voi olla isometrisiä.

Olkoot Y ja Y' signaturen $(0, m, k)$ Y -paloja, jotka ovat isometrisiä toisiinsa. Tällöin niiden reunan komponentit $\partial_i Y$ ja $\partial_i Y', i \in \{1, \dots, m\}$, ovat isometrisiä ja täten niiden pituudet ovat samat.

Jos signaturen $(0, m, k)$ Y -palojen Y ja Y' reunan komponenttien $\partial_i Y$ ja $\partial_i Y', i \in \{1, \dots, m\}$, pituudet ovat samat, ne ovat isometrisiä lauseen 3.2.16 perusteella. \square

3.2.3 Geodeettiset kuusikulmiot

Tässä aliosiossa osoitetaan, että kaikilla Y -paloilla on sama pinta-ala.

Aloitetaan määrittelemällä geodeettiset kuusikulmiot. Ensin tarvitaan muutama määritelmä.

Määritelmä 3.2.18 (Yksinkertainen kompakti sykli). *Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^n$ sellainen jono yksinkertaisia polkuja $[-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}$, että $\gamma_i(\epsilon) = \gamma_{i+1}(-\epsilon)$, missä indeksit ovat modulo n ja $\gamma_i((-\epsilon, \epsilon)) \cap \gamma_j((-\epsilon, \epsilon)) = \emptyset$ kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin jonoa $(\gamma_i)_{i=1}^n$ kutsutaan **yksinkertaiseksi kompaktiksi sykliksi**, polkuja $\gamma_i, i \in \{1, \dots, n\}$ sen **sivuiksi**, joukkoa*

$$\bigcup_{i=1}^n \gamma_i([-\epsilon, \epsilon])$$

sen **kuvaksi** ja tämän kuvan rajaamaa aluetta **syklin rajaamaksi alueeksi**.

Määritelmä 3.2.19 (Yksinkertainen ei-kompakti sykli). *Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^n$ sellainen jono yksinkertaisia polkuja $[-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}$, $[-\epsilon, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$, $(-\infty, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}$ tai $(-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$, tai pisteitä äärettömydessä $\gamma_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, että $\gamma_i(\epsilon) = \gamma_{i+1}(-\epsilon)$, $\gamma_i(\infty) = \gamma_{i+1}$ tai $\gamma_i = \gamma_{i+1}(-\infty)$ missä indeksit ovat modulo n ja $\text{Image } \gamma_i \cap \text{Image } \gamma_j = \emptyset$ kaikilla $i, j \in \{1, \dots, n\}$ lukuunottamatta polkujen päätepisteitä. Tällöin jonoa $(\gamma_i)_{i=1}^n$ kutsutaan **yksinkertaiseksi ei-kompaktiksi sykliksi**, polkuja $\gamma_i, i \in \{1, \dots, n\}$ sen **sivuiksi**, joukkoa*

$$\bigcup_{i=1}^n \text{Image } \gamma_i$$

sen **kuvaksi** ja tämän kuvan rajaamaa aluetta **syklin rajaamaksi alueeksi**.

Määritelmä 3.2.20 (Geodeettinen kompakti monikulmio). *Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^n$ yksinkertainen sykli, jolla jokainen $\gamma_i, i \in \{1, \dots, n\}$, on geodeesin osa. Tällöin sykliä $(\gamma_i)_{i=1}^n$ kutsutaan **kompaktiksi geodeettiseksi n -monikulmioksi**.*

Määritelmä 3.2.21 (Geodeettinen ei-kompakti monikulmio). *Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^n$ yksinkertainen ei-kompakti sykli, jolla jokainen $\gamma_i, i \in \{1, \dots, n\}$, on joko geodeesin osa tai piste äärettömyydessä. Tällöin sykliä $(\gamma_i)_{i=1}^n$ kutsutaan **ei-kompaktiksi geodeettiseksi n -monikulmioksi**.*

Määritelmä 3.2.22 (Syklin sisäkulmat). *Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^n$ yksinkertainen kompakti tai ei-kompakti sykli ja $\theta_i = \langle -\dot{\gamma}_i(\epsilon), \dot{\gamma}_{i+1}(-\epsilon) \rangle$ tai $\theta_i = 0$, jos γ_{i+1} tai γ_i on piste äärettömyydessä. Tällöin jonoa $(\theta_i)_{i=1}^n$ kutsutaan syklin $(\gamma_i)_{i=1}^n$ **sisäkulmiksi**.*

Määritelmä 3.2.23 (Suorakulmainen geodeettinen kuusikulmio). *Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^6$ geodeettinen kompakti tai ei-kompakti kuusikulmio, jonka sisäkulmat ovat joko $\pi/2$ tai 0 ja jolla enintään joka toinen sivu on piste äärettömyydessä. Tällöin geodeettista kuusikulmiota $(\gamma_i)_{i=1}^6$ kutsutaan **suorakulmaiseksi geodeettiseksi kuusikulmioksi**.*

Seuraavaksi osoitetaan, että geodeettisen kuusikulmion pinta-ala on vakio. Aloitetaan laskemalla pinta-ala geodeettisille kolmioille. Tätä varten tarvitaan hyperbolisen puolitason tilavuusmuoto.

Lemma 3.2.24. *Hyperbolisen puolitason \mathbb{H} tilavuusmuoto on*

$$\frac{\text{vol}_{\text{eucl}}}{(\text{Im } z)^2},$$

missä vol_{eucl} on euklidisen tason tilavuusmuoto.

Seuraavia todistuksia varten tarvitaan geodeettisia monikulmioita, joilla on kolme sivua, jotka eivät ole äärettömyydessä, mutta joilla nämä sivut voivat kohdata äärettömyydessä. Määritellään geodeettinen kolmio seuraavasti.

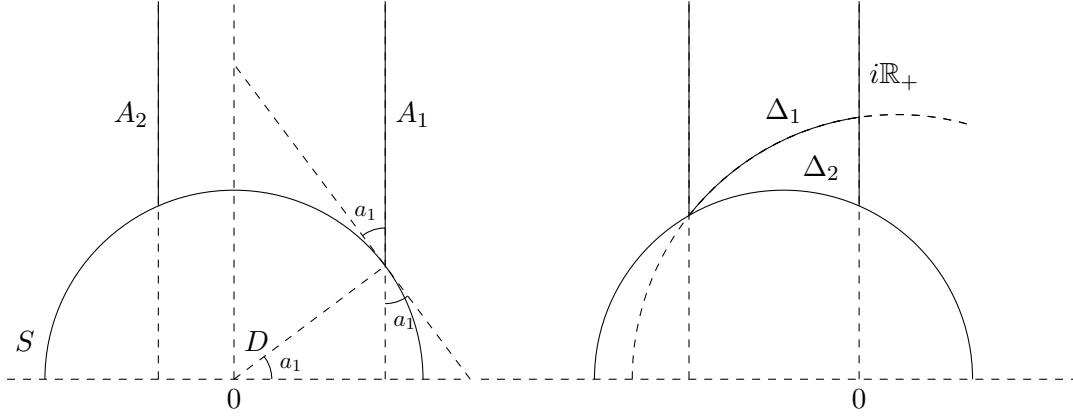
Määritelmä 3.2.25 (Geodeettinen kolmio). *Olkoon Δ geodeettinen n -monikulmio $n = 3, 4, 5, 6$, jolla on vastaavasti joko 0, 1, 2 tai 3 pistettä äärettömyydessä. Tällöin monikulmiota Δ kutsutaan **geodeettiseksi kolmioksi**, vaikka se ei ole geodeettinen 3-monikulmio. Olkoot $j \in J \subset \{1, \dots, n\}$ sellaisia, että γ_{j-1} ei ole piste äärettömyydessä, tällöin $|J| = 3$, geodeesejä $\gamma_j, j \in J$ kutsutaan kolmion **sivuiksi** ja sisäkulmia $(\theta_j)_{j \in J}$ kolmion Δ **sisäkulmiksi**.*

Lemma 3.2.26. *Olkoon Δ geodeettinen kolmio, jonka sivut ovat $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ja jonka sisäkulmat ovat $a_1, a_2, a_3 \in [0, \pi]$ Tällöin kolmion kuvan rajaaman alueen Δ pinta-ala on*

$$\mathcal{A}(\Delta) := \pi - a_1 - a_2 - a_3.$$

Todistus. Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^3$ geodeettinen kolmio ja (a_1, a_2, a_3) sen sisäkulmat. Oletetaan ensin, että $a_3 = 0$. Tällöin voidaan konjugoinnilla siirtää tapaukseen, jossa sivun γ_1

3 Hyperboliset pinnat



Kuva 3.1: Hahmotelma lemmän 3.2.26 todistuksesta.

kuva kuuluu parametrisoimattomalle geodeesille $A_1 := i\mathbb{R}_+ + x_1, x_1 > 0$, sivun γ_3 kuva kuuluu parametrisoimattomalle geodeesille $A_2 := i\mathbb{R}_+ + x_2, x_2 < 0$, ja sivun γ_2 kuva kuuluu parametrisoimattomalle geodeesille S , joka on yksikkösäteinen origokeskeinen puoliympyrä. Lasketaan ensin x_1 ja x_2 .

Olkoon $s_1 \in S \cap A_1$, C suora, joka on tangentti puoliympyrälle S pisteessä s_1 ja $s_2 \in C \cap \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa suorakulmaiset kolmiot δ_1 pisteiden $0, x_1$ ja s_1 välillä ja δ_2 pisteiden x_1, s_1 ja s_2 välillä. Nämä ovat similaarit. Sisäkulma a_1 on kulma suorien C ja A_1 välillä, eli kolmion δ_2 kulma pisteessä s_1 . Similariteetin takia a_1 on myös kolmion δ_1 kulma pisteessä 0 . Täten $x_1 = \sin(a_1)$. Vastaavalla konstruktiolla $x_2 = \sin(\pi - a_2)$. Tilannetta on hahmoteltu kuvassa 3.1.

Jos hyperboliselle puolitasolle \mathbb{H} annetaan sen euklidiset koordinaatit ja niitä merkitään $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lemmän 3.2.24 perusteella sen tilavuusmuoto on

$$\frac{dx \wedge dy}{y^2} = d\left(\frac{dx}{y}\right).$$

Täten Stokesin lauseen perusteella

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \int_{\gamma_1} \frac{dx}{y} + \int_{\gamma_2} \frac{dx}{y} + \int_{\gamma_3} \frac{dx}{y},$$

Koska sivujen γ_1 ja γ_3 suuntavektorit ovat $\partial/\partial y$ ja $dx(\partial/\partial y) = 0$, ensimmäinen ja kolmas termi katoavat. Nyt korvaamalla koordinaatit puoliympyrällä S niiden trigonometrisilla esityksillä, $x = \cos \theta$ ja $y = \sin \theta$, saadaan

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{\sin(\pi-a_2)}^{\sin(a_1)} \frac{1}{\sin \theta} d(\cos \theta) = \int_{\pi-a_2}^{a_1} -\frac{\sin \theta}{\sin \theta} d\theta = -(a_1 - \pi + a_2) = \pi - a_1 - a_2.$$

Oletetaan seuraavaksi, että kolmiota vastaava n -monikulmio on 3-monikulmio, eli sillä ei ole sivuja äärettömyydessä. Tällöin voidaan isometrialla siirtyä tapaukseen, jossa sivun

3 Hyperboliset pinnat

γ_1 kuva kuuluu parametrisoimattomalle geodeesille $i\mathbb{R}_+$ ja sivujen γ_2 ja γ_3 kuvat kuuluvat parametrisoimattomille geodeeseille, jotka ovat puoliympyröitä. Olkoon $s_1 \in \gamma_2 \cap \gamma_3$. Tällöin on olemassa parametrisoimaton geodeesi $A := i\mathbb{R}_+ + \text{Re } s_1$, joka kulkee sivujen γ_2 ja γ_3 leikkauspisteen läpi. Olkoon $s_2 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ ja $s_3 \in \gamma_1 \cap \gamma_3$. Tällöin on olemassa geodeettiset kolmiot Δ_1 pisteiden s_1, s_2 ja ∞ välillä ja Δ_2 pisteiden s_1, s_3, ∞ välillä. Tilannetta on hahmoteltu kuvassa 3.1. Kolmion Δ_1 sisäkulmat ovat $a_1, b, b \in (0, \pi)$ ja 0. Kolmion Δ_2 sisäkulmat ovat $\pi - a_3, b - a_2$ ja 0. Täten aiemman laskun perusteella $\mathcal{A}(\Delta_1) = \pi - a_1 - b$ ja $\mathcal{A}(\Delta_2) = \pi - (\pi - a_3) - (b - a_2)$. Lopulta huomataan, että $\Delta = \Delta_1 \setminus \Delta_2$ ja täten

$$\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{A}(\Delta_1) - \mathcal{A}(\Delta_2) = (\pi - a_1 - b) - (\pi - (\pi - a_3) - (b - a_2)) = \pi - a_1 - a_2 - a_3.$$

□

Lemma 3.2.27. *Suorakulmaisen geodeettisen kuusikulmion kuvan rajaaman alueen pinta-ala on π .*

Todistus. Olkoot $s_i \in \gamma_i(\text{Domain } \gamma_i) \cap \gamma_{i+1}(\text{Domain } \gamma_{i+1}), i \in \{1, \dots, 6\}$, jos molemmat eivät ole pisteitä äärettömyydessä ja $s_i = \gamma_i$ tai $s_i = \gamma_{i+1}$ muuten. Kutsutaan pisteitä s_i kuusikulmion kärjiksi. Tällöin, jos kuusikulmiolla G on $k \in \{1, 2, 3\}$ sivua äärettömyydessä, sillä on $6 - 2k$ kärkeä äärettömyydessä. Merkitään $[p_1, p_2, p_3]$ geodeettisiä kolmiota pisteiden $p_1, p_2, p_3 \in \overline{\mathbb{H}}$ välillä.

Olkoon $k = 3$. Tällöin kuusikulmio G on geodeettinen kolmio, jonka kaikki sisäkulmat ovat 0, ja täten $\mathcal{A}(G) = \pi - 0 = \pi$.

Olkoon $k = 2$. Voidaan olettaa, että γ_1 ja γ_3 ovat sivuja äärettömyydessä. Kuusikulmio G voidaan jakaa geodeettisiksi kolmioiksi $[\gamma_1, \gamma_3, s_4]$ ja $[\gamma_1, s_4, s_5]$. Tällöin ensimmäisen kolmion kaksi sisäkulmaa ovat nolla ja kolmas jakaa sisäkulman pisteessä s_4 . Toisen kolmion yksi sisäkulma on nolla, toinen $\pi/2$ ja kolmas jakaa sisäkulman pisteessä s_4 . Täten $\mathcal{A}(G) = 2\pi - 2 \cdot (\pi/2) - 0 = \pi$.

Olkoon $k = 1$. Voidaan olettaa, että γ_1 on sivu äärettömyydessä. Kuusikulmio G voidaan jakaa geodeettisiksi kolmioksi $[\gamma_1, s_3, s_4]$, $[s_4, s_5, s_6]$ ja $[\gamma_1, s_4, s_6]$. Kuten aiemmin, kolmioilla, joiden yksi kärki on γ_1 on yksi sisäkulma, jonka suuruus on nolla, kolmioilla, joiden jokin kärki esiintyy vain kerran kolmioissa, on sisäkulma, jonka suuruus on $\pi/2$ ja kolmioilla, joiden jokin kärki esiintyy useammassa kolmiossa, on sisäkulma, joka jakaa sisäkulman tässä kärjessä. Saadaan $\mathcal{A}(G) = 3\pi - 4 \cdot (\pi/2) - 0 = \pi$.

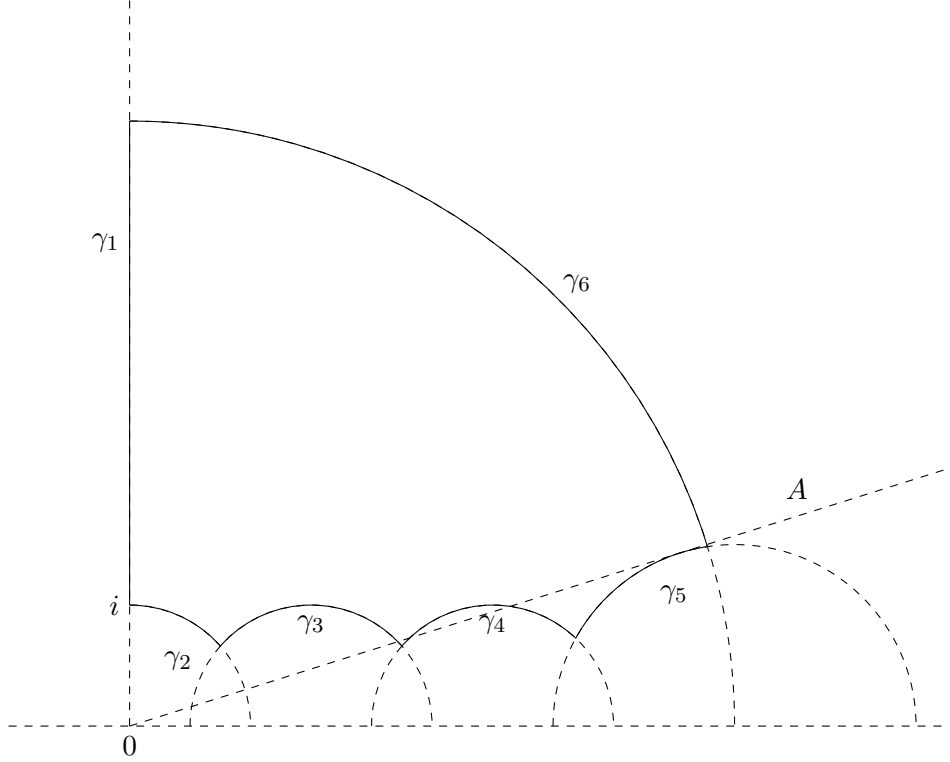
Jos $k = 0$, kuusikulmio G voidaan jakaa kolmioiksi $[s_1, s_3, s_3]$, $[s_3, s_4, s_5]$, $[s_5, s_6, s_1]$ ja $[s_1, s_3, s_5]$. Kolmioilla, joiden jokin kärki esiintyy vain kerran kolmioissa, on sisäkulma, jonka suuruus on $\pi/2$ ja kolmioilla, joiden jokin kärki esiintyy useammassa kolmiossa, on sisäkulma, joka jakaa sisäkulman tässä kärjessä. Täten saadaan $\mathcal{A}(G) = 4\pi - 6 \cdot (\pi/2) = \pi$.

Tämä todistaa tuloksen.

□

Lopulta osoitetaan, että Y -palat voidaan rakentaa geodeettisistä kuusikulmioista.

3 Hyperboliset pinnat



Kuva 3.2: Kuva lemmän 3.2.28 todistuksesta.

Lause 3.2.28. Olkoot $l_2, l_4, l_6 \in [0, \infty)$. Tällöin on olemassa sellainen suorakulmainen geodeettinen kuusikulmio $G = (\gamma_i)_{i=1}^6$, että $\ell(\gamma_i) = l_i$, kun $i \in \{2, 4, 6\}$. Kuusikulmio G on yksikäsitteinen suunnistuksen säilyttävällä isometrialla konjugointia vaille.

Geodeettisen kuusikulmion sivuja, joiden pituudet ovat lemmän mielessä määrättyjä kutsutaan geodeettisen kuusikulmion määrättyiksi sivuiksi.

Todistus. Olkoot ensin $l_2, l_4, l_6 = 0$. Tällöin konjugaatiolla voidaan siirtyä tapaukseen, jossa $\gamma_1(\mathbb{R}) = i\mathbb{R}_+$ ja, venyttämällä jollain prototyyppisellä hyperbolisella isometrialla, voidaan olettaa

$$\gamma_3(\mathbb{R}) = \{1 + e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}$$

jolloin täytyy päteä $\gamma_5(\mathbb{R}) = 2 + i\mathbb{R}_+$.

Oletetaan seuraavaksi, että ainakin yksi annetuista pituuksista l_2, l_4, l_6 on positiivinen. Voidaan olettaa, että tämä on l_2 . Tällöin voidaan konjugaatiolla olettaa, että paramet-

3 Hyperboliset pinnat

risoidun geodeesin γ_1 kuva kuuluu geodeesille $\Gamma_1 = i\mathbb{R}_+$ ja parametrisoidun geodeesin γ_2 kuva on puoliympyrän

$$\{z \in \mathbb{H} \mid z = e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi)\}$$

osa, jonka pituus on l_2 . On olemassa tasan yksi geodeesi, joka kohtaa parametrisoidun geodeesin γ_2 kohtisuorasti sen päätepisteessä. Merkitään tätä parametrisoimatonta geodeesiä Γ_3 . Oletetaan seuraavaksi, että l_6 on positiivinen. Tällöin joukko

$$A := \{z \in \mathbb{H} \mid d(i\mathbb{R}_+, z) = l_6\}$$

ei ole imaginaariakseli $i\mathbb{R}_+$. Voidaan valita sellainen yksikäsitteinen parametrisoimatonta geodeesi Γ_5 , että $d(\Gamma_3, \Gamma_5) = l_4$ ja Γ_5 kohtaa joukon A tangentiaalisesti. Jos $l_4 = 0$ otetaan γ_4 geodeesien Γ_3 ja Γ_5 yhteiseksi pisteeksi äärettömyydessä. Jos $l_4 > 0$ otetaan γ_4 olemaan parametrisoitu geodeesi, joka antaa etäisyyden geodeesien Γ_3 ja Γ_5 välillä. Otetaan γ_6 olemaan parametrisoitu geodeesi, joka antaa etäisyyden $d(i\mathbb{R}_+, \Gamma_5)$. Tällöin parametrisoitujen geodeesien γ_2, γ_4 ja γ_6 pituudet ovat l_2, l_4 ja l_6 . Lopulta voidaan ottaa geodeesit γ_1, γ_3 ja γ_5 parametrisoimaan parametrisoimattomien geodeesien Γ_1, Γ_3 ja Γ_5 osat geodeesien γ_2, γ_4 ja γ_6 päätepisteiden välillä. Konstruktio on hahmoteltu kuvassa 3.2.

Oletetaan, että $l_6 = 0$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $x \in \mathbb{R}$, jolla $d(\Gamma_3, x + i\mathbb{R}_+) = l_4$. Olkoon $\Gamma_5 = x + i\mathbb{R}_+$ ja $\gamma_6 = \infty$. Toistamalla äskenen konstruktio saadaan suorakulmainen geodeettinen kuusikulmio, joka toteuttaa ehdot kuusikulmion sivujen pituuksille.

Konstruktio on yksikäsitteinen suunnistuksen säilyttävällä isometrialla konjugointia vaille. \square

Lemma 3.2.29. *Reunallinen Y -pala on jaettavissa kahdeksi isometriseksi hyperbolisen puolitason suorakulmaiseksi geodeesiseksi kuusikulmioksi.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että suorakulmaisista geodeettisista kuusikulmioista voidaan rakentaa Y -paloja.

Olkoon $(\gamma_i)_{i=1}^6$ suorakulmainen geodeettinen kuusikulmio G, \mathcal{G} tämän kuusikulmion kuvan rajaama alue ja \mathcal{G} . Jos $G^- := (\gamma_i^-)_{i=1}^6$ on sama kuusikulmio käänteisellä suunnistuksella, on olemassa relaatio \sim , joka tekee samaistuksen

$$\gamma_i(t) = \gamma_i^-(t),$$

missä $t \in \text{Domain } \gamma_i$ ja $i \in \{1, 3, 5\}$. Pisteillä $\gamma_i(t), t \notin \partial \text{Domain } \gamma_i$, on olemassa ympäristö, joka on isometrinen avaruuden

$$\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z \geq 0\}$$

osajoukon kanssa ja $\gamma_i(t)$ vastaa jotain pistettä joukossa $i\mathbb{R}_+$. Lähtöjoukko $\text{Domain } \gamma_i$ voi olla jokin kolmesta vaihtoehdosta $[-\epsilon, \epsilon], (-\infty, \epsilon], [-\epsilon, \infty)$. Nyt päätepisteillä $\gamma_i(t), t \in$

3 Hyperboliset pinnat

$\{-\epsilon, \epsilon\}$ on ympäristö, joka on isometrinen avaruuden

$$H := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\} \setminus \{z \in \mathbb{H} \mid \|z\| < 1\}$$

osajoukon kanssa ja $\gamma_i(-\epsilon)$ tai $\gamma_i(\epsilon)$ vastaa pistettä $(0, 1) \in \mathbb{H}$.

Joukko H on inversion $z \mapsto -1/\bar{z}$ kautta isometrinen joukon

$$\{z \in \mathbb{H} \mid \|z\| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

kanssa. Täten liimaus \sim antaa pisteelle $\gamma_i(t)$, missä $t \in \{-\epsilon, \epsilon\}, i \in \{2, 4, 6\}$, ympäristön, joka on isometrinen avaruuden \mathbb{H}_+ reunan $i\mathbb{R}_+$ ympäristön kanssa. Täten jokaisella pisteellä $\gamma_i(t), t \in \operatorname{Domain} \gamma_i, i \in \{2, 4, 6\}$ on ympäristö, joka on isometrinen avaruuden \mathbb{H}_+ reunan $i\mathbb{R}_+$ ympäristön kanssa ja täten $\gamma_i \cup \gamma_i^- \subset \mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}/\sim, i \in \{2, 4, 6\}$, on geodeesi. Lisäksi $\gamma_i \cup \gamma_i^-$ on diffeomorfinen avaruuden \mathbb{S}^1 kanssa. Saadaan siis, että $\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}/\sim$ on reunallinen hyperbolinen pinta, jonka reunan komponenttien pituudet ovat $2\ell(\gamma_i), i \in \{2, 4, 6\}$.

Olkoon $k = \#\{\ell(\gamma_i), i \in \{2, 4, 6\}, \ell(\gamma_i) = 0\}$ ja $m = \#\{\ell(\gamma_i), i \in \{2, 4, 6\}, \ell(\gamma_i) > 0\}$. Koska $\mathcal{G} \subset \overline{\mathbb{H}}$ diffeomorfinen kiekkoon, josta on poistettu k pistettä ja m diffeomorfasta puolikiikkaa, liimauksella \sim saatu avaruus on diffeomorfinen pallopintaan \mathbb{S}^2 , josta on poistettu k pistettä ja m diffeomorfasta kiekkoa. Nyt $\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}/\sim$ on Y -pala, jonka reunan komponenttien pituudet ovat $2\ell(\gamma_i), i \in \{2, 4, 6\}$.

Lopulta voidaan todistaa itse tulos.

Olkoon Y on Y -pala, jonka signature on $(0, m, k)$ ja, jonka reunan pituudet ovat $l_2, l_4, l_6 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. On olemassa G , jolla $\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}/\sim$ on diffeomorfinen Y -palaan, jolla on samat reunan pituudet kuin Y -palalla Y . Täten lemmän 3.2.16 perusteella

$$\mathcal{G} \sqcup \mathcal{G}/\sim \approx_{\text{isom}} Y.$$

□

Nyt lemmasta 3.2.27 seuraa välittömästi seuraava korollaari.

Korollaari 3.2.30. *Reunallisen Y -palan pinta-ala on 2π .*

4 Kaulukset

Osion lähteenä on käytetty kirjan [6] kappaletta 4 ja kirjan [5] kappaletta 3.

4.1 Kanoniset kaulukset

Tässä osiossa määritellään kanoniset rajoitetut sylinterit Y -paloille. Nämä ovat olennainen osa Delingen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseen todistusta.

Määritellään ensin vihjailevasti nimetty funktio ja tutkitaan sen ominaisuuksia.

Määritelmä 4.1.1 (Kaulusfunktio). *Funktiota $\eta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, joka on määritelty kaavalla*

$$\eta(l) := \operatorname{arccoth} \left(\cosh \left(\frac{l}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh(l/2) + 1}{\cosh(l/2) - 1},$$

missä $l \in (0, \infty)$, kutsutaan **kaulusfunktioiksi**.

Määritelmä 4.1.2. *Olkoon $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisoitu geodeesin osa ja $\gamma_-, \gamma_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisoituja geodeeseja, jotka kohtaavat geodeesin γ ortogonaalisesti pisteissä $\gamma(-\epsilon)$ ja $\gamma(\epsilon)$. Tällöin sanotaan, että pisteet $\gamma_-(\infty)$ ja $\gamma_+(-\infty)$ ovat geodeesin γ päätepisteen $\gamma(-\epsilon)$ projektioita äärettömyyteen ja $\gamma_+(\infty)$ ja $\gamma_+(-\infty)$ ovat geodeesin γ päätepisteen $\gamma(\epsilon)$ projektioita äärettömyyteen. Jos $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ on parametrisoidun geodeesin osan γ sisältävä parametrisoitu geodeesi ja kaksi projektioiden joukon $\{\gamma_+(\infty), \gamma_+(-\infty), \gamma_-(\infty), \gamma_-(-\infty)\}$ jäsentä kuuluvat samaan komponenttiin joukkoa $\mathbb{H} \setminus \bar{\gamma}(\mathbb{R})$, näiden projektioiden sanotaan olevan samalla puolella geodeesia γ .*

Projektiot äärettömyyteen on hahmoteltu kuvassa 4.1.

Lemma 4.1.3. *Olkoon γ parametrisoimaton geodeesi $i\mathbb{R}_+$ ja γ' parametrisoimaton geodeesi, joka on puoliympyrä, jonka keskipiste on $1 \in \mathbb{R}$ ja säde r sellainen, että $r < 1$. Tällöin etäisyyden $d(\gamma, \gamma')$ antaa parametrisoimattoman geodeesin*

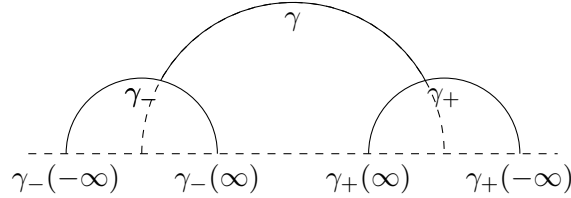
$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid z = e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi) \right\}$$

osa geodeesin γ ja γ' välillä.

Todistus. Oletetaan ensin, että γ on parametrisoimaton geodeesi

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid z = e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi) \right\}$$

4 Kaulukset



Kuva 4.1: Hahmotelma geodeesin γ päätepisteiden projektioista äärettömyyteen.

ja γ' parametrisoimatonta geodeesia, joka on nollakeskeinen puoliympyrä

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid z = ae^{i\theta}, \theta \in (0, \pi) \right\},$$

missä $a < 1$. Tällöin, koska parametrisoimatonta geodeesia $i\mathbb{R}_+$ kohtaa geodeesit γ ja γ' ortogonaalisesti, lemmän 2.2.11 perusteella etäisyyden $d(\gamma, \gamma')$ antaa parametrisoimatonta geodeesin $i\mathbb{R}_+$ osa. Olkoon isometria $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ määritelty kaavalla

$$z \mapsto -\frac{z-1}{z+1}.$$

Tällöin $f(1) = 0, f(-1) = \infty$ ja $f(i) = i$, eli $f(\gamma) = i\mathbb{R}_+$. Lisäksi $f(0) = 1$, eli parametrisoimatonta geodeesia γ' kuvautuu puoliympyrälle, jonka keskipiste on 1. Nyt, jos $\tau \in \mathbb{R}_+$,

$$f(\tau i) = -\frac{\tau i - 1}{\tau i + 1} = -\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + 1}^2}(\tau i - 1)(-\tau i - 1) = \frac{-\tau^2 - 2\tau i + 1}{\tau^2 + 1}.$$

Täten

$$\|f(\tau i)\| = \frac{\sqrt{(1 - \tau^2)^2 + (2\tau)^2}}{\tau^2 + 1} = \frac{\tau^2 + 1}{\tau^2 + 1} = 1$$

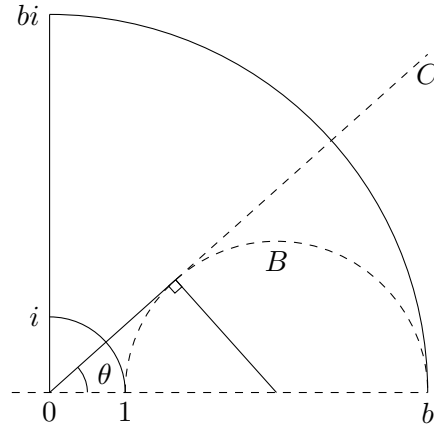
ja, koska $f(\infty) = -1$, geodeesin $i\mathbb{R}_+$ kuva $f(i\mathbb{R}_+)$ on puoliympyrä

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid z = e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi) \right\}.$$

Tämä todistaa tuloksen. □

Lemma 4.1.4. *Olkoon $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisoitu geodeesin osa, jonka pituus on l , missä $l > 0$, pisteet p_1 ja p_2 sen samalla puolella olevia päätepisteiden projektioita ääret-*

4 Kaulukset



Kuva 4.2: Kuva, joka hahmottaa lemmän 4.1.4 todistusta.

tömyyteen $\mathbb{R} \cup \infty$. Jos Γ' on parametrisoimaton geodeesi, jonka pisteet äärettömydessä ovat p_1 ja p_2 , niin $\eta(l) = d(\Gamma', \gamma([- \epsilon, \epsilon]))$.

Todistus. Siirrytään konjugaatiolla prototyyppilliseen tapaukseen, jossa γ parametrisoi parametrisoimattoman geodeesin $i\mathbb{R}_+$ osaa pisteiden $a_1 = i$ ja $a_2 = e^l i$ välillä. Nyt keskipiste $\gamma(0)$ hyperbolisen etäisyyden suhteen on piste $e^{l/2} i$. Parametrisoimaton geodeesi pisteiden a_1 ja a_2 projektioiden äärettömyyteen 1 ja e^l välillä on puoliympyrä $B := \{(e^l - 1) + e^{i\phi} \mid \phi \in (0, \pi)\}$. Nyt venyttämällä geodeeseja lemmassa 4.1.3 kuvauksella $z \mapsto e^{l/2} z$ saadaan, että parametrisoimattomien geodeesien $i\mathbb{R}_+$ ja B välisen etäisyyden $d(i\mathbb{R}_+, B)$ antaa parametrisoimattoman geodeesin

$$\{z \in \mathbb{H} \mid z = e^{l/2} e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi)\}$$

osan. Täten on olemassa sellainen piste $e^{l/2} e^{i\theta}$, missä $\theta \in (0, \pi/2)$, että $d(i\mathbb{R}_+, B) = d(e^{l/2} i, e^{l/2} e^{i\theta})$. Tulosta varten halutaan osoittaa, että $\eta(l) = d(e^{l/2} i, e^{l/2} e^{i\theta})$.

Nyt lemmän 2.1.2 perusteella

$$\begin{aligned} \tanh \frac{1}{2} d(e^{l/2} i, e^{l/2} e^{i\theta}) &= \left\| \frac{e^{l/2} e^{i\theta} - e^{l/2} i}{e^{l/2} e^{i\theta} + e^{l/2} i} \right\|_{\text{eucl}} = \left\| \frac{e^{i\theta} - i}{e^{i\theta} + i} \right\|_{\text{eucl}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \theta + (\sin \theta - 1)^2}{\cos^2 \theta + (\sin \theta + 1)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}. \end{aligned}$$

Merkitään $b := e^l$. Suora $C := \{r e^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}_+\}$ on tangentti puoliympyrälle B . Täten voidaan muodostaa kolmio, jonka kulmapisteitä ovat 0, puoliympyrän B keskipiste $e^{l/2}$ ja puoliympyrän B ja suoran C leikkauspiste. Nyt $\sin \theta$ saadaan suhteenä pisteessä 0 olevaa kulmaa vastakkaisen sivun pituudesta ja sen viereisen reaaliakselilla sijaitsevan sivun pituudesta, kuten hahmoteltu kuvassa 4.2. Puoliympyrän B säde on $(b - 1)/2$ ja

4 Kaulukset

sen keskipiste sijaitsee pisteessä $1 + (b - 1)/2 = (b + 1)/2$. Täten

$$\sin \theta = \frac{\frac{b-1}{2}}{\frac{b+1}{2}} = \frac{b-1}{b+1}$$

ja siis

$$\tanh \frac{1}{2} d(e^{l/2}i, e^{l/2}e^{i\theta}) = \sqrt{\frac{1 - \frac{b-1}{b+1}}{1 + \frac{b-1}{b+1}}} = \sqrt{\frac{1}{b}}.$$

Koska

$$\operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{x} \right) = \operatorname{arccoth} (x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right),$$

kun $|x| > 1$, saadaan

$$\begin{aligned} d(e^{l/2}i, e^{l/2}e^{i\theta}) &= \frac{2}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sqrt{b}+1)^2}{(\sqrt{b}-1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b+2\sqrt{b}+1}{b-2\sqrt{b}+1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{b+1}{2\sqrt{b}}+1}{\frac{b+1}{2\sqrt{b}}-1} \right). \end{aligned}$$

Koska

$$\frac{b+1}{2\sqrt{b}} = \frac{e^l+1}{2e^{l/2}} = \cosh \left(\frac{l}{2} \right),$$

saadaan

$$d(e^{l/2}i, e^{l/2}e^{i\theta}) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cosh \left(\frac{l}{2} \right) + 1}{\cosh \left(\frac{l}{2} \right) - 1} \right) = \operatorname{arccoth} \left(\cosh \left(\frac{l}{2} \right) \right) = \eta(l).$$

□

Määritellään kaulusfunktion avulla kanoniset kaulukset.

Määritelmä 4.1.5 (Kanoninen hyperbolinen kaulus). *Rajoitettua hyperbolista sylinteriä $C(l, \eta(l))$, $l > 0$, kutsutaan **kanoniseksi hyperboliseksi kaulukseksi geodeettisen reunan pituudella l .***

Määritelmä 4.1.6 (Kanoninen parabolinen kaulus). *Rajoitettua parabolista sylinteriä*

$$C_\infty \left(\frac{1}{2} \right) = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2} \right\} / \langle P \rangle,$$

*jonka reunan pituus on $2 \operatorname{arcsinh}(1)$ kutsutaan **kanoniseksi paraboliseksi kaulukseksi.***

4.2 Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause

4.2.1 Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause kanonisille kauluksille

Tässä osiossa todistetaan versio Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseesta kanonisille kauluksille. Tämä on ensimmäinen askel lopullisen Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseen todistamiseen.

Lemma 4.2.1. *Olkoot $a, b, c, d, a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ja $\sigma, \sigma_n \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}), n \in \mathbb{N}$, määritelty kaavalla*

$$\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $z \in \mathbb{H}$, ja

$$\sigma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n},$$

missä $z \in \mathbb{H}$.

Jos $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c$ ja $d_n \rightarrow d$, niin

$$\sigma_n \rightarrow \sigma$$

avaruuden $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ C^∞ -topologiassa.

Todistus. Ensinnäkin, koska $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c$ ja $d_n \rightarrow d$, kun $n \rightarrow \infty$, niin $\sigma_n \rightarrow \sigma$ pisteittäin, kun $n \rightarrow \infty$. Koska kompaktissa joukossa kuvausten σ_n ja σ arvot ovat rajoitettuja, tämä suppeneminen tapahtuu lokaalisti tasaisesti.

Huomataan, että kuvausten $\sigma, \sigma_n, n \in \mathbb{N}$, derivaatoille pätee

$$D(\sigma_n) = \frac{a_n d_n - b_n c_n}{(c_n z + d_n)^2} = \frac{1}{(c_n z + d_n)^2} \quad \text{ja} \quad D(\sigma) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Täten kaikilla $k \geq 1$

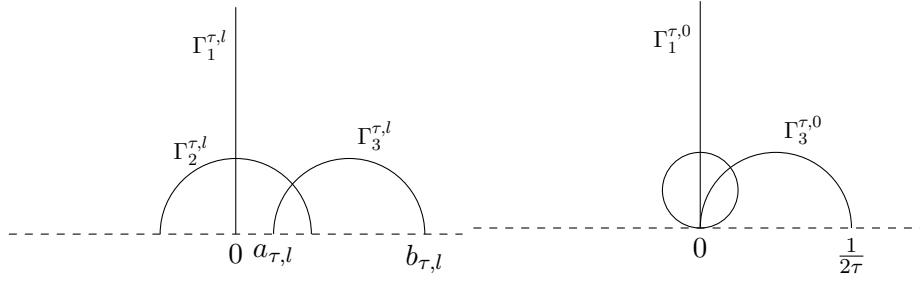
$$D^k(\sigma_n) = \frac{(-1)^{k-1} k! c_n^{k-1}}{(c_n z + d_n)^{k+1}} \quad \text{ja} \quad D^k(\sigma) = \frac{(-1)^{k-1} k! c^{k-1}}{(cz + d)^{k+1}}.$$

Erityisesti siis kaikilla $z \in \mathbb{H}$ hyperbolisen puolitason normissa $\|\cdot\|$ pätee

$$\begin{aligned} \|D^k(\sigma_n)(z) - D^k(\sigma)(z)\| &= \left\| \frac{(-1)^{k-1} k! c_n^{k-1}}{(c_n z + d_n)^{k+1}} - \frac{(-1)^{k-1} k! c^{k-1}}{(cz + d)^{k+1}} \right\| \\ &= k! \left\| \frac{c_n^{k-1} (cz + d)^{k+1} - c^{k-1} (c_n z + d_n)^{k+1}}{(c_n z + d_n)^{k+1} (cz + d)^{k+1}} \right\| \\ &= k! \frac{\|c_n^{k-1} (cz + d)^{k+1} - c^{k-1} (c_n z + d_n)^{k+1}\|}{\|(c_n z + d_n)^{k+1} (cz + d)^{k+1}\|}. \end{aligned}$$

Kun $n \rightarrow \infty$. Kun $z \in K$ jollain kompaktilla osajoukolla $K \subset \mathbb{H}$, niin $z \notin \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja

4 Kaulukset



Kuva 4.3: Hahmotelmat tulevien todistusten tilanteesta.

täten

$$cz + d \neq 0 \quad \text{ja} \quad c_n z + d_n \neq 0$$

kaikilla $z \in K$. Koska $c_n \rightarrow c$ ja $d_n \rightarrow d$, kun $n \rightarrow \infty$, niin

$$c_n^{k-1}(cz + d)^{k+1} \rightarrow c^{k-1}(c_n z + d_n)^{k+1},$$

kun $n \rightarrow \infty$. Täten

$$\|c_n^{k-1}(cz + d)^{k+1} - c^{k-1}(c_n z + d_n)^{k+1}\| < \epsilon,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Lisäksi

$$(c_n z + d_n)^{k+1} \rightarrow (cz + d)^{k+1}$$

kun $n \rightarrow \infty$, ja kumpikaan termeistä ei voi olla nolla, kun $z \in K$. Täten

$$\|(c_n z + d_n)^{k+1}(cz + d)^{k+1}\| > \|(cz + d)^{2(k+1)}\| - \epsilon.$$

Tällöin

$$k! \frac{\|c_n^{k-1}(cz + d)^{k+1} - c^{k-1}(c_n z + d_n)^{k+1}\|}{\|(c_n z + d_n)^{k+1}(cz + d)^{k+1}\|} < k! \frac{\epsilon}{\|(cz + d)^{2(k+1)}\| - \epsilon} \rightarrow 0.$$

Täten $\sigma_n \rightarrow \sigma$ C^∞ -topologiassa. □

Määritelmä 4.2.2 (Ryhmän $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ topologia). *Ryhmän $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ topologia on sen C^∞ -topologia.*

Kanoniset kaulukset voidaan nostaa peiteavaruuteen \mathbb{H} . Aloitetaan todistamalla suppenemistulos nämä nostot koostaville geodeeseille.

Olkoon $l > 0$ ja $\phi_l : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ Möbius kuvaus, joka on määritelty kaavalla

$$z \mapsto e^{-\eta(l)} \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Olkoot $\tau \in \mathbb{R}$ ja $\Gamma_1^{\tau,l}, \Gamma_2^{\tau,l}, \Gamma_3^{\tau,l}$ kuvia kuvauksen ϕ_l alla parametrisoimattomista geodee-

4 Kaulukset

seista

$$\{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}, \quad i\mathbb{R}_+ \quad \text{ja} \quad \{e^{\tau l} e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}.$$

Tällöin

$$\Gamma_1^{\tau, l} = i\mathbb{R}_+ \quad \text{ja} \quad \Gamma_2^{\tau, l} = \{e^{-\eta(l)} e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}.$$

Parametrisoimattoman geodeesin $\Gamma_3^{\tau, l}$ pisteet äärettömydessä ovat

$$a_{\tau, l} := \frac{1}{e^{\eta(l)}} \frac{e^{\tau l} - 1}{e^{\tau l} + 1}$$

ja

$$b_{\tau, l} := \frac{1}{e^{\eta(l)}} \frac{-e^{\tau l} - 1}{-e^{\tau l} + 1}.$$

Tilanne on hahmoteltu kuvassa 4.3.

Olkoon $\gamma_1^{\tau, l}$ sellainen pituudensa mukainen parametrisaatio geodeesin $\Gamma_1^{\tau, l}$ osalle, että

$$\gamma_1^{\tau, l}(0) = i, \quad \gamma_1^{\tau, l}(\eta(l)) = e^{-\eta(l)} i \quad \text{ja} \quad \ell(\gamma_1^{\tau, l}) = \eta(l).$$

Olkoon $\gamma_2^{\tau, l}$ sellainen pituudensa mukainen parametrisaatio geodeesin $\Gamma_2^{\tau, l}$ osalle, että

$$\gamma_1^{\tau, l}(\eta(l)) = \gamma_2^{\tau, l}(0), \quad \text{ja} \quad \ell(\gamma_2^{\tau, l}) = \tau l$$

ja pisteen $\gamma_2^{\tau, l}(0)$ ja $\gamma_2^{\tau, l}(\tau l)$ suunnattu etäisyys on τl . Olkoon $\gamma_3^{\tau, l}$ sellainen pituudensa mukainen parametrisaatio geodeesin $\Gamma_3^{\tau, l}$ osalle, että

$$\gamma_3^{\tau, l}(\eta(l)) = \gamma_2^{\tau, l}(\tau l), \quad \ell(\gamma_3^{\tau, l}) = \eta(l) \quad \text{ja} \quad \|\gamma_3^{\tau, l}(\eta(l))\| < \|\gamma_3^{\tau, l}(0)\|.$$

Olkoon lisäksi $\sigma^{\tau, l}$ Möbius-kuvaus, jolle pätee

$$\sigma^{\tau, l}(\gamma_3^{\tau, l}) = \gamma_1^{\tau, l}.$$

Sanotaan, että yksi arkki kanonisen hyperbolisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ nostosta peitteeseen (\mathbb{H}, p) on joukko $U \subset \mathbb{H}$, jolla $p(U)$ on homeomorfismi. Koska $T_l, l > 0$, samaistaa geodeesit

$$\{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\} \quad \text{ja} \quad \{e^l e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}$$

ja kanonisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ geodeettisen reunan määrää geodeesi $i\mathbb{R}_+$, parametrisoimattomat geodeesit

$$\{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}, \quad i\mathbb{R}_+ \quad \text{ja} \quad \{e^l e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}.$$

rajaavat sisäänsä alueen, joka sisältää lemmän 4.1.4 perusteella noston kanonisesta hyperbolisesta kauluksesta $C(l, \eta(l))$. Rajaamalla geodeesit

$$\{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\} \quad \text{ja} \quad \{e^l e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi)\}$$

4 Kaulukset

geodeesilla $i\mathbb{R}_+$ ja rajaamalla niiden pituudet pituuden mukaisessa parametrissaatiassa olemaan $\eta(l)$, saadaan kolme sivua kanonisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ noston yhden arkin reunasta. Siirtämällä näitä geodeeseja kuvauksella ϕ saadaan parametrisoitujen geodeesien $\gamma_1^{1,l}, \gamma_2^{1,l}$ ja $\gamma_3^{1,l}$ kuvajoukot. Täten myös nämä kolme geodeesia ovat kolme sivua kanonisen hyperbolisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ noston yhden arkin reunasta. Tilanne on hahmoteltu kuvan 4.3 vasemmanpuoleisessa osassa.

Olkoon ϕ' Möbius kuvaus, joka on määritelty kaavalla

$$z \mapsto -\frac{1}{2z},$$

ja olkoot

$$\Gamma_1^{\tau,0} := \phi'(i\mathbb{R}_+) = i\mathbb{R}_+ \quad \text{ja} \quad \Gamma_3^{\tau,0} := \phi'(i\mathbb{R}_+ - \tau).$$

Olkoon $\gamma_1^{\tau,0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisoitu geodeesi, joka parametrizoi parametrisoimattoman geodeesin $\Gamma_1^{\tau,0}$ siten, että $\gamma_1^{\tau,0}(0) = i, \gamma_1^{\tau,0}(\infty) = 0$, ja $\gamma_3^{\tau,0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisoitu geodeesi, joka parametrizoi parametrisoimattoman geodeesin $\Gamma_3^{\tau,0}$ siten, että $\gamma_3^{\tau,0}(0) = \phi'((1/2)i - \tau), \gamma_3^{\tau,0}(\infty) = 0$.

Määritellään kanonisen parabolisen kauluksen $C_\infty(1/2)$ noston yksi arkki samoin kuin kanonisen hyperbolisen kauluksen tapauksessa. Tällöin geodeesit

$$i\mathbb{R}_+, \mathbb{R} + (1/2)i \text{ ja } i\mathbb{R}_+ - 1$$

rajaavat sisäänsä alueen, joka on yksi arkki kanonisen parabolisen kauluksen $C_\infty(1/2)$ nostosta. Täten geodeesit $\gamma_1^{1,0}$ ja $\gamma_3^{1,0}$ ovat kaksi sivua kanonisen parabolisen kauluksen noston yhden arkin reunassa.

Kanonisen parabolisen kauluksen $C_\infty(1/2)$ noston reunan kolmas sivu on kuva parametrisoimattomasta horosyklisestä $\mathbb{R} + (1/2)i$ kuvauksen ϕ' alla rajattuna geodeesien $\Gamma_1^{1,0}$ ja $\Gamma_3^{1,0}$ välillä. Täten se on osa geodeesista

$$\Gamma_2^{\tau,0} = \left\{ \frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}i \mid \theta \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right) \right\},$$

sillä $\phi(\infty) = 0$ ja $\phi((1/2)i) = i$. Tilanne on hahmoteltu kuvan 4.3 oikeanpuoleisessa osassa.

Olkoon lisäksi $\sigma^{\tau,0}$ kuvaus, jolle pätee

$$\sigma^{\tau,0}(\gamma_3^{\tau,0}) = \gamma_1^{\tau,0}.$$

Lemma 4.2.3. *Kaikilla $z \in \mathbb{H}$ pätee*

$$\sigma^{\tau,0}(z) = -\frac{1}{2\tau} \frac{z}{z - \frac{1}{2\tau}}.$$

4 Kaulukset

Todistus. Olkoon $\psi \in \text{Isom}^+ \mathbb{H}$ määritelty kaavalla

$$z \mapsto -\frac{1}{2\tau} \frac{z}{z - \frac{1}{2\tau}}$$

Isometria $\psi \circ \phi'$ on määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{\left(-\frac{1}{2\tau}\right) \left(-\frac{1}{2z}\right)}{-\frac{1}{2z} - \frac{1}{2\tau}}.$$

Täten

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi'(-\tau) &= \frac{\left(-\frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{1}{2\tau}\right)}{\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau}} = \infty, \\ \psi \circ \phi'(\infty) &= \frac{\left(-\frac{1}{2\tau}\right) \cdot 0}{0 - \frac{1}{2\tau}} = 0 \end{aligned}$$

ja

$$\psi \circ \phi'((1/2)i - \tau) = \frac{\left(-\frac{1}{2\tau}\right) \left(-\frac{1}{2((1/2)i - \tau)}\right)}{-\frac{1}{2((1/2)i - \tau)} - \frac{1}{2\tau}} = \frac{\frac{1}{2\tau(i-2\tau)}}{-\frac{i-2\tau+2\tau}{2\tau(i-2\tau)}} = -\frac{1}{i} = i.$$

Täten $\psi(\gamma_3^{\tau,0}) = \gamma_1^{\tau,0}$ ja isometrian $\sigma^{\tau,0}$ määritelmän perusteella $\sigma^{\tau,0} = \psi$. \square

Lemma 4.2.4. *Olkoon*

$$a_{\tau,l} := \frac{1}{e^{\eta(l)}} \frac{e^{\tau l} - 1}{e^{\tau l} + 1}$$

ja

$$b_{\tau,l} := \frac{1}{e^{\eta(l)}} \frac{-e^{\tau l} - 1}{-e^{\tau l} + 1}.$$

Tällöin

$$\lim_{l \rightarrow 0} a_{\tau,l} = 0$$

ja

$$\lim_{l \rightarrow 0} b_{\tau,l} = \frac{1}{2\tau}.$$

Todistus. Ensinnäkin

$$e^{\eta(l)} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\cosh(l/2) + 1}{\cosh(l/2) - 1}\right)\right) = \sqrt{\frac{\cosh(l/2) + 1}{\cosh(l/2) - 1}}.$$

Nyt termeille pätee

$$2 = \lim_{l \rightarrow 0} (\cosh(l/2) + 1) = \lim_{l \rightarrow 0} (e^{\tau l} + 1) = -\lim_{l \rightarrow 0} (-e^{\tau l} - 1)$$

4 Kaulukset

ja

$$0 = \lim_{l \rightarrow 0} (\cosh(l/2) - 1) = \lim_{l \rightarrow 0} (e^{\tau l} - 1) = \lim_{l \rightarrow 0} (-e^{\tau l} + 1).$$

Täten

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} a_{\tau, l} &= \lim_{l \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{\cosh(l/2) - 1}{\cosh(l/2) + 1}} \cdot \frac{e^{\tau l} - 1}{e^{\tau l} + 1} \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \sqrt{\cosh(l/2) - 1} (e^{\tau l} - 1) \cdot \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\cosh(l/2) + 1} (e^{\tau l} + 1)} = 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

ja

$$\lim_{l \rightarrow 0} b_{\tau, l} = \lim_{l \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\cosh(l/2) - 1}{\cosh(l/2) + 1}} \cdot \frac{-e^{\tau l} - 1}{-e^{\tau l} + 1} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cosh(l/2) - 1}}{-e^{\tau l} + 1} \cdot \lim_{l \rightarrow 0} \frac{-e^{\tau l} - 1}{\sqrt{\cosh(l/2) + 1}}.$$

Koska $2 \sinh^2(x/2) = \cosh(x) - 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin saadaan

$$\frac{\sqrt{\cosh(l/2) - 1}}{-e^{\tau l} + 1} = \frac{\sqrt{2} \sinh(l/4)}{-e^{\tau l} + 1}$$

Käyttämällä L'Hôpitalin sääntöä saadaan

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sinh(l/4)}{-e^{\tau l} + 1} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cosh(l/4)}{-4\tau e^{\tau l}} = \frac{-\sqrt{2}}{4\tau}$$

ja siten

$$\lim_{l \rightarrow 0} b_{\tau, l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cosh(l/4)}{-4\tau e^{\tau l}} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{-e^{\tau l} - 1}{\sqrt{\cosh(l/2) + 1}} = \frac{-\sqrt{2}}{4\tau} \cdot \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\tau}.$$

□

Lemma 4.2.5. *Olkoot γ ja γ' parametrisoituja geodeeseja, jotka ovat kuvia isometrian $\sigma \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ alla parametrisoiduista geodeeseistä ξ, ξ' , joiden kuvajoukot ovat nollakeskeisiä puoliympyröitä ja $\xi(0), \xi'(0) \in i\mathbb{R}_+$. Jos $\sigma' \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on sellainen isometria, että $\sigma'(\gamma') = \gamma$, niin $\sigma' \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ on hyperbolinen ja kiinnittää parametrisoimattoman geodeesin $\sigma(i\mathbb{R}_+)$.*

Todistus. Yhdistetty kuvaus

$$\phi := \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma$$

on isometria, joka kuvaa parametrisoidun geodeesin ξ parametrisoidulle geodeesille ξ' . Koska geodeesien ξ ja ξ' kuvajoukot ovat nollakeskeisiä puoliympyröitä ja $\xi(0), \xi'(0) \in i\mathbb{R}_+$, ϕ on prototyyppillinen hyperbolinen isometria T_l , missä $l > 0$. Täten σ' on konjugatti prototyyppilliseen hyperboliseen isometriaan, eli se on itsekin hyperbolinen. Lisäksi ϕ kiinnittää prototyyppillisenä hyperbolisena isometriaana parametrisoimattoman geodeesin $i\mathbb{R}_+$, eli σ' kiinnittää parametrisoimattoman geodeesin $\sigma(i\mathbb{R}_+)$. □

4 Kaulukset

Korollari 4.2.6. *Möbius-kuvaus $\sigma^{\tau,l}$, missä $l > 0$, on hyperbolinen.*

Todistus. Olkoon ϕ määritelty kaavalla

$$z \mapsto e^{-\eta(l)} \frac{z-1}{z+1}.$$

Määritelmällisesti parametrisoimattomat geodeesit $\Gamma_1^{\tau,l}$ ja $\Gamma_3^{\tau,l}$ ovat kuvia isometrian ϕ alla parametrisoimattomista geodeeseistä, jotka ovat nollakeskeisiä puoliympyröitä. Lisäksi määritelmän perusteella $\phi^{-1}(\gamma_1^{\tau,l}(\eta(l)))$, $\phi^{-1}(\gamma_3^{\tau,l}(\eta(l))) \in i\mathbb{R}_+$ ja $\sigma^{\tau,l}(\gamma_3^{\tau,l}(\eta(l))) = \gamma_1^{\tau,l}(\eta(l))$. Tilanne on lemmän 4.2.5 tapaus ja täten tulos pätee. \square

Lemma 4.2.7. *Olkoot $\tau \in \mathbb{R}$ ja $l > 0$ sekä $\hat{\sigma}^{\tau,l} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ Möbius kuvaus, joka on määritelty kaavalla*

$$z \mapsto \frac{z - a_{\tau,l}}{z - b_{\tau,l}}.$$

Tällöin on olemassa sellainen $d_{\tau,l} \in \mathbb{R}_+$, että

$$d_{\tau,l} \hat{\sigma}^{\tau,l} = \sigma^{\tau,l},$$

ja

$$d_{\tau,l} \rightarrow -\frac{1}{2\tau}$$

kun $l \rightarrow 0$.

Todistus. Koska $\hat{\sigma}^{\tau,l}(\Gamma_3^{\tau,l}) = i\mathbb{R}_+$ ja $\sigma^{\tau,l}(\Gamma_3^{\tau,l}) = i\mathbb{R}_+$, isometriat eroavat toisistaan venytyksellä $T_{\lambda_{\tau,l}}$, $\lambda_{\tau,l} \in \mathbb{R}_+$, eli jokaisella $l > 0$ on olemassa sellainen $d_{\tau,l} \in \mathbb{R}_+$, että

$$d_{\tau,l} \hat{\sigma}^{\tau,l} = \sigma^{\tau,l}.$$

Lemman 4.2.6 perusteella $d_{\tau,l} \hat{\sigma}^{\tau,l}$ on täten hyperbolinen ja konjugaatti isometriaan $T_{\kappa_{\tau,l}}$ jollain $\kappa_{\tau,l} \in \mathbb{R}_+$.

Huomataan, että, jos

$$A_{\tau,l} = \frac{1}{\sqrt{d_{\tau,l}(a_{\tau,l} - b_{\tau,l})}} \begin{bmatrix} d_{\tau,l} & -d_{\tau,l}a_{\tau,l} \\ 1 & -b_{\tau,l} \end{bmatrix},$$

niin $\det A_{\tau,l} = 1$ ja täten

$$\mathcal{M}^{-1}(d_{\tau,l} \hat{\sigma}^{\tau,l}) = A_{\tau,l}$$

Nyt

$$|\operatorname{tr}|(A_{\tau,l}) = \left| \frac{1}{\sqrt{d_{\tau,l}(a_{\tau,l} - b_{\tau,l})}} (d_{\tau,l} - b_{\tau,l}) \right|.$$

Koska jälki ei muutu konjugoinnissa ja $d_{\tau,l} \hat{\sigma}^{\tau,l}$ on hyperbolinen ja konjugaatti isometri-

4 Kaulukset

aan $T_{\kappa_{\tau,l}}$, matriisin $A_{\tau,l}$ jäljen täytyy olla yhtäsuurta arvon

$$|\operatorname{Tr} T_{\kappa_{\tau,l}}| = \frac{e^{\kappa_{\tau,l}} + 1}{e^{(\kappa_{\tau,l})/2}}$$

kanssa. Kun $l \rightarrow 0$

$$\lim_{l \rightarrow 0} |\operatorname{tr} (A_{\tau,l})| = \left| \frac{1}{\sqrt{d_{\tau,0} \left(-\frac{1}{2\tau}\right)}} \left(d_{\tau,0} - \frac{1}{2\tau} \right) \right|$$

ja

$$\lim_{l \rightarrow 0} |\operatorname{Tr} T_{\kappa_{\tau,l}}| = 2.$$

Jotta yhtäsuuruus pätee täytyy olla $d_{\tau,0} = -(1/(2\tau))$ sillä

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2\tau}\right) \left(-\frac{1}{2\tau}\right)}} \left(-\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau} \right) \right| = 2.$$

Täten $d_{\tau,0} = \lim_{l \rightarrow 0} d_{\tau,l} = -(1/(2\tau))$ kaikilla $\tau \in (-\infty, \infty)$. □

Lemmoista 4.2.3, 4.2.4 ja 4.2.7 seuraa korollaari.

Korollaari 4.2.8. C^∞ -topologian mielessä

$$\sigma^{\tau,l} \rightarrow \sigma^{\tau,0},$$

kun $l \rightarrow 0$.

Lemma 4.2.9. Kun $l \rightarrow 0$, parametrisoidun geodeesin osan $\gamma_3^{\tau,l}$ parametrisaatio suppee C^∞ -topologian mielessä kohti parametrisoidun geodeesin osan $\gamma_3^{\tau,0}$ parametrisaatiota.

Todistus. Ensinnäkin määritelmien perusteella $\gamma_1^{\tau,l} = \gamma_1^{\tau,0}$ ja $(\sigma^{\tau,0})^{-1}(\gamma_1^{\tau,0}) = \gamma_3^{\tau,0}$ ja $(\sigma^{\tau,l})^{-1}(\gamma_1^{\tau,l}) = \gamma_3^{\tau,l}$. Täten, koska lemmän 4.2.8 perusteella $\sigma^{\tau,l} \rightarrow \sigma^{\tau,0}$ C^∞ -topologian mielessä, täytyy päteä $\gamma_3^{\tau,l} \rightarrow \gamma_3^{\tau,0}$ C^∞ -topologian mielessä. □

Todistetaan lopulta Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause kanonisille kauluksille. Aloitetaan määrittelemällä Fermin koordinaatit hyperbolisessa puolitasossa.

Määritelmä 4.2.10 (Fermin koordinaatit hyperbolisessa puolitasossa). Kuvausta $\Phi_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$

$$(t, s) \mapsto \exp_{c(t)}(s(ic'(t))),$$

missä $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ on pituudensa mukainen parametrisaatio geodeesille tai horoympyrälle, kutsutaan **Fermin koordinaateiksi geodeesin tai horoympyrän c suhteen**.

4 Kaulukset

Lemma 4.2.11. *Kuvaus Φ_c on diffeomorfismi.*

Fermin koordinaatit ovat semigeodeettisiä koordinaatteja kirjan [7] kappaleen 6 mielessä ja täten kaikilla $t_0 \in \mathbb{R}$ parametrisoitu geodeesi $s \mapsto \exp_{c(t_0)}(s(ic'(t_0)))$ on kohtisuorassa joukon

$$\{z \in \mathbb{H} \mid d(c(\mathbb{R}), z) = r\}$$

parametrisaatiolle kaikilla $r > 0$. Saadaan seuraava tulos.

Lemma 4.2.12. *Olkkoon $r \in \mathbb{R}_+$, $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisoitu geodeesi tai horoympyrä ja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ pituudensa mukaan parametrisoitu parametrisaatio etäisyysjoukon*

$$C := \{z \in \mathbb{H} \mid d(c(\mathbb{R}), z) = r\}.$$

komponentille. Tällöin kuvaus $c' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$

$$(t, s) \mapsto \exp_{\phi(t)}(s(i\phi'(t))),$$

on diffeomorfismi. Kuvausta c' kutsutaan Fermin koordinaateiksi etäisyysjoukon C komponentin suhteen.

Seuraava todistus seuraa vastaavaa todistusta kirjan [6] kappaleessa 4.

Lemma 4.2.13. *Olkkoon $(A_n, h_n)_{n=1}^\infty$ jono reunallisia pintoja, jotka ovat isometrisiä joko kanonisen hyperbolisen kauluksen $C(l_n, \eta(l_n))$ kanssa, joiden geodeesisten reunojen pituudet $l_n, n \in \mathbb{N}$, ovat rajoitettuja ylhäältä, tai kanonisten parabolisten kaulusten $C_\infty(1/2)$ kanssa. Tällöin on olemassa joko kanoninen hyperbolinen kaulus tai kanoninen parabolinen kaulus (A_∞, h_∞) , jonon $(A_n, h_n)_{n=1}^\infty$ osajono ja sellainen jono diffeomorfismeja $(\psi_n)_{n=1}^\infty$, $\psi_n : A_\infty \rightarrow A_n$, että metriikat $\psi_n^* h_n$ suppenevat C^∞ -topologiassa metriikkaan h_∞ .*

Todistus. Koska kanonisten hyperbolisten kaulusten $A_n, n \in \mathbb{N}$, geodeettisten reunojen pituudet l_n ovat rajoitettuja ylhäältä, on olemassa osajono, jossa nämä pituudet suppenevat kohti lukua $l_\infty \in [0, \infty)$. Merkitään tätä osajonoa samoilla indekseillä kuin alkuperäistä jonoa. Olkkoon A_∞ sylinteri, joka on isometrinen joko kanoniseen hyperbolisen kanonisen kauluksen $C(l_\infty, \eta(l_\infty))$ kanssa, kun $l_\infty > 0$, tai kanonisen parabolisen kauluksen $C_\infty(1/2)$ kanssa, kun $l_\infty = 0$.

Koska kanonisen hyperbolisen kauluksen $A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ geodeettinen reuna on geodeesi, on olemassa sellainen peite (\mathbb{H}, π_n) , että geodeettinen reuna nousee parametrisoimattomalle geodeesille

$$\Gamma_n := \left\{ e^{-\eta(l_n)} e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi) \right\} \quad (4.1)$$

ja vastaavasti, jos A_n on kanoninen parabolinen kaulus, sen reuna nousee parametrisoimattomalle horosyklille

$$\Gamma_n := \left\{ \frac{1}{2} e^{i\theta} + \frac{1}{2} i \mid \theta \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right) \right\}, \quad (4.2)$$

4 Kaulukset

joka kohtaa reaaliakselin pisteessä 0 ja imaginaariakselin $i\mathbb{R}_+$ pisteessä i .

Oletetaan ensin, että $l_\infty > 0$. Voidaan siirtyä osajonoon, jossa A_n on hyperbolinen jokaisella $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Koska $\eta(l_n) \rightarrow \eta(l_\infty)$, niin parametrisoimattomien geodeesien $\Gamma_n, n \in \mathbb{N}$ päätepisteet $e^{-\eta(l_n)}$ ja $-e^{-\eta(l_n)}$ suppenevat kohti parametrisoimattoman geodeesin Γ_∞ vastaavia päätepisteitä $e^{-\eta(l_\infty)}$ ja $-e^{-\eta(l_\infty)}$. Täten isometriat $\sigma_n, n \in \mathbb{N}$, jotka ovat määriteltyjä kaavoilla

$$z \mapsto \frac{z - e^{-\eta(l_n)}}{z + e^{-\eta(l_n)}}$$

suppenevat lemmän 4.2.1 perusteella C^∞ -topologian mielessä kohti isometriaa σ_∞ , joka on määritelty kaavalla

$$z \mapsto \frac{z - e^{-\eta(l_\infty)}}{z + e^{-\eta(l_\infty)}}$$

Olkoon $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ geodeesin $i\mathbb{R}_+$ parametrisaatio, jolla pätee $c(0) = i$. Tällöin saadaan, että $(\sigma_n)^{-1} \circ c \rightarrow (\sigma_\infty)^{-1} \circ c$ C^∞ -topologian mielessä.

Olkoon $\gamma_n := (\sigma_n)^{-1}(c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisaatio parametrisoimattomalle geodeesille Γ_n ja olkoon $\gamma_\infty := (\sigma_\infty)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisaatio parametrisoimattomalle geodeesille Γ_∞ . Tällöin on olemassa Fermin koordinaatit näiden parametrisoitujen geodeesien suhteen. Merkitään näitä $\xi_n, n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Koska äskeisen perusteella $\gamma_n \rightarrow \gamma_\infty$, niin saadaan että Fermin koordinaatit ξ_n suppenevat kohti Fermin koordinaatteja ξ_∞ C^∞ -topologian mielessä. Olkoon $L_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, joka kuvaa alueen $[0, l_\infty] \times [0, \eta(l_\infty)]$ alueelle $[0, l_n] \times [0, \eta(l_n)]$. Tällöin kuvaukset $\tilde{\psi}_n := \xi_n \circ L_n \circ \xi_\infty$ suppenevat C^∞ -topologian mielessä kohti identiteettikuvausta hyperbolisessa puolitasossa \mathbb{H} . Täten, jos μ on avaruuden \mathbb{H} Riemannin metriikka, $\tilde{\psi}_n^* \mu \rightarrow \mu$ C^∞ -topologian mielessä.

Joukot $\tilde{A}_n := (\xi_n)^{-1}([0, l_n] \times [0, \eta(l_n)]), n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ovat yhdet arkit kanoniselle hyperboliselle kaulukselle A_n peitekuvausten π_n alla. Kuvaukset $\tilde{\psi}_n$ kunnioittavat sylinterin A_∞ tekijärakennetta siinä mielessä, että kuvaus $\tilde{\psi}_n \circ (\pi_\infty|_{\tilde{A}_\infty})^{-1}$ on diffeomorfismi $A_\infty \rightarrow \tilde{A}_n$. Täten kuvaus $\psi_n := \pi_n \circ \tilde{\psi}_n \circ (\pi_\infty|_{\tilde{A}_\infty})^{-1}$ on diffeomorfismi $A_\infty \rightarrow A_n$. Äskeisen perusteella $\psi_n^* h_n \rightarrow h_\infty$ C^∞ -topologian mielessä.

Oletetaan seuraavaksi, että $l_\infty = 0$, eli A_∞ on isometrinen rajoitettuun paraboliseen sylinteriin $C_\infty(1/2)$. Jos ainoastaan äärellinen määrä kauluksista $A_n, n \in \mathbb{N}$, on hyperbolisia, voidaan valita osajono, jonka jokainen jäsen on isometrinen kanoniseen paraboliseen kaulukseen $C_\infty(1/2)$ ja voidaan valita kuvaukset $\psi_n : A_\infty \rightarrow A_n$ olemaan identiteettikuvauksia. Oletetaan siis, että ääretön määrä kauluksista A_n on hyperbolisia ja valitaan osajono, jonka kaikki jäsenet ovat hyperbolisia, eli $l_n > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olkoot Γ_n ja Γ_∞ kuten yhtälöissä 4.1 ja 4.2. Olkoon nyt $\tau \in \mathbb{R}$ ja $\gamma'_{\tau,n}$ sellainen parametrisoitu geodeesi, joka kohtaa parametrisoimattoman geodeesin Γ_n kohtisuorasti ja jolla pisteen $\gamma'_{\tau,n}(0)$ etäisyys geodeesista Γ_n on $\eta(l_n)$ ja pisteen $\gamma'_{\tau,n}(\eta(l_n))$ etäisyys geodeesista $i\mathbb{R}_+$ on τl_n . Olkoon lisäksi $\gamma'_{\tau,\infty}$ sellainen parametrisoitu geodeesi, että sen kuvajoukko on kuva geodeesista $i\mathbb{R}_+ - \tau$ kuvauksessa ϕ

$$z \mapsto -\frac{1}{2z}$$

4 Kaulukset

ja $\gamma'_{\tau,\infty}(0) = \phi((1/2)i - \tau)$. Tällöin on olemassa isometriat $\sigma_{\tau,n}, n \in \mathbb{N}$, jotka kuvaavat parametrisoidut geodeesit $\gamma'_{\tau,n}$ joukon $i\mathbb{R}_+$ parametrisaatiolle $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ siten, että $\gamma_0(0) = i$. Lisäksi on olemassa isometria $\sigma_{\tau,\infty}$, joka kuvaa parametrisoidun geodeesin $\gamma'_{\tau,\infty}$ parametrisoidulle geodeesille γ_0 . Lemman 4.2.9 perusteella $\sigma_{\tau,n} \rightarrow \sigma_{\tau,\infty}$ ja $\gamma'_{\tau,n} \rightarrow \gamma'_{\tau,\infty}$ C^∞ -topologian mielessä.

Olkkoon

$$\zeta_n(\tau) := \sigma_{\tau,n}^{-1}(i)$$

kaikilla $\tau \in \mathbb{R}$ ja

$$\zeta_\infty(\tau) := \sigma_{\tau,\infty}^{-1}(i)$$

kaikilla $\tau \in \mathbb{R}$. Aiemman perusteella $\zeta'_n \rightarrow \zeta'_\infty$ C^∞ -topologian mielessä. Yksinkertaisuuden vuoksi jätetään polut ζ_n ja ζ_∞ parametrisoimatta pituuksiensa mukaan.

Olkkoon $c_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisaatio parametrisoimattomalle geodeesille Γ_n , jolla $c_n(0) = e^{-\eta(l_n)}i$. Tällöin ottamalla Fermin koordinaatit χ_n geodeesin c_n suhteen, polun ζ_n kuvajoukko on $\chi_n(\mathbb{R} \times \{\eta(l_n)\})$. Erityisesti ζ_n parametrisoi etäisyysjoukon parametrisoimattomalle geodeesille Γ_n . Täten korollaarin 4.2.12 perusteella voidaan muodostaa Fermin koordinaatit $\bar{\xi}_n$ polun ζ_n pituuden mukaisen parametrisoinnin suhteen. Vastaavasti voidaan muodostaa Fermin koordinaatit alkuperäisen parametrisaation mukaan. Merkitään näitä polusta ζ_n saatuja Fermin koordinaatteja $\xi_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$.

Lisäksi huomataan, että $\zeta_\infty(\mathbb{R}) = \Gamma_\infty$. Täten voidaan vastaavasti muodostaa Fermin koordinaatit $\xi_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$ parametrisoidun horosyklin ζ_∞ suhteen. Huomaa, että ζ_∞ ei ole parametrisoitu pituudensa mukaan.

Kiinnitetään $r > 0$. Tällöin on olemassa kuvaukset $\widetilde{\psi}_{n,r} : \xi_\infty((-\infty, \infty) \times [0, r]) \rightarrow \xi_n((-\infty, \infty) \times [0, \eta(l_n)])$, jotka ovat määriteltyjä kaavalla

$$\xi_\infty(s, t) \mapsto \xi_n(s, t)$$

ja jotka ovat hyvin määriteltyjä jostain luvusta $n \in \mathbb{N}$ lähtien, sillä $\eta(l_n) \rightarrow \infty$. Koska $\zeta_n \rightarrow \zeta_\infty$ C^∞ -topologian mielessä, kuvaukset $\widetilde{\psi}_{n,r}$ suppenevat kohti hyperbolisen puolitasan identiteettikuvauksen rajoittumaa joukkoon $\xi_\infty((-\infty, \infty) \times [0, r])$.

Jatketaan kuvauksia $\widetilde{\psi}_{n,r}$ kuvauksilla $[r, \infty) \rightarrow [r, \eta(l_n))$, jotka jatkavat kuvauksia $\widetilde{\psi}_{n,r}$ sileästi liitoskohdassa ja ovat muualla lineaarikuvauksia. Tällöin kuvauksia $\widetilde{\psi}_{n,r}$ voidaan jatkaa olemaan sileitä kuvauksia $\xi_\infty((-\infty, \infty) \times [0, \infty)) \rightarrow \xi_n((-\infty, \infty) \times [0, \eta(l_n)))$.

Lopulta voidaan ottaa jono $(r_k)_{k=1}^\infty$ avaruudessa \mathbb{R}_+ , jolle pätee $r_k \rightarrow \infty$ kun $k \rightarrow \infty$, ja jokaiselle näistä kuvaukset $\widetilde{\psi}_{n,r_k}$. Ottamalla diagonaalinen jono, saadaan kuvaukset $\widetilde{\psi}_n : \xi_\infty((-\infty, \infty) \times [0, \infty)) \rightarrow \xi_n((-\infty, \infty) \times [0, \eta(l_n)))$, jotka suppenevat C^∞ kohti identiteettikuvausta rajoitettuna joukkoon $\xi_\infty((-\infty, \infty) \times [0, \infty))$. Täten $\widetilde{\psi}_n^* \mu \rightarrow \mu$ C^∞ -topologian mielessä.

Kuten aiemmin olkkoot $\widetilde{A}_n := \xi_n((0, 1] \times [0, \eta(l_n)])$, $n \in \mathbb{N}$, ja $\widetilde{A}_\infty := \xi_\infty((0, 1] \times [0, \infty))$. Nämä ovat yhdet arkit kanonisille kauluksille A_n peitekuvauksissa $\pi_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja täten voidaan, kuten aiemmin, argumentoida, että $\psi_n := \pi_n \circ \widetilde{\psi}_n \circ (\pi_\infty|_{\widetilde{A}_\infty})^{-1}$ on diffeomorfismi ja $\psi_n^* h_n \rightarrow h_\infty$ C^∞ -topologian mielessä. \square

Myöhempää käyttöä varten tarvitaan seuraavaa määritelmää.

Määritelmä 4.2.14. *Merkitään*

$$A_{n,r} := \pi_n \circ \xi_n((-\infty, \infty) \times [0, r]), n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, r > 0,$$

ja

$$\psi_{n,r} := \pi_n \circ \widetilde{\psi}_{n,r} : A_{\infty,r} \rightarrow A_{n,r},$$

missä π_n, ξ_n ja $\widetilde{\psi}_{n,r}$ ovat kuten lemmän 4.2.13 todistuksessa.

4.2.2 Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause Y -paloille

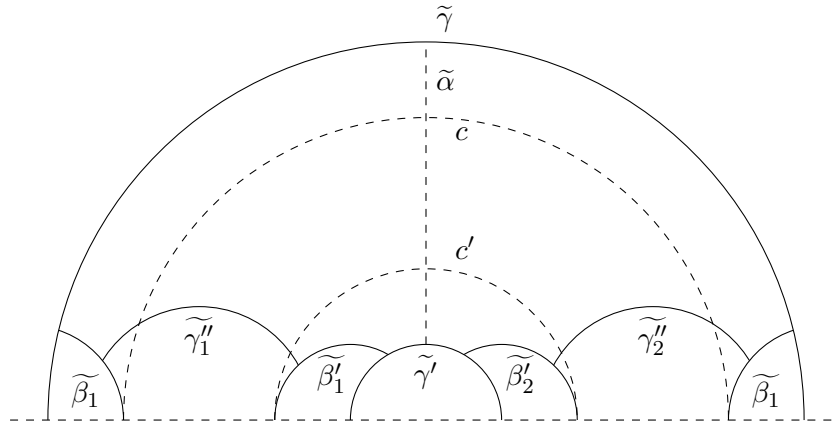
Osoitetaan seuraavaksi Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause Y -paloille.

Määritellään ensin kanoniset kaulukset Y -paloille.

Määritelmä 4.2.15 (Y -palan kanoninen kaulus). *Y -palan minimaalisen parametrisoimattoman geodeesin γ kanoninen kaulus on se geodeesin γ ympäristö, joka on isometrinen avaruuden $\mathcal{C}(l, \eta(l))$ kanssa.*

Määritelmä 4.2.16 (Y -palan kanoninen parabolinen kaulus). *Olkoon Y Y -pala, \bar{Y} sen täydellistymä ja $p \in \bar{Y} \setminus Y$ jokin sen pisteistä äärettömyydessä. Pisteen p ympäristöä avaruudessa Y , joka on isometrinen kanonisen parabolisen kauluksen $C_\infty\left(\frac{1}{2}\right)$ kanssa, kutsutaan Y -palan Y kanoniseksi paraboliseksi kaulukseksi.*

Aloitetaan osoittamalla Y -palan kanonisten kaulusten olevan erillisiä samalla osoittaen kanonisten kaulusten olemassaolon.



Kuva 4.4: Hahmotelma lemmän 4.2.17 todistuksesta.

Lemma 4.2.17. *Hyperboliset kanoniset kaulukset Y -palan minimaalisten geodeesien $\gamma_i, i \in \{1, \dots, m\}$, ympärillä ovat erillisiä.*

Todistus. Jotta lemmassa mainitut erilliset hyperboliset kanoniset kaulukset ovat olemassa, Y -palalla Y täytyy olla vähintään kaksi minimaalista geodeesia γ ja γ' . Geodeesin

4 Kaulukset

γ ja jonkin toisen Y -palan Y minimaalisen geodeesin γ_0 välillä on olemassa yksikäsitteinen geodeesi τ , joka antaa etäisyyden $d(\gamma, \gamma_0)$. Lisäksi geodeesin γ ja Y -palan Y , minkä tahansa pisteen äärettömyydessä välillä on olemassa sellainen yksikäsitteinen geodeesi τ , että τ kohtaa geodeesin γ ortogonaalisesti ja lähestyy annettua pistettä äärettömyydessä. Koska signaturen $(0, m, k)$ Y -palalle pätee $m + k = 3$, on olemassa geodeesi α , joka antaa etäisyyden $d(\gamma, \gamma')$ ja geodeesi β , joka joko antaa etäisyyden geodeesista γ kolmanteen minimaaliseen geodeesiin γ'' , kun $k = 0$, tai on geodeesi geodeesilta γ pisteeseen äärettömyydessä, kun $k = 1$. Lisäksi on olemassa geodeesi β' , joka joko antaa etäisyyden geodeesista γ' kolmanteen minimaaliseen geodeesiin γ'' , kun $k = 0$, tai on geodeesi geodeesilta γ' pisteeseen äärettömyydessä, kun $k = 1$.

Tapauksessa $k = 0$, geodeesit β ja β' jakavat geodeesin γ'' kahteen osaan γ''_1 ja γ''_2 . Tapauksessa $k = 1$ geodeeseilla β ja β' on sama piste äärettömyydessä.

Nostetaan kaikki nämä geodeesit peiteavaruuteen \mathbb{H} ja merkitään nostoja lisäämällä aaltoviiva. Konjugoimalla voidaan valita $\tilde{\alpha} = i\mathbb{R}_+$ jolloin geodeesien $\tilde{\gamma}$ ja $\tilde{\gamma}'$ täytyy olla origokeskeisiä puoliympyröitä. Suunnistuksen säilyttävän isometrian $z \mapsto -(1/z)$ avulla voidaan olettaa, että geodeesin $\tilde{\gamma}'$ säde on pienempi kuin geodeesin $\tilde{\gamma}$.

Geodeesi β voidaan nostaa kahdesti geodeeseiksi $\tilde{\beta}_1$ ja $\tilde{\beta}_2$, joiden leikkauspisteiden geodeesin $\tilde{\gamma}$ kanssa välinen etäisyys on $\ell(\gamma)$ ja jotka määritelmällisesti kohtaavat geodeesin $\tilde{\gamma}$ ortogonaalisesti. Vastaavasti geodeesi β' voidaan nostaa kahdesti geodeeseiksi $\tilde{\beta}'_1$ ja $\tilde{\beta}'_2$, joiden leikkauspisteiden geodeesin $\tilde{\gamma}'$ kanssa välinen etäisyys on $\ell(\gamma')$ ja jotka kohtaavat geodeesin $\tilde{\gamma}'$ ortogonaalisesti.

Parametrisoimalla geodeesin $\tilde{\gamma}$ osa geodeesien $\tilde{\beta}_1$ ja $\tilde{\beta}_2$ välillä voidaan huomata, että $\tilde{\beta}_1$ ja $\tilde{\beta}_2$ ovat geodeesejä, jotka projisoivat tämän parametrisaation päätepisteet äärettömyyteen. Vastaavasti geodeesit $\tilde{\beta}'_1$ ja $\tilde{\beta}'_2$ projisoivat geodeesin $\tilde{\gamma}'$ parametrisaation päätepisteet äärettömyyteen. Täten, jos c on geodeesi, joka on puoliympyrä pisteiden $\tilde{\beta}_1(\infty)$ ja $\tilde{\beta}_2(\infty)$ välillä, niin $\eta(\ell(\gamma)) = d(\tilde{\gamma}, c)$ lemmän 4.1.4 perusteella. Vastaavasti on olemassa geodeesi c' pisteiden $\tilde{\beta}'_1(\infty)$ ja $\tilde{\beta}'_2(\infty)$ välillä ja $\eta(\ell(\gamma')) = d(\tilde{\gamma}', c)$. Tilanne on hahmoteltu kuvassa 4.4.

Jotta kanoniset kaulukset minimaalisten geodeesien γ ja γ' ympärillä olisivat erillisiä, täytyisi päteä, että geodeesin c säde on suurempi tai yhtä suuri kuin geodeesin c' . Koska β ja β' ovat geodeesejä kolmannelle minimaaliselle geodeesille γ'' , kun $k = 0$, tai pisteeseen äärettömyydessä, kun $k = 1$, niiden välillä täytyy olla etäisyyttä mittaava geodeesin osa, jonka pituus on joko $\ell(\gamma''_1)$ tai $\ell(\gamma''_2)$, tai niillä on sama piste äärettömyydessä. Koska c ja c' ovat puoliympyröitä näiden pisteiden äärettömyydessä välillä, tämä tarkoittaa, että puoliympyrän c säde on suurempaa tai yhtä suurta kuin puoliympyrän c' . Tämä todistaa tuloksen. \square

Seuraavassa todistuksessa käytetään uudelleen lemmaa 4.2.9.

Lemma 4.2.18. *Paraboliset kanoniset kaulukset Y -palan pisteiden äärettömyydessä $\gamma_i, i \in \{m + 1, \dots, m + k\}$, ympärillä ovat erillisiä muista kanonisista kauluksista.*

Todistus. Olkoon $l > 0$. Koska kanonisen hyperbolisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ geodeettinen reuna on geodeesi, on olemassa sellainen peite (\mathbb{H}, π_l) , että geodeettinen reuna nousee

4 Kaulukset

parametrisoimattomalle geodeesille

$$\Gamma'_l := \left\{ e^{-\eta(l)} e^{i\theta} \mid \theta \in (0, \pi) \right\}.$$

Olkoon vastaavasti (\mathbb{H}, π_0) sellainen peitekuvaus, että kanonisen parabolisen kauluksen reuna nousee parametrisoimattomalle horosyklille

$$\Gamma'_0 := \left\{ \frac{1}{2} e^{i\theta} + \frac{1}{2} i \mid \theta \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right) \right\},$$

joka kohtaa reaaliakselin pisteessä 0 ja imaginaariakselin $i\mathbb{R}_+$ pisteessä i .

Olkoon nyt $\tau \in (-\infty, \infty)$ ja $\gamma^{\tau, l}$ parametrisoitu geodeesi, joka kohtaa geodeesin Γ'_l parametrisaatiot kohtisuorasti ja, jolla pisteen $\gamma^{\tau, l}(0)$ suunnattu etäisyys geodeesista Γ_n on $\eta(l_n)$ ja pisteen $\gamma'_{\tau, n}(\eta(l_n))$ etäisyys geodeesista $i\mathbb{R}_+$ on τl_n . Olkoon lisäksi $\gamma^{\tau, 0}$ parametrisoitu geodeesi, jonka kuvajoukko on kuva parametrisoimattomasta geodeesista $i\mathbb{R}_+ - \tau$ kuvauksessa

$$z \mapsto -\frac{1}{2z}.$$

Geodeesi $\gamma^{\tau, 0}$ on kohtisuorassa horosyklää Γ'_0 vastaan. Tällöin lemmän 4.2.9 perusteella isometriat $\sigma^{\tau, l}, l > 0$, jotka kuvaavat geodeesit $\gamma^{\tau, l}$ geodeesille $i\mathbb{R}_+$ suppenevat C^∞ -topologian mielessä kohti isometriaa $\sigma^{\tau, 0}$, joka kuvaa geodeesin $\gamma^{\tau, 0}$ geodeesille $i\mathbb{R}_+$.

Olkoot $a_{\tau, l}$ ja $b_{\tau, l}$ geodeesien $\gamma^{\tau, l}$ pisteet äärettömyydessä, $a_{\tau, 0} = 0$ ja $b_{\tau, 0} = -(1/(2\tau))$ ja olkoot $d_{\tau, l}$ ja $d_{\tau, 0}$ kuten lemmassa 4.2.7. Nähdään, että joukkojen

$$\zeta_l := \left\{ (\sigma_3^{\tau, l})^{-1} i \mid \tau \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ -\frac{1}{d_{\tau, l}(a_{\tau, l} - b_{\tau, l})} \frac{-b_{\tau, l}i + d_{\tau, l}a_{\tau, l}}{-i + d_{\tau, l}} \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

parametrisaatiot suppenevat C^∞ -topologian mielessä kohti joukon

$$\zeta_\infty := \left\{ (\sigma_3^{\tau, 0})^{-1} i \mid \tau \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ -\frac{1}{d_{\tau, 0}(a_{\tau, 0} - b_{\tau, 0})} \frac{-b_{\tau, 0}i + d_{\tau, 0}a_{\tau, 0}}{-i + d_{\tau, 0}} \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

parametrisaatiota. Nämä joukot ovat kanonisten kaulusten $C(l, \eta(l)), l > 0$, ja $C_\infty(1/2)$ reunojen nostoja.

Nyt, jos $a, b, d \in \mathbb{R}$, pätee

$$\begin{aligned} \left\| -\frac{1}{d(a-b)} \frac{-bi+da}{-i+d} \right\| &= \left| \frac{1}{d(a-b)} \right| \frac{\|(-bi+da)(i+d)\|}{\sqrt{1+d^2}} \\ &= \left| \frac{1}{d(a-b)} \right| \frac{\sqrt{(1+d^2)(d^2a^2+b^2)}}{\sqrt{1+d^2}} \\ &= \left| \frac{1}{d(a-b)} \right| \sqrt{d^2a^2+b^2} \\ &= \left| \frac{1}{a-b} \right| \sqrt{a^2+b^2/d^2} \end{aligned}$$

4 Kaulukset

Toisaalta, jos $a', b' \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että $|a'| \geq |a|$, $|b'| \geq |b|$, $|d| \geq |d'|$, $|b| \geq |a|$ ja $|b'| \geq |a'|$, niin

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2/d^2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2/d'^2}} \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2/d'^2}}{\sqrt{a^2 + b^2/d'^2}} = 1$$

ja

$$\frac{|a' - b'|}{|a - b|} = \frac{|b'| - |a'|}{|b| - |a|} \leq \frac{|b'| - |a'|}{|b'| - |a'|} = 1.$$

Näin ollen

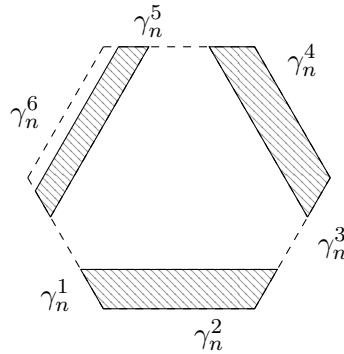
$$\left\| \frac{1}{d(a-b)} \frac{bi+a}{i+1} \right\| \leq \left\| \frac{1}{d'(a'-b')} \frac{b'i+a'}{i+1} \right\|.$$

Koska pisteiden $a_{\tau,l}$, $b_{\tau,l}$ suppeneminen kohti pisteitä $a_{\tau,0}$ ja $b_{\tau,0}$ tapahtuu ylhäältäpäin ja luvun $d_{\tau,l}$ suppeneminen kohti lukua $d_{\tau,0}$ tapahtuu alhaaltapäin, niin

$$\|\zeta_l(\tau)\| \geq \|\zeta_\infty(\tau)\|$$

kaikilla $\tau \in \mathbb{R}$ ja $l \in \mathbb{R}_+$. Erityisesti siis parabolisen kanonisen kauluksen $C_\infty(1/2)$ nosto sisältyy kanonisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ nostoon kaikilla $l > 0$. Täten lemmän 4.2.17 todistuksen perusteella hyperbolisten kaulusten nostot ovat erillisiä. Siten myös parabolisten kaulusten nostot ovat erillisiä hyperbolisten kanonisten kaulusten nostoista ja täten näitä vastaavat kaulukset Y -paloilla ovat erillisiä.

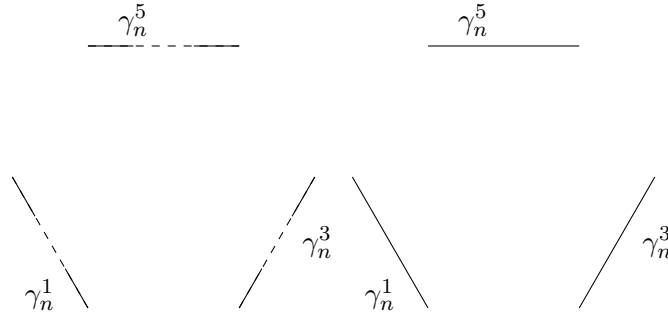
Toistamalla äskeinen raja-arvokonstruktio kahdella hyperbolisella kauluksella voidaan sanoa myös kahden parabolisen kauluksen olevan erillisiä. \square



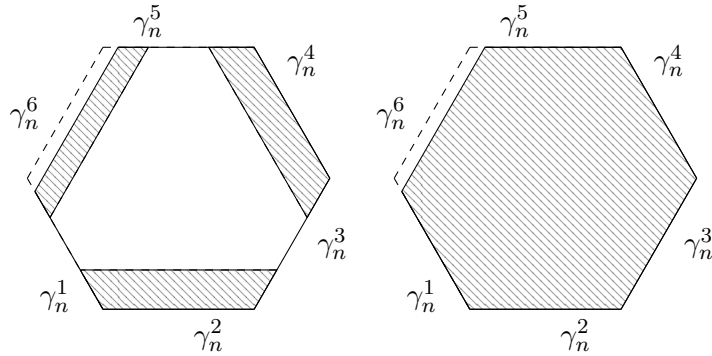
Kuva 4.5: Lemman 4.2.21 todistuksen lähtötilanne tapauksessa, jossa $l_\infty^6 = 0$ ja $l_\infty^2, l_\infty^4 > 0$. Geodeettisen kuusikulmion sijaan tilanne on hahmoteltu tason säännöllisellä kuusikulmiolla. Kuvaus $\hat{\psi}_{n,r}$ on määritelty varjostettuun alueeseen.

Lause 4.2.19 ([3] 6.3.). *Jokainen suunnistettu kompakti pinta on homeomorfinen joko pallopinnan \mathbb{S}^2 kanssa tai yhdistetty summan toruksista kanssa.*

4 Kaulukset



Kuva 4.6: Ensimmäinen askel lemmän 4.2.21 todistuksessa. Kuvaus $\hat{\psi}_{n,r}$ jatketaan täyspaksuilta janoilta katkoviivoille.



Kuva 4.7: Toinen askel lemmän 4.2.21 todistuksessa. Kuvaus $\hat{\psi}_{n,r}$ jatketaan täyspaksuilta janoilta ja varjostetulta alueelta näiden rajaamaan sisustaan.

Lemma 4.2.20. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ yhtenäinen yhdesti yhtenäinen reunallinen monisto, $U \subset \mathbb{C}$ ja $f : \Omega \rightarrow U$ lokaali homeomorfismi, jolla $\text{Image } f = U$. Tällöin f on homeomorfismi.*

Todistus. Riemannin kuvauslauseen perusteella on olemassa homeomorfismi $\text{int } \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ ja Carathéodoryn lauseen nojalla tämä homeomorfismi laajenee homeomorfismiksi $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$. Täten liimamalla joukko Ω itseensä reunaa $\partial\Omega$ pitkin, saadaan avaruus Ω^2 , joka on homeomorfinen avaruuden \mathbb{S}^2 kanssa. Koska f on jatkuva kuvaus, Ω on kompakti ja $\text{Image } f = U$, niin U on kompakti. Täten U voidaan liimata itseensä reunaa ∂U pitkin antaen kompaktin avaruuden U^2 . Nyt f indusoi surjektiivisen lokaalin homeomorfismin $\tilde{f} : \Omega^2 \rightarrow U^2$ yhdesti yhtenäiseltä avaruudelta Ω^2 , eli universaalin peitekuvauksen.

Oletetaan, että pinnan U^2 perusryhmä ei olisi äärellinen. Tällöin on olemassa peitekuvaus σ , jolla $\langle \sigma \rangle$ on ääretön syklinen. Olkoon $x \in U^2$ ja $\tilde{x} \in \tilde{f}^{-1}\{x\}$. Koska pinnan U^2 universaali peiteavaruus Ω^2 on kompakti, jonolla $(\sigma^n \tilde{x})_{n=1}^\infty$ on kasautumisarvo $\tilde{x}_\infty \in \Omega^2$ ja $\{\sigma^n \tilde{x}\}_{n=1}^\infty \subset \tilde{f}^{-1}\{x\}$. Täten peitekuvaus \tilde{f} ei ole lokaali homeomorfismi pisteessä \tilde{x}_∞ sillä tällä pisteellä ei ole ympäristöä, jossa f olisi bijektio.

Lemman 4.2.19 ja kirjan [3] kappaleen 6.6. perusteella kompaktin pinnan perusryhmä

4 Kaulukset

on äärellinen jos ja vain jos se on homeomorfinen pallopintaan \mathbb{S}^2 . Täten U^2 on aikaisemman perusteella homeomorfinen pallopintaan \mathbb{S}^2 ja täten \tilde{f} on homeomorfismi. Kuvauksen \tilde{f} rajoittuma joukkoon $\Omega \subset \Omega^2$, f , on nyt homeomorfismi $\Omega \rightarrow U$. \square

Seuraava todistus seuraa vastaavaa todistusta kirjan [6] kappaleesta 4.

Lemma 4.2.21 (Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause Y -paloille). *Olkoon $(Y_n, h_n)_{n=1}^{\infty}$ jono reunallisia Y -paloja signatureilla $(0, m, k)$ joiden minimaalisten geodeesien pituudet ovat rajoitettuja ylhäältä. Tällöin on olemassa sellainen Y -pala (Y_∞, h_∞) ja jono diffeomorfismeja $\psi_n : Y_\infty \rightarrow Y_n$, että jollain osajonolla metriikat $\psi^* h_n$ suppenevat paikallisen tasaisesti metriikkaan h_∞ .*

Todistus. Oletetaan ensin, että $m = 0$. Tällöin lemmän 3.2.17 perusteella jokainen Y -pala $Y_n, n \in \mathbb{N}$, on isometrinen muiden jonon Y -palojen kanssa. Täten voidaan valita $Y_\infty = Y_1$ ja jokainen $\psi_n : Y_\infty \rightarrow Y_n$ identiteettikuvaukseksi. Oletetaan sitten, että $m \geq 1$. Merkitään Y -palojen $Y_n, n \in \mathbb{N}$ minimaalisia geodeesejä $\gamma_n^i, i \in \{1, \dots, m\}$, ja näiden pituuksia l_n^i . Koska nämä pituudet ovat rajoitettuja ylhäältä, voidaan valita osajono, jolla jonot $(l_n^i)_{n=1}^{\infty}, i \in \{1, \dots, m\}$, suppenevat kohti reaalilukuja $l_\infty^i, i \in \{1, \dots, m\}$. Olkoon m_0 niiden indeksien i määrä, joilla $l_\infty^i > 0$. Uudelleenjärjestelyllä voidaan olettaa tämän pätevän m_0 ensimmäiselle indeksille. Olkoon (Y_∞, h_∞) nyt signaturen $(0, m_0, k + m - m_0)$ Y -pala, jonka minimaalisten geodeesien pituudet ovat $l_\infty^i, i \in \{1, \dots, m_0\}$.

Y -paloilla Y_n on kanoniset kaulukset $A_n^i, i \in \{1, 2, 3\}$, joista m ensimmäistä ovat isometrisiä kanonisiin hyperbolisiin kauluksiin $C(l_n^i, \eta(l_n^i))$ ja k viimeistä isometrisiä kanonisiin parabolisiin kauluksiin $C_\infty(1/2)$. Lemman 4.2.13 perusteella on olemassa diffeomorfismit $\psi_n^i : A_\infty^i \rightarrow A_n^i, i \in \{1, 2, 3\}$, joille pätee $(\psi_n^i)^* h_n^i \rightarrow h_\infty^i$, missä $h_n^i, n \in \mathbb{N}$, on kauluksen A_n^i Riemannin metriikka ja h_∞^i kauluksen A_∞^i Riemannin metriikka.

Lemman 3.2.29 perusteella Y -palat $Y_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ voidaan leikata hyperbolisen puolitason suorakulmaisiksi geodeesisiksi kuusikulmioiksi. Merkitään näitä $G_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja näiden parametrisoimattomia reunoja $\gamma_n^i, i \in \{1, \dots, 6\}$. Merkitään kaulusten $A_n^i, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, i \in \{1, 2, 3\}$, kuvia kuusikulmioissa $\mathbf{A}_n^i, i \in \{2, 4, 6\}$. Lemmojen 4.2.17 ja 4.2.18 perusteella nämä ovat erillisiä. Otetaan nämä olemaan reunojen $\gamma_n^i, i \in \{2, 4, 6\}$ ympärillä. Diffeomorfismit ψ_n^i laskeutuvat diffeomorfismeiksi $\hat{\psi}_n^i : \mathbf{A}_\infty^i \rightarrow \mathbf{A}_n^i$. Lähtötilanne on hahmoteltu kuvassa 4.5

Käsittellään todistuksen helpottamiseksi tapausta, jossa kaikilla kauluksilla pätee $l_\infty^i > 0$. Diffeomorfismit

$$\hat{\psi}_n := \hat{\psi}_n^2 \cup \hat{\psi}_n^4 \cup \hat{\psi}_n^6$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, r > 0$, ovat määriteltyjä leikkauksessa kauluksista ja ei-määrätyistä reunoista

$$\Gamma'_n := ((\gamma_n^1 \cup \gamma_n^3) \cap \mathbf{A}_n^2) \cup ((\gamma_n^3 \cup \gamma_n^5) \cap \mathbf{A}_n^4) \cup ((\gamma_n^5 \cup \gamma_n^1) \cap \mathbf{A}_n^6),$$

Nämä kuvaukset ovat diffeomorfismeja $\Gamma'_\infty \rightarrow \Gamma'_n$. Merkitään $\Gamma_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ yhdistettä reunoista

$$\gamma_n^1 \cup \gamma_n^3 \cup \gamma_n^5.$$

Tutkitaan yksiä reunoista γ_∞^i ja $\gamma_n^i, i \in \{1, 3, 5\}$. Jos $p_\infty \in \gamma_\infty^i$ ja $p_n \in \gamma_n^i$ ovat näiden geodeesien päätepisteet, on olemassa eksponentiaalikuvaukset $\exp_{p_\infty} : T_{p_\infty} \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ja

4 Kaulukset

$\exp_{p_n} : T_{p_n} \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ja sellaiset vektorit $v_\infty \in T_{p_\infty}$ ja $v_n \in T_{p_n}$, että $\|v_\infty\| = 1 = \|v_n\|$ ja $\xi_\infty : [0, b_\infty] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto \exp_{p_\infty}(tv_\infty)$, ja $\xi_n : [0, b_n] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto \exp_{p_n}(tv_n)$, parametrisoivat parametrisoimattomat geodeesin osat γ_∞^i ja γ_n^i . Olkoot a_∞, a'_∞, a_n ja a'_n sellaiset, että $\exp_{p_\infty}(a_\infty v_\infty) \in \mathbb{H}$ ja $\exp_{p_\infty}(a'_\infty v_\infty) \in \mathbb{H}$ ovat päätepisteet leikatuille geodeeseille $\gamma_\infty^i \cap \mathbf{A}_\infty^{i-1}$ ja $\gamma_\infty^i \cap \mathbf{A}_\infty^{i+1}$ ja a_n ja a'_n vastaavat geodeeseille γ_n^i .

Nyt diffeomorfismi $\hat{\psi}_n^i$ indusoi eksponentiaalikuvausten ξ_∞ ja ξ_n kautta kuvaukset $\chi' : [0, a_\infty] \rightarrow [0, a_n]$ ja $\chi'' : [a'_\infty, b_\infty] \rightarrow [a'_n, b_n]$, joilla $\hat{\psi}_n^i|_{\gamma_\infty^i \cap \mathbf{A}_n^{i-1}} = \xi_n \circ \chi' \circ \xi_\infty^{-1}|_{\gamma_\infty^i \cap \mathbf{A}_n^{i-1}}$ ja vastaavasti muille tapauksille. Lopulta kuvaukset χ' ja χ'' voidaan yhdistää sileällä kuvauksella $[a_\infty, a'_\infty] \rightarrow [a_n, a'_n]$, joka vaihtuu sileästi ja aidosti kasvavasti kuvauksen χ' sileästä jatkeesta kuvauksen χ'' sileäksi jatkeeksi. Olkoon tämä $\chi : [0, b_\infty] \rightarrow [0, b_n]$. Täten voidaan määritellä

$$\psi_{n,r}^i|_{\gamma_\infty^i} = \xi_n \circ \chi \circ \xi_\infty^{-1}|_{\gamma_\infty^i}.$$

Näin diffeomorfismi $\hat{\psi}_n^i$ saadaan jatkettua diffeomorfismiksi parametrisoimattomalta geodeesin osalta γ_∞^i parametrisoimattomalle geodeesin osalle γ_n^i ja täten $\hat{\psi}_n$ kuvauksena $\Gamma'_\infty \rightarrow \Gamma'_n$ kuvaukseksi $\Gamma_\infty \rightarrow \Gamma_n$. Tämä askel on hahmoteltu kuvissa 4.6.

Nyt diffeomorfismi $\hat{\psi}_n$ on määritelty joukossa

$$\mathcal{G}_\infty := \mathbf{A}_\infty^2 \cup \mathbf{A}_\infty^4 \cup \mathbf{A}_\infty^6 \cup \gamma_\infty^1 \cup \gamma_\infty^3 \cup \gamma_\infty^5$$

ja kuvautuu joukolle

$$\mathcal{G}_n := \mathbf{A}_n^2 \cup \mathbf{A}_n^4 \cup \mathbf{A}_n^6 \cup \gamma_n^1 \cup \gamma_n^3 \cup \gamma_n^5.$$

Nämä kuvaukset suppenevat identiteettikuvaukseen joukossa \mathcal{G}_∞ . Kuvausten $\hat{\psi}_n^i$ määrittely kompaktilla lähtöjoukolla Fermin koordinaattien kautta lemmän 4.2.13 todistuksessa tarkoittaa, että kuvaukset $\hat{\psi}_n$ kuuluvat avaruuteen $\text{Lip}_\infty(\mathcal{G}_\infty)$. Täten Whitneyin jatkolauseen 1.3.8 perusteella diffeomorfismit $\hat{\psi}_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ voidaan jatkaa koordinaateittain sellaisiksi C^∞ kuvauksiksi $G_\infty \rightarrow \mathbb{H}$, että kuvaukset $\hat{\psi}_n$ suppenevat kuvaukseen $\hat{\psi}_\infty$ C^∞ -topologian mielessä, kun $n \rightarrow \infty$. Kuvaukset

$$\hat{\zeta}_n := \hat{\psi}_n - \hat{\psi}_\infty + \text{Id}|_{G_\infty}$$

ovat jatkoja kuvauksille $\hat{\psi}_n$, sillä $\hat{\psi}_\infty|_{G_\infty} = \text{Id}|_{G_\infty}$. Kuvausten $\hat{\psi}_n$ suppenemisen takia $\hat{\zeta}_n \rightarrow \text{Id}|_{G_\infty}$, kun $n \rightarrow \infty$.

Nyt differentiaalimatriiseille pätee

$$D\hat{\zeta}_n = D(\hat{\psi}_n - \hat{\psi}_\infty) + D(\text{Id}|_{G_\infty}) = D(\hat{\psi}_n - \hat{\psi}_\infty) + I_2.$$

Koska $\hat{\psi}_n \rightarrow \hat{\psi}_\infty$, kun $n \rightarrow \infty$, $D(\hat{\psi}_n - \hat{\psi}_\infty)$ on pieni matriisi, kun $n \in \mathbb{N}$ on tarpeeksi suuri. Täten $D\hat{\zeta}_n$ on kääntyvä ja lemmän 1.1.20 perusteella $\hat{\zeta}_n$ on lokaali diffeomorfismi.

Nyt, koska G_∞ on kompakti ja yhdesti yhtenäinen, lemmän 4.2.20 perusteella $\hat{\zeta}_n$ on diffeomorfismi, kun $n \in \mathbb{N}$ on tarpeeksi suuri. Täten $\hat{\zeta}_n$ kuvaa joukon \mathcal{G}_∞ rajaaman alueen joukon \mathcal{G}_n rajaamalle alueelle G_n . Kuvaus $\hat{\zeta}_n$ on siis diffeomorfismi $G_\infty \rightarrow G_n$, joka suppenee identiteettikuvaukseen. Tämä askel on hahmoteltu kuvissa 4.7.

Täten, jos μ on hyperbolisen puolitasan \mathbb{H} Riemannin metriikka, $\hat{\zeta}_n^* \mu \rightarrow \mu$. Lopulta

4 Kaulukset

voidaan liimata nämä diffeomorfismit yhteen lemmän 3.2.29 mielessä diffeomorfismeiksi $\zeta_n : Y_\infty \rightarrow Y_n$, joilla metriikat $\zeta_n^* h_n$ suppenevat C^∞ -topologian mielessä kohti metriikkaa h_∞ .

Käsitellään seuraavaksi tapauksen, jossa $l_\infty^i = 0$ ainakin yhdellä $i \in \{2, 4, 6\}$, aiheuttamat muutokset todistukseen.

Kuvausten ψ_n^i sijasta kauluksilla, joilla $l_\infty^i = 0$, käsitellään kuvauksia $\psi_{n,r}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ määritelmän 4.2.14 mielessä joukoissa $A_{n,r}^i$. Nämä laskeutuvat kuvauksiksi $\hat{\psi}_{n,r}^i$ joukoissa $\mathbf{A}_{n,r}^i$. Joukoissa Γ'_n leikkausten $\mathbf{A}_n^i \cap (\gamma_n^{i-1} \cup \gamma_n^{i+1})$ sijasta käsittelemme leikkauksia $\mathbf{A}_{n,r}^i \cap (\gamma_n^{i-1} \cup \gamma_n^{i+1})$. Vastaavasti joukot $\mathcal{G}_{n,r}$ määritellään käyttäen typistettyjä kauluksia $\mathbf{A}_{n,r}^i$.

Koska joukoissa $A_{n,r}^i$ kuvaukset $\psi_{n,r}^i$ ovat määriteltyjä Fermin koordinaateilla, kuten joukoissa A_n^i , kuvaukset $\hat{\psi}_{n,r} : \mathcal{G}_\infty \rightarrow \mathcal{G}_n$ ovat avaruudessa $\text{Lip}_\infty(\mathcal{G}_\infty)$. Lisäksi kuvaukset $\hat{\zeta}_{n,r}$ ovat määriteltyjä vasta jostain $n \in \mathbb{N}$ lähtien. Lopullinen laajennus saadaan ainoastaan joukkoon

$$G_\infty \setminus \bigcup_{i \in I} (A_\infty^i \setminus A_{\infty,r}^i)$$

missä I koostuu niistä indekseistä $i \in \{1, 2, 3\}$, joilla $l_\infty^i = 0$.

Joka tapauksessa kuvaukset $\hat{\zeta}_{n,r}$ voidaan liimata kuvauksiksi $\zeta_{n,r}$ ja, kuten lemmän 4.2.13 todistuksessa, voidaan ottaa diagonaalinen jono typistettyjä kauluksia jatkavia kuvauksia, joilla saadaan sellaiset kuvaukset ζ_n , että $\zeta_n^* h_n \rightarrow h_\infty$, kun $n \rightarrow \infty$. \square

5 Hyperbolisten pintojen rakentaminen

5.1 Hyperbolisen pinnan signature

Määritellään ensin mitä tarkoitetaan hyperbolisen pinnan signaturella.

Määritelmä 5.1.1 (Genus). *Olkoon S suunnistuva sileä pinta, joka on homeomorfinen yhtenäiseen summaan g monesta toruksesta. Tällöin pinnan S genuksen sanotaan olevan g . Mikäli S on homeomorfinen pallopinnan \mathbb{S}^2 kanssa, sanotaan, että sen genus on nolla.*

Määritelmä 5.1.2 (Reunallisen hyperbolisen pinnan signature). *Olkoon S reunallinen hyperbolinen pinta, joka on diffeomorfinen genuksen g kompaktiin pintaan, josta on poistettu m erillistä diffeomorfasta avointa kiekkoa ja k pistettä. Tällöin pinnan S signaturen sanotaan olevan (g, m, k) .*

Signaturen (g, m, k) reunallisen hyperbolisen pinnan poistettuja pisteitä kutsutaan sen pisteiksi äärettömyydessä.

Määritelmä 5.1.3 (Reunattoman hyperbolisen pinnan signature). *Olkoon S reunaton hyperbolinen pinta, joka vastaa signaturen (g, m, k) reunallista hyperbolista pintaa lemmän 3.1.25 mielessä. Tällöin pinnan S signaturen sanotaan olevan (g, m, k) .*

Määritelmä 5.1.4 (Riemannin pinnan signature). *Olkoon S Riemannin pinta, joka on homeomorfinen genuksen g pintaan, josta on poistettu k pistettä. Tällöin pinnan S signaturen sanotaan olevan (g, k) .*

Lemma 5.1.5. *Signaturen (g, m, k) reunaton hyperbolinen pinta on homeomorfinen signaturen $(g, m + k)$ Riemannin pintaan.*

5.2 Reunallisten hyperbolisten pintojen minimaaliset geodeesit

Tässä osiossa halutaan osoittaa, että hyperbolinen pinta on leikattavissa Y -paloiksi minimaalisia geodeesejaan pitkin. Osion lähteinä on käytetty kirjan [6] kappaletta 4.

Aloitetaan osio luokittelemalla hyperbolisten pintojen yksinkertaiset kutistumattomat silmukat homotopialuokkiensa mukaan. Tarvitaan seuraava lause.

Lause 5.2.1 ([4] 3.16.). *Olkoon X kompakti, semi-lokaalisti yhdesti yhtenäinen ja geodeettinen avaruus. Tällöin jokainen silmukka $\mathbb{S}^1 \rightarrow X$ on homotooppinen joko vakiopolkuihin tai suljettuun paikalliseen geodeesiin.*

5 Hyperbolisten pintojen rakentaminen

Riemannin monisto on semi-lokaalisti yhdesti yhtenäinen ja geodeettinen avaruus.

Lemma 5.2.2. *Olkoon S reunaton hyperbolinen pinta, $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ kutistumaton silmukka ja $[c]$ silmukan c homotopialuokka. Jos $\inf_{\gamma \in [c]} \ell(\gamma) = 0$, niin c sulkee sisäänsä alueen, joka on homeomorfinen punkteeratun kiekon \mathbb{D}^* kanssa.*

Todistus. Olkoon S kompakti täydellinen Riemannin 2-monisto, $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ silmukka, $[c]$ silmukan c homotopialuokka ja $\inf_{\gamma \in [c]} \ell(\gamma) = 0$. Koska S on kompakti ja $\inf_{\gamma \in [c]} \ell(\gamma) = 0$, niin lauseen 5.2.1 perusteella c on homotooppinen pisteeseen.

Olkoon S hyperbolinen pinta, S^* pinnan S täydellistymä ja $\iota : S \hookrightarrow S^*$ luonnollinen upotus. Tällöin S^* on kompakti, koska S on saatu kompaktista pinnasta, josta on poistettu pisteitä. Jos $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ on kutistumaton silmukka, $[c]$ silmukan c homotopialuokka ja $\inf_{\gamma \in [c]} \ell(\gamma) = 0$, niin $\iota \circ c$ on aiemman perusteella kutistuva, koska S^* on kompakti. Koska c on kutistumaton, pinnalla S^* sen täytyy olla homotooppinen johonkin poistetuista pisteistä joukossa $S^* \setminus S$. Täten c ympäröi jotain poistetuista pisteistä pinnalla S ja siten sen täytyy sulkea sisäänsä joukko, joka on homeomorfinen punkteeratun kiekon \mathbb{D}^* kanssa. □

Lemma 5.2.3. *Olkoon S reunaton hyperbolinen pinta, c yksinkertainen kutistumaton silmukka, $c^* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(S)$ vastaava indusoitu kuvaus ja $\ell([c]) = \inf_{c' \in [c]} \ell(c')$, missä $[c]$ on polun c homotopialuokka. Ryhmän $c^*(\pi_1(\mathbb{S}^1))$ virittäjä on hyperbolinen, jos ja vain jos $\ell([c]) > 0$. Lisäksi c on homotooppinen yksikäsitteisen yksinkertaisen kutistumattoman suljetun geodeesin γ kanssa, jolle pätee $\ell(\gamma) = \ell([c])$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että jos ryhmän $c^*(\pi_1(\mathbb{S}^1))$ virittäjä on hyperbolinen, niin $\ell([c]) > 0$. Koska c on kutistumaton, indusoidun kuvauksen $c^* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(S)$ kuva on epätriviaali. Jos kuva olisi äärellinen, ryhmän $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ virittäjän kuva on joko hyperbolinen tai parabolinen isometria. Tällaisen isometrian virittämä ryhmä on ääretön. Täten ryhmän $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ kuva ei voi olla äärellinen ja siten ryhmän $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ kuva on ääretön syklinen.

Oletetaan, että ryhmän $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ virittäjän kuva kuvauksessa $c^* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(S)$ on hyperbolinen isometria σ . Lemman 3.1.26 perusteella avaruuden S peiteavaruudeksi \bar{S} voidaan ottaa hyperbolisen puolitason \mathbb{H} geodeettisesti konvekksi osajoukko. Isometria σ kiinnittää tarkalleen yhden parametrisoidun geodeesin $\tilde{\gamma}$ peiteavaruudessa \bar{S} . Täten c on homotooppinen tämän parametrisoidun geodeesin projektioon γ , joka on suljettu yksinkertainen geodeesi. Koska σ ei kiinnitä muita geodeeseja peiteavaruudessa \bar{S} , polun c homotopialuokassa ei voi olla muita suljettuja geodeeseja.

Olkoon $[c]$ silmukan c homotopialuokka. Koska γ on suljettu geodeesi tässä homotopialuokassa, eli pituuden minimoiva silmukka tässä homotopialuokassa, täytyy päteä $\ell([c]) = \ell(\gamma) > 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että jos $\ell([c]) > 0$, niin ryhmän $c^*(\pi_1(\mathbb{S}^1))$ virittäjä on hyperbolinen.

Olkoon S^* pinnan S täydellistymä ja $\iota : S \hookrightarrow S^*$ luonnollinen upotus. Tällöin S^* on kompakti, koska S on saatu kompaktista pinnasta, josta on poistettu pisteitä. Koska

5 Hyperbolisten pintojen rakentaminen

$\ell([c]) > 0$, $\iota \circ c$ ei voi olla homotooppinen pisteeseen. Täten lauseen 5.2.1 perusteella se on homotooppinen suljettuun paikalliseen geodeesiin $\bar{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow S^*$. Koska $\iota \circ c$ ei ole homotooppinen pisteeseen, se ei voi olla homotooppinen mihinkään poistettuun pisteeseen $p \in S^* \setminus S$. Täten c on homotooppinen suljettuun paikalliseen geodeesiin γ .

Silmukka γ nousee pinnan S peiteavaruuteen \bar{S} geodeesiksi $\tilde{\gamma}$. Koska c on homotooppinen silmukkaan γ , silmukan c homotopialuokan täytyy vastata geodeesin $\tilde{\gamma}$ kiinnitävää isometriaa. Täten ryhmän $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ virittäjän kuva kuvauksen $c^* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(S)$ alla on hyperbolinen.

Kuten äsken geodeesin $\tilde{\gamma}$ kuva γ on suljettu yksinkertainen yksikäsitteinen geodeesi. Koska γ minimoi pituuden homotopialuokassaan, täytyy päteä $\ell(\gamma) = \min_{c' \in [c]} \ell(c') = \ell([c])$. \square

Lemma 5.2.4. *Olkoon S reunaton hyperbolinen pinta, c yksinkertainen kutistumaton silmukka, $c_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(S)$ vastaava indusoitu kuvaus ja $\ell([c]) = \inf_{c' \in [c]} \ell(c')$, missä $[c]$ on polun c homotopialuokka. Ryhmän $c^*(\pi_1(\mathbb{S}^1))$ virittäjä on parabolinen, jos ja vain jos $\ell([c]) = 0$. Lisäksi c ei ole homotooppinen kutistumattomaan suljettuun geodeesiin.*

Todistus. Ensimmäinen osa seuraa lemmasta 5.2.3.

Oletetaan, että $\inf_{c' \in [c]} \ell(c') = 0$, tällöin ryhmän $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ kuvan kuvauksen $c^* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(S)$ alla virittäjän täytyy olla parabolinen. Täten nosto \tilde{c} ei voi olla homotooppinen hyperbolisen puolitasan \mathbb{H} geodeesiin, koska muuten $c^*(\pi_1(\mathbb{S}^1))$ olisi hyperbolisen isometrian virittämä. Erityisesti c ei voi olla homotooppinen kutistumattomaan suljettuun geodeesiin. \square

Korollaari 5.2.5. *Olkoon S reunaton hyperbolinen pinta ja c yksinkertainen kutistumaton silmukka. Tällöin joko*

1. *c on homotooppinen yksikäsitteiseen yksinkertaisen kutistumattoman suljetun geodeesin kanssa, tai*
2. *c sulkee sisäänsä alueen, joka on homeomorfinen punkteeratun kiekon \mathbb{D}^* kanssa.*

Todistus. Seuraa lemmoista 5.2.3, 5.2.4 ja 5.2.2. \square

Jatketaan osoittamalla, että hyperboliset pinnat voidaan leikata Y -paloiksi suljettuja geodeesejä pitkin.

Jätetään todistamatta seuraava kombinatorinen tulos. Katso esimerkiksi kirjan [6] lauseen 4.3.6. todistus ja kirjan [5] lause 3.6.2.

Lemma 5.2.6. *Olkoon S signaturen (g, k) Riemannin pinta. Tällöin on olemassa sellaiset homotooppisesti epätriviaalit ja pareittain ei-homotooppiset yksinkertaiset silmukat $c_i, i \in I, |I| = 3g - 3 + 2k$, että*

- *avaruuden*

$$S \setminus \bigcup_{i=1}^I c_i$$

komponenttien $Y_j, j \in J$, missä J on indeksijoukko, sulkeumat avaruudessa S sisältävät enintään kolme silmukkaa $c_h^j, h \in \{1, \dots, H_j\}$ kokoelmasta $\{c_i\}_{i \in I}$,

5 Hyperbolisten pintojen rakentaminen

- jokaisen $Y_j, j \in J$, sulkeuma avaruudessa S on homeomorfishesti Y -pala.

Tällöin kokoelman silmukoita $\{c_i\}_{i \in I}$ sanotaan leikkaavan pinta S homeomorfishesti Y -paloiksi.

Lemma 5.2.7. *Olkoon S signaturen (g, m, k) reunallinen hyperbolinen pinta. Tällöin on olemassa sellaiset epätriviaalit yksinkertaiset suljetut geodeesit $\gamma_1, \dots, \gamma_I$, missä $I = 3g - 3 + m + k$, että*

- avaruuden

$$S \setminus \bigcup_{i=1}^I c_i$$

komponenttien $Y_j, j \in J$, missä J on jokin indeksijoukko, sulkeumat avaruudessa S sisältävät enintään kolme silmukkaa $\gamma_h^j, h \in \{1, \dots, H_j\}$ kokoelmasta $\{c_i\}_{i \in I}$,

- jokaisen $Y_j, j \in J$, sulkeuma avaruudessa S on isometrisesti reunallinen Y -pala.

Tällöin kokoelman suljettuja geodeeseja $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ sanotaan leikkaavan pinta S isometrisesti Y -paloiksi.

Todistus. Lemman 3.1.25 perusteella signaturen (g, m, k) reunallista hyperbolista pintaa S vastaa signaturen (g, m, k) hyperbolinen pinta \bar{S} , joka on homeomorfinen signaturen (g, k) Riemannin pintaan. Täten äskeisen lemmän 5.2.6 perusteella on olemassa pareittain ei-homotooppiset yksinkertaiset kutistumattomat silmukat $c_i, i \in I$, missä $|I| = 3g - 3 + m + k$, jotka jakavat pinnan \bar{S} komponenteiksi, jotka ovat homeomorfishia Y -palojen kanssa. Lemman 3.1.25 perusteella on lisäksi olemassa m kappaletta suljettuja geodeeseja $c_k, k \in K$, missä $|K| = m$, jotka ovat pinnan S reunan komponentit. Täten ne sulkevat sisäänsä alueet, jotka ovat homeomorfishia punkteerattuihin kiekkoihin \mathbb{D}^* .

Nyt lemmän 5.2.5 perusteella silmukat $c_i, i \in I$, ovat homotooppisia yksinkertaisiin kutistumattomiin suljettuihin geodeeseihin tai sulkevat sisäänsä alueen, joka on homeomorfinen punkteeratun kiekon \mathbb{D}^* kanssa. Koska silmukat $c_i, i \in I$, kuitenkin jakavat pinnan \bar{S} homeomorfishiksi Y -paloiksi, silmukoiden c_i täytyy olla homotooppisia yksinkertaisiin kutistumattomiin suljettuihin geodeeseihin $\gamma_i, i \in I$. Samasta syystä ne eivät voi olla homotooppisia pinnan S reunan komponentteihin $c_k, k \in K$.

Nyt kokoelma suljettuja geodeeseja $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ jakaa pinnan S komponentteihin, joiden sulkeumilla on geodeettiset reunat ja jotka ovat homeomorfishia Y -paloihin. Lisäksi, koska S on reunallinen hyperbolinen pinta, näiden Y -palojen diffeomorfismiluokat, ja täten niiden signaturet, ovat määrättyjä. Täten lemmän 3.2.17 perusteella kokoelma $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ jakaa pinnan S isometriaa vaille yksikäsitteisesti määrättyihin Y -paloihin. \square

5.3 Reunallisten hyperbolisten pintojen rakentaminen

Tässä osiossa osoitetaan, että jokainen reunallinen hyperbolinen pinta on rakennettavissa Y -paloista. Osion lähteenä on käytetty kirjan [6] kappaletta 4.

Aloitetaan määräämällä kanoniset pisteet Y -palan reunoilla, joiden avulla voidaan puhua reunojen liimausten kierroista.

Määritelmä 5.3.1 (Reunallisen Y -palan merkityt pisteet). *Olkoon Y reunallinen Y -pala, jonka reunan komponentit ovat $\gamma_i, i \in \{1, \dots, m\}$ ja jonka pisteet äärettömydessä ovat $\gamma_i, i \in \{m+1, \dots, 3\}$. Määritellään reunan komponenteille m kappaletta pisteitä $y_1, \dots, y_m \in Y$ seuraavasti. Olkoot indeksit lisäksi modulo 3.*

1. *Jos γ_v ja γ_{v-1} ovat reunan komponentteja, määritellään y_v olemaan lähtöpiste parametrisedulle geodeesille, joka antaa etäisyyden $d(\gamma_v, \gamma_{v-1})$.*
2. *Jos γ_v on reunan komponentti ja γ_{v-1} piste äärettömydessä, määritellään y_v olemaan lähtöpiste parametrisedulle geodeesille α , joka kohtaa pisteessä $\alpha(0)$ geodeesin γ_v ortogonaalisesti ja joka lähestyy pistettä γ_{v-1} äärettömydessä.*

Pisteitä y_1, \dots, y_m kutsutaan **reunallisen Y -palan merkityiksi pisteiksi**.

Käytetään merkittyjä pisteitä liimaamaan yhteen Y -paloja.

Lemma 5.3.2. *Olkoot Y ja Y' reunallisia Y -paloja signatureilla $(0, m, k)$ ja $(0, m', k')$, $m, m' \geq 1$, joilla on molemmilla reunan komponentit $\partial_i Y$ ja $\partial_{i'} Y'$, $i \in \{1, \dots, m\}, i' \in \{1, \dots, m'\}$, joiden pituudet ovat $l > 0$. Tällöin on olemassa relaatio \sim avaruudessa $Y \sqcup Y'$ ja reunallinen hyperbolinen pinta $X := Y \sqcup Y' / \sim$ signaturella $(0, (m-1) + (m'-1), k+k')$, jolla luonnollisille upotuksille $\iota : Y \rightarrow X$ ja $\iota' : Y' \rightarrow X$ pätee, että $\iota(Y) \cap \iota'(Y')$ on yksinkertainen suljettu geodeesi pinnalla X .*

Lisäksi pinta X voidaan valita sellaiseksi, että Y -palojen Y ja Y' merkittyjen pisteiden $y \in \partial_i Y$ ja $y' \in \partial_{i'} Y'$ kuvien $\iota(y)$ ja $\iota'(y')$ välinen suunnattu etäisyys geodeesilla $\iota(Y) \cap \iota'(Y')$ on $l(\alpha/2\pi)$, missä $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Lemman 5.3.2 mielessä saatua pintaa X kutsutaan **Y -palojen liimaukseksi** ja lukua α liimauksen **kiertoparametriksi**.

Todistus. Olkoot γ ja γ' jotkin Y -palojen Y ja Y' saman pituiset geodeettiset reunan komponentit. Olkoot $l > 0$ tämä pituus. Olkoot γ ja γ' parametrisoitu ympyrällä \mathbb{S}^1 pituudensa mukaan siten, että $\gamma(0)$ ja $\gamma'(0)$ ovat merkittyjä pisteitä näillä suljetuilla geodeeseilla. Olkoot $\bar{X} := Y \sqcup Y', \alpha \in [0, 2\pi)$ ja \sim ekvivalenssirelaatio avaruudessa \bar{X} , jolla

$$\gamma(t) = \gamma'(t + l \frac{\alpha}{2\pi}).$$

Olkoon $X = \bar{X} / \sim$. Tällöin $d(\gamma(0), \gamma'(0)) = l \frac{\alpha}{2\pi}$ ja selvästi pinnan X signature on $(0, (m-1) + (m'-1), k+k')$.

Lemman 4.2.15 perusteella molemmilla Y -paloilla on olemassa kaulus, joka on isometrinen kanoniseen hyperbolisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ kanssa. Lemman 3.1.19 perusteella nämä kaulukset voidaan liimata yhteen sylinteriksi C , joka on isometrinen avaruuden $C^2(l, \eta(l))$ kanssa. Sylinteri C voidaan upottaa isometrisesti avaruuteen X upotuksien $Y \hookrightarrow X$ ja $Y' \hookrightarrow X$ kautta. Koska tämän kauluksen ulkopuolinen alue on isometrinen avaruuksien Y ja Y' osajoukkoihin, myös nämä voidaan upottaa isometrisesti avaruuteen X . Tämä todistaa tuloksen. \square

5 Hyperbolisten pintojen rakentaminen

Vastaavalla todistuksella saadaan.

Korollaari 5.3.3. *Olkkoon Y reunallinen Y -pala signaturella $(0, m, k)$, $m \geq 2$, jolla on kaksi reunan komponenttia $\partial_i Y$ ja $\partial_{i'} Y$, $i, i' \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq i'$, joiden pituudet ovat $l > 0$. Tällöin on olemassa relaatio \sim avaruudessa Y ja reunallinen hyperbolinen pinta $X := Y/\sim$ signaturella $(1, m-2, k)$, että luonnolliselle upotukselle $\iota : Y \rightarrow X$ pätee, että $\iota(\partial_i Y) = \iota(\partial_{i'} Y)$ on yksinkertainen suljettu geodeesi pinnalla X .*

Lisäksi pinta X voidaan valita sellaiseksi, että Y -palan Y merkittyjen pisteiden $y \in \partial_i Y$ ja $y' \in \partial_{i'} Y$ kuvien $\iota(y)$ ja $\iota(y')$ välinen suunnattu etäisyys geodeesilla $\iota(\partial_i Y)$ on $l(\alpha/2\pi)$, missä $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Käytetään lemmaa 5.3.2 liimaamaan yhteen kokonainen hyperbolinen pinta.

Olkkoon $\{Y^i\}_{i=1}^N$ kokoelma signaturejen $(0, m_i, k_i)$ reunallisia Y -paloja, joilla on reunan komponentit $\{(\gamma_1^i, \dots, \gamma_{m_i}^i)\}_{i=1}^N$ ja merkityt pisteet $\{(y_1^i, \dots, y_{m_i}^i)\}_{i=1}^N$. Olkkoon lisäksi $\{\alpha_j \in [0, 2\pi)\}_{j \in J}$ kokoelma kiertoparametreja.

Olkkoon $\Sigma := \cup_{i=1}^N \cup_{i'=1}^{m_i} \{\gamma_{i'}^i\}$ ja $\{(\gamma_j, \gamma'_j)\}_{j \in J}$ kokoelma pareja joukossa $\Sigma \times \Sigma$ jollain indeksijoukolla J . Oletetaan, että näille pareille pätee, että mikään pari ei kuulu diagonaalille, mikään reunan komponentti ei esiinny kahdessa eri parissa ja jokaisesta Y -palasta Y^i , $i \in \{1, \dots, N\}$, ainakin yksi reunan komponentti kuuluu johonkin pariin. Oletetaan lisäksi, että $\ell(\gamma_j) = \ell(\gamma'_j)$ kaikilla $j \in J$.

Olkkoon $(\gamma_1, \gamma'_1) \in \{(\gamma_j, \gamma'_j)\}_{j \in J}$ ja Y_1, Y_2 Y -palat, joilla $\gamma_1 = \gamma_k^1$, $k \in \{1, \dots, m_1\}$, ja $\gamma'_1 = \gamma_{k'}^2$, $k' \in \{1, \dots, m_2\}$, tai Y_1 Y -pala, jolla $\gamma_j = \gamma_k^1$, $\gamma'_j = \gamma_{k'}^1$, $k, k' \in \{1, \dots, m_1\}$, $k \neq k'$. Olkkoon \sim_1 lemma 5.3.2 relaatio Y -paloille Y_1 ja Y_2 tai korollaarin 5.3.3 vastaava relaatio yhdelle Y -palalle Y_1 . Olkkoon nyt

$$S_1 := Y_1 \sqcup Y_2 / \sim_1$$

tai

$$S_1 := Y_1 / \sim_1.$$

Avaruus S_1 on reunallinen hyperbolinen pinta.

Jatketaan iteratiivisesti ja otetaan esimerkkinä tapaus, jossa liimattavat geodeesit kuuluvat eri Y -paloille. Olkkoon $(\gamma_j, \gamma'_j) \in \{(\gamma_j, \gamma'_j)\}_{j \in J}$ ja $Y_\tau, Y_{\tau'}$, $\tau, \tau' \in \{1, \dots, N\}$ Y -palat, joilla $\gamma_j = \gamma_k^\tau$, $k \in \{1, \dots, m_\tau\}$, ja $\gamma'_j = \gamma_{k'}^{\tau'}$, $k' \in \{1, \dots, m_{\tau'}\}$. Oletetaan lisäksi, että Y_τ liimattiin osaksi aiempaa pintaa S_{j-1} . Olkkoon \simeq_j lemma 5.3.2 relaatio Y -paloille Y_τ ja $Y_{\tau'}$ ja \sim_j tämä relaatio geodeesille $\iota_\tau(\gamma_j)$, missä $\iota_\tau : Y_\tau \rightarrow S_{j-1}$ on luonnollinen upotus. Olkkoon nyt

$$S_j := S_{j-1} \sqcup Y_{\tau'} / \sim_j.$$

Avaruus S_j on reunallinen hyperbolinen pinta. Vastaavasti saadaan reunallinen hyperbolinen pinta S_j , jos $\gamma_j = \gamma_k^\tau$, $\gamma'_j = \gamma_{k'}^\tau$, $k, k' \in \{1, \dots, m_\tau\}$, $k \neq k'$.

Toistamalla tätä prosessia iteratiivisesti kaikille $j \in J$, saadaan reunallinen hyperbolinen pinta, jonka sanotaan olevan liimattu Y -paloista $\{Y^i\}_{i=1}^N$.

Määritelmä 5.3.4 (Y -paloista rakennettu hyperbolinen pinta). *Sanotaan, että reunallinen hyperbolinen pinta S rakennettu Y -paloista, jos on olemassa Y -palat Y^i , $i \in$*

5 Hyperbolisten pintojen rakentaminen

$\{1, \dots, N\}, N \in \mathbb{N}$, ja

$$S \approx_{\text{Isom}} \sqcup_{i=1}^N Y^i / \sim,$$

missä \sim on äskeisellä menetelmällä saatu Y -palojen $Y^i, i \in \{1, \dots, N\}$ liimaus.

Tämän määritelmän perusteella Y -paloista rakennetun hyperbolisen pinnan S koostavien Y -palojen pisteitä äärettömydessä voidaan kutsua pinnan S pisteiksi äärettömydessä ja Y -palojen minimaalisia geodeeseja pinnan S minimaalisiksi geodeeseiksi.

Osoitetaan lopuksi, että jokainen reunallinen hyperbolinen pinta on rakennettavissa Y -paloista.

Korollaari 5.3.5. *Jokainen reunallinen hyperbolinen pinta on rakennettavissa Y -paloista.*

Todistus. Olkoon reunallisen hyperbolisen pinnan S signature (g, m, k) ja $\mathcal{L} := \{\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3+m+k} \in S \setminus \partial S\}$ lemmassa 5.2.7 saatu kokoelma geodeesejä. Koska näiden leikkaamien osien sulkeumat ovat reunallisia Y -paloja, jokaiselle näistä geodeeseistä voidaan määrätä yksikäsitteisesti kaksi merkittävää pistettä määritelmän 5.3.1 mielessä ja näiden merkittyjen pisteiden väliset vakiolla $2\pi/\ell(\gamma_i), i \in \{1, 3g-3+m+k\}$ normalisoidut etäisyydet $\alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3+m+k} \in [0, 2\pi)$.

Lemman 5.2.7 perusteella pintaa S vastaa erillinen yhdiste isometrisia reunallisia Y -paloja S' , joiden reunat koostuvat kokoelman \mathcal{L} geodeeseistä. Koska tarkalleen kaksi reunaa vastaavat yhtä kokoelman \mathcal{L} jäsentä, erillisten Y -palojen reunojen välillä on olemassa paritus. Täten on olemassa kokoelma Y -paloja $\{Y^i\}_{i=1}^N$, näiden reunat $\{(\gamma_1^i, \dots, \gamma_{m_i}^i)\}_{i=1}^N$, missä N on indeksijoukko, näiden reunojen välinen paritus $\{(\gamma_j, \gamma'_j)\}_{j \in J}$ ja kierto-parametrit $\{\alpha_j\}_{j \in J}$, missä J on indeksijoukko, jolla $|J| = 3g-3+m+k$. Täten määritelmää 5.3.4 edeltävällä menetelmällä voidaan rakentaa reunallinen hyperbolinen pinta, joka on isometrinen pinnan S kanssa. Täten pinta S on rakennettavissa Y -paloista määritelmän 5.3.4 mielessä. \square

Lemmoista 4.2.15, 4.2.16 ja 3.1.19 saadaan määrättyä kanoniset kaulukset reunallisille hyperbolisille pinnoille.

Korollaari 5.3.6. *Olkoon S reunallinen hyperbolinen pinta. Tällöin pinnan S jokaisen minimaalisen geodeesin γ , joka ei kuulu pinnan reunaan, ympärille voidaan upottaa kanoninen kaulus, joka on isometrinen rajoitettujen hyperbolisten sylinterien liimaukseen $C^2(\ell(\gamma), \eta(\ell(\gamma)))$.*

Lisäksi jokaisen pinnan S reunaan kuuluvan minimaalisen geodeesin γ ympärille voidaan upottaa kanoninen kaulus, joka on isometrinen kanonisen hyperbolisen kauluksen $C(\ell(\gamma), \eta(\ell(\gamma)))$ kanssa, ja jokaisen pinnan S pisteen äärettömydessä ympärille voidaan upottaa kaulus, joka on isometrinen kanoniseen paraboliseen sylinteriin $C_\infty(1/2)$. Nämä kanoniset kaulukset ovat erillisiä.

Jätetään todistamatta seuraava kombinatorinen tulos. Katso esimerkiksi kirjan [6] kappale 4.2.

Lemma 5.3.7. *Olkoon S signaturen (g, m, k) Y -paloista rakennettu pinta. Tällöin se koostuu $2g - 2 + m + k$ monesta Y -palasta*

Nyt lemmasta 3.2.30 seuraa seuraava tulos.

Korollaari 5.3.8. *Jos S on Y -paloista rakennettu hyperbolinen pinta, jonka signature on (g, m, k) , sen pinta-ala on $2\pi(2g - 2 + m + k)$.*

5.4 Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause liimatuille pinnoille

Tässä lyhyessä osiossa osoitetaan, että Delignen–Mumfordin lauseen 4.2.21 Y -palat voidaan liimata yhteen säilyttäen halutun suppenemisen.

Lemma 5.4.1. *Olkoon $(A_n, h_n)_{n=1}^{\infty}$ jono reunallisia hyperbolisia pintoja, jotka ovat isometrisia rajoitettujen reunallisten hyperbolisten sylinterien liimausten $C^2(l_n, \eta(l_n))$ kanssa ja joiden minimaalisten geodeesien pituudet $l_n, n \in \mathbb{N}$, ovat rajoitettuja ylhäältä ja alhaalta. Tällöin on olemassa pinta (A'_∞, h'_∞) , joka on isometrinen rajoitettujen reunallisten hyperbolisten sylinterien liimauksen kanssa ja sellainen jono diffeomorfismeja $\psi'_n : A'_\infty \rightarrow A'_n$, että jollain tämän jonon osajonolla metriikat $\psi'^* h'_n$ suppenevat C^∞ -topologian mielessä metriikkaan h'_∞ , kun $n \rightarrow \infty$.*

Todistus. Valitaan jonon $(A_n, h_n)_{n=1}^{\infty}$ osajono kuten lemmän 4.2.13 todistuksessa osajonoksi, jolla parametrijono $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee. Koska parametrit ovat rajoitettuja alhaalta, niiden raja-arvolle l_∞ pätee $l_\infty > 0$. Olkoon A_∞ isometrinen hyperboliseen sylinteriin $C(l_\infty, \eta(l_\infty))$.

Lemman 4.2.13 perusteella on olemassa diffeomorfismit $\psi_n : A_\infty \rightarrow A_n$, jotka ovat määriteltyjä Fermin koordinaattien kautta. Lemman 3.1.19 perusteella voidaan liimata yhteen kaksi kappaletta vastakkain suunnistettuja kanonisia hyperbolisia kauluksia $A_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jotka ovat isometrisiä avaruuksiin $C(l_n, \eta(l_n))$, avaruuksiksi (A'_n, h'_n) , jotka ovat isometrisiä rajoitettujen reunallisten hyperbolisten sylinterien liimaukseen $C^2(l_n, \eta(l_n))$.

Olkoon $\iota_n : A_n \rightarrow A'_n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, luonnollinen upotus ja $\iota_n^- : A_n \rightarrow A'_n$ tämä luonnollinen upotus käänteisellä suunnistuksella. Määritellään $\psi'_n : A'_\infty \rightarrow A'_n$ kaavalla

$$x \mapsto \iota_n \circ \psi_n \circ \iota_\infty^{-1}(x),$$

kun $x \in \iota_\infty(A_\infty)$ ja kaavalla

$$x \mapsto \iota_n^- \circ \psi_n \circ (\iota_\infty^-)^{-1}(x),$$

kun $x \in \iota_\infty^-(A_\infty)$ Tämä on hyvin määritelty sillä, jos γ on sylinterin A_∞ minimaalinen geodeesi, jota pitkin sylinteri A_∞ on liimattu yhteen itsensä kanssa, niin

$$\iota_n \circ \psi_n \circ \iota_\infty^{-1}(x) = \iota_n^- \circ \psi_n \circ (\iota_\infty^-)^{-1}(x),$$

5 Hyperbolisten pintojen rakentaminen

kun $x \in \iota(\gamma) = \iota^-(\gamma)$. Nyt

$$\begin{aligned} (\psi'_n)^* h'_n|_{\iota_n(A_n)} &= (\iota_n \circ \psi_n \circ \iota_\infty^{-1})^* h'_n|_{\iota_n(A_n)} = (\psi_n \circ \iota_\infty^{-1})^* \circ \iota_n^* h'_n|_{\iota_n(A_n)} \\ &= (\psi_n \circ \iota_\infty^{-1})^* h_n = (\iota_\infty^{-1})^* \psi_n^* h_n \rightarrow (\iota_\infty^{-1})^* h_\infty \\ &= h'_\infty|_{\iota_\infty(A_\infty)}, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$, C^∞ -topologian mielessä. Vastaavasti

$$(\psi'_n)^* h'_n|_{\iota_n^-(A_n)} \rightarrow h'_\infty|_{\iota_\infty^-(A_\infty)},$$

kun $n \rightarrow \infty$, C^∞ -topologian mielessä. Täten

$$(\psi'_n)^* h'_n \rightarrow h'_\infty,$$

kun $n \rightarrow \infty$, C^∞ -topologian mielessä. Tämä todistaa tuloksen. \square

Lemma 5.4.2. *Olkooot $(Y_n)_{n=1}^\infty$ ja $(Y'_n)_{n=1}^\infty$ jonoja Y -paloja, joissa ensimmäisen jonon jäsenten signaturet ovat $(0, m, k)$ ja toisen jonon jäsenten signaturet $(0, m', k')$, missä $m, m' \geq 1$. Olkoon lisäksi, että Y -paloilla Y_n ja Y'_n on molemmilla geodeesiset reunan komponentit joiden pituudet ovat $l_n > 0$ ja nämä pituudet ovat rajoitettuja alhaalta, ja (X_n, h_n) Y -paloista Y_n ja Y'_n kiertoparametrilla α_n liimattu hyperbolinen pinta. Tällöin on olemassa reunallinen hyperbolinen pinta (X_∞, h_∞) ja sellaiset diffeomorfismit $\psi_{n_k} : X_\infty \rightarrow X_{n_k}$, että metriikat $\psi^* h_{n_k}$ suppenevat C^∞ -topologian mielessä metriikkaan h_∞ , kun $n_k \rightarrow \infty$.*

Todistus. Kiertoparametrien jono $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ on kompaktissa joukossa \mathbb{S}^1 ja täten on olemassa osajono, jolla nämä suppenevat pisteeseen $\alpha_\infty \in \mathbb{S}^1$. Olkoon X_∞ hyperbolinen pinta, joka on saatu liimaamalla yhteen lemmasta 4.2.21 saadut Y -palat Y_∞ ja Y'_∞ kiertoparametrilla α_∞ määritelmän 5.3.4 mielessä. Merkitään tämän Poincarén metriikkaa symbolilla h_∞ . Lemman 5.4.1 perusteella liimatun minimaalisen geodeesin kauluksiin rajoitetut metriikat $\psi_n^* h_n$ suppenevat C^∞ -topologian mielessä metriikkaan h_∞ rajoitettuna avaruuden X_∞ liimatun minimaalisen geodeesin kauluksiin. Lemman 4.2.21 perusteella suppeneminen tapahtuu C^∞ -topologian mielessä myös näiden kaulusten ulkopuolella. Koska lisäksi liimausten kiertoparametrit α_n suppenevat $\alpha_n \rightarrow \alpha_\infty$, tulos seuraa. \square

6 Bersin lause

6.1 Bersin lause

Tässä osiossa halutaan todistaa Bersin lause, joka sanoo, että hyperbolisen pinnan minimaalisten geodeesien pituudet ovat rajoitettuja ylhäältä pinnan pinta-alasta riippuvalla vakiolla. Tämä yhdessä aiempien Delignen–Mumfordin lauseen vaiheiden kanssa antaa lopullisen version Delignen–Mumfordin lauseesta.

Aloitetaan todistamalla muutama tulos silmukoiden pituuksista.

Lemma 6.1.1. *Olkoon S reunallinen hyperbolinen pinta, γ sen jokin minimaalinen parametrisoitu geodeesi ja $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ yksinkertainen silmukka, joka on homotooppinen minimaalisen geodeesin γ kanssa ja ainakin osittain minimaalisen geodeesin γ kanonisen kauluksen ulkopuolella. Tällöin*

$$\ell(c) \geq 2 \operatorname{arcsinh} \left(\cosh \left(\frac{\ell(\gamma)}{2} \right) \right).$$

Todistus. Olkoon $l := \ell(\gamma)$. Olkoon geodeesin γ homotopialuokkaa vastaava isometria $\phi \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$. Tällöin ϕ on hyperbolinen ja täten on olemassa sellainen $\psi \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$, että $\phi = \psi \circ T_l \circ \psi^{-1}$. Nyt konjugoimalla pinnan S perusryhmää $\pi_1(S)$ isometrialla ψ voidaan olettaa, että geodeesi γ on kuva prototyyppillisestä parametrisoimattomasta geodeesista $i\mathbb{R}_+$ ja sen homotopialuokkaa vastaa isometria T_l .

Lasketaan ensin alaraja hyperbolisen kanonisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ ei-geodeettisen reunan pituudelle. Olkoon $a_1 \in \mathbb{H}$ piste parametrisoimattomalla geodeesin osalla

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid z = e^{i\rho}, \rho \in (0, (1/2)\pi) \right\},$$

jolla $d(a_1, i) = \eta(l)$. Olkoon lisäksi $a_2 := T_l(a_1) = e^l a_1$. Tällöin a_1 ja a_2 ovat samaistetut pisteet kanonisen kauluksen $C(l, \eta(l))$ ei-geodeettisen reunan nostolla.

Sijoittamalla a_1 ja a_2 hyperbolisen puolitasan etäisyysfunktion yhtälöön 2.1.2 saadaan

$$\sinh \frac{1}{2} d(a_1, a_2) = \frac{e^l - 1}{2e^{l/2} \sin \theta}.$$

Merkitään $b := e^l$. Suora $C := \{re^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}_+\}$ on tangentti puoliympyrälle B ja $a_1, a_2 \in C$. Täten voidaan muodostaa kolmio, jonka kulmapisteitä ovat 0, puoliympyrän B keskipiste $e^{l/2}$ ja puoliympyrän B ja suoran C leikkauspiste. Nyt $\sin \theta$ saadaan suhteena pisteessä 0 olevaa kulmaa vastakkaisen sivun pituudesta ja sen viereisen reaaliakselilla sijaitsevan sivun pituudesta, kuten hahmoteltu kuvassa 4.2. Puoliympyrän B

säde on $(b-1)/2$ ja sen keskipiste sijaitsee pisteessä $1 + (b-1)/2 = (b+1)/2$. Täten

$$\sin \theta = \frac{\frac{b-1}{2}}{\frac{b+1}{2}} = \frac{b-1}{b+1}$$

ja siis

$$\sinh \frac{1}{2}d(a_1, a_2) = \frac{b-1}{2\sqrt{b}} \frac{b+1}{b-1} = \frac{b+1}{2\sqrt{b}}.$$

Näin ollen

$$d(a_1, a_2) = 2 \operatorname{arcsinh} \left(\frac{e^l + 1}{2e^{l/2}} \right) = 2 \operatorname{arcsinh}(\cosh(l/2)).$$

Polun c nosto \tilde{c} kohtaa jonkin suoran $\{re^{i\theta'} \mid r \in \mathbb{R}_+\}$, missä $\theta' \in (0, \pi/2)$. Täten \tilde{c} kulkee samaistettujen pisteiden $a'_1 = e^{i\theta'}$ ja $a'_2 = T_l(e^{i\theta'})$ kautta. Koska \tilde{c} kulkee näiden pisteiden kautta, näiden pisteiden välinen etäisyys on pienempää kuin polun c pituus. Erityisesti

$$\sinh \left(\frac{1}{2}d(a'_1, a'_2) \right) \leq \sinh \left(\frac{1}{2}\ell(c) \right).$$

Äskeisen perusteella

$$\sinh \frac{1}{2}d(a'_1, a'_2) = \frac{e^l - 1}{2e^{l/2} \sin \theta'}.$$

Koska c on osittain kauluksen ulkopuolella, voidaan valita $0 < \theta' \leq \theta$. Täten saadaan

$$\sinh \left(\frac{1}{2}d(a_1, a_2) \right) = \frac{e^l - 1}{e^{l/2} \sin \theta} \leq \frac{e^l - 1}{e^{l/2} \sin \theta'} = \sinh \left(\frac{1}{2}d(a'_1, a'_2) \right) \leq \sinh \left(\frac{1}{2}\ell(c) \right)$$

ja täten aikaisemman perusteella

$$2 \operatorname{arcsinh} \left(\cosh \left(\frac{\ell(\gamma)}{2} \right) \right) \leq \ell(c).$$

□

Lemma 6.1.2. *Olkoon S reunallinen hyperbolinen pinta, S^* sen täydellistymä ja $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ yksinkertainen silmukka, joka on homotooppinen johonkin pinnan S pisteeseen äärettömyydessä $p \in S^* \setminus S$ ja ainakin osittain tämän pisteen äärettömyydessä kanonisen kauluksen ulkopuolella. Tällöin*

$$\ell(c) \geq 2 \operatorname{arcsinh}(1).$$

Todistus. Olkoon S^* pinnan S täydellistymä. Olkoon pistettä $p \in S^* \setminus S$ äärettömyydessä vastaava hyperbolisen puolitason piste äärettömyydessä $\tilde{p} \in \overline{\mathbb{H}}$. Tätä pistettä vastaa sen kiinnittävä parabolinen isometria $\phi \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$. Täten on olemassa sellainen $\psi \in \operatorname{Isom}^+(\mathbb{H})$, että $\phi = \psi \circ P \circ \psi^{-1}$. Nyt konjugoimalla pinnan S perusryhmää $\pi_1(S)$ isometrialla ψ voidaan olettaa, että pistettä $p \in S^*$ vastaava hyperbolisen puolitason piste äärettömyydessä on $\infty \in \overline{\mathbb{H}}$. Lisäksi pisteeseen äärettömyydessä $p \in S^* \setminus S$ homo-

tooppisten polkujen homotopialuokkaa vastaa isometria P .

Pisteen $p \in S^* \setminus S$ äärettömyydessä kanonisen kauluksen reuna on joukon

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \right\}$$

kuva. Koska c on kutistumaton suljettu polku pinnalla S ja ainakin osittain kanonisen kauluksen ulkopuolella, se on kuva jostain yksinkertaisesta polusta pisteiden $a_1 \in \mathbb{H}, \operatorname{Im} a_1 \leq 1/2$, ja $a_2 = P(a_1) = a_1 + 1$ välillä. Nyt pisteiden a_1 ja a_2 välinen etäisyys saadaan yhtälöstä

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(a_1, a_2)\right) = \frac{\|a_1 - a_2\|_{\text{eucl}}}{2\sqrt{\operatorname{Im} a_1 \operatorname{Im} a_2}} = \frac{1}{2 \operatorname{Im} a_1}$$

ja, koska polun c nosto kulkee näiden pisteiden kautta,

$$d(a_1, a_2) \leq \ell(c).$$

Täten, jos a'_1 ja $a'_2 = P(a'_1)$ ovat pisteitä kanonisen kauluksen reunalla, eli $\operatorname{Im} a'_1 = 1/2$, saadaan

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d(a'_1, a'_2)\right) = \frac{1}{2 \operatorname{Im} a'_1} = 1 \leq \frac{1}{2 \operatorname{Im} a_1} = \sinh\left(\frac{1}{2}d(a_1, a_2)\right) \leq \sinh\left(\frac{1}{2}\ell(c)\right).$$

Täten

$$2 \operatorname{arcsinh}(1) \leq \ell(c).$$

□

Bersin lauseen todistusta varten tarvitaan myös hyperbolisen puolitason pinta-alamuoto napakoordinaateissa. Jätetään todistamatta tämä tulos.

Määritelmä 6.1.3 (Napakoordinaatit hyperbolisessa puolitasossa). *Olkoon $p \in \mathbb{H}$ ja $v \in T_p\mathbb{H}$ yksikkövektori. Bijektiivisten kuvausten $\xi_{p,v} : \mathbb{R} \times (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{H}$*

$$(r, \theta) \mapsto \exp_p(re^{i\theta} \cdot v),$$

missä \cdot on kompleksitason kertolasku, käännteiskuvauksia kutsutaan napakoordinaateiksi pisteessä $p \in \mathbb{H}$.

Lemma 6.1.4. *Olkoon $p \in \mathbb{H}$ ja $v \in T_p\mathbb{H}$. Tällöin pinta-alamuoto napakoordinaattien $\xi_{p,v}$ suhteen on*

$$\sinh(r)dr \wedge d\theta.$$

Seuraava todistus seuraa artikkelia [1].

Lause 6.1.5 (Bersin lause). *Olkoon S signaturen (g, m, k) reunallinen hyperbolinen pinta. Jos S ei ole reunallinen Y -pala, on olemassa yksinkertainen suljettu geodeesi pinnalla S , joka ei kohtaa reunaa ∂S ja jonka pituus on pienempi kuin jokin pinnan S pinta-alasta $A(S)$ riippuva vakio.*

Todistus. Olkoon S signaturen (g, m, k) reunallinen hyperbolinen pinta, joka ei ole Y -pala. Tällöin lemmän 5.2.7 perusteella on olemassa $3g - 3 + m + k$ parametrisoimatonta kutistumatonta yksinkertaista suljettua geodeesia, jotka leikkaavat pinnan S Y -paloiksi. Täten pinnalla S on vähintään yksi kutistumaton yksinkertainen suljettu geodeesi, joka ei sisälly reunaan ∂S . Olkoon γ lyhin näistä geodeeseistä. Koska γ ei sisälly pinnan S reunaan, se ei voi sisältyä lemmassa 5.3.6 määriteltyihin reunan komponenttien kanonisiin kauluksiin, sillä muuten γ olisi tämän kauluksen minimaalinen geodeesi, jonka tiedetään olevan vastaava reunan komponentti.

Jos $\ell(\gamma) < 2 \operatorname{arcsinh}(1)$ saadaan

$$\ell(\gamma) < 2 \operatorname{arcsinh}(1) \leq 2 \operatorname{arcsinh}(1) \mathcal{A}(S),$$

koska $\mathcal{A}(S) \geq 2\pi$ lemmän 5.3.8 perusteella. Täten lopputulos pätee tässä tapauksessa.

Oletetaan, että $\ell(\gamma) \geq 2 \operatorname{arcsinh}(1)$. Osoitetaan, että tällöin $\operatorname{inrad}(S, s) \geq \operatorname{arcsinh}(1)$ kaikilla $s \in \gamma$. Jos näin ei olisi, lemmän 1.2.22 perusteella olisi olemassa sellainen isometria $\sigma \in \pi_1(S)$, että $d(z, \sigma z) \leq 2 \operatorname{arcsinh}(1)$ kaikilla $z \in \mathbb{H}$. Erityisesti olisi olemassa silmukka $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$, jolla $s(0) \in \gamma$, jonka pituus on alle $2 \operatorname{arcsinh}(1)$ ja jonka nosto peiteavaruuteen \mathbb{H} yhdistää pisteet \tilde{s} ja $\sigma(\tilde{s})$, missä $\tilde{s} \in \mathbb{H}$ on pisteen s jokin nosto. Täten c ei ole kutistuva. Koska piste $s \in S$ kuuluu minimaalisen geodeesin γ kanoniseen kaulukseen ja kanoniset kaulukset pinnalla S ovat erillisiä, piste s ei voi kuulua reunan komponenttien kanonisiin kauluksiin. Koska $\ell(c) < 2 \operatorname{arcsinh}(1)$, silmukka c ei lemmojen 6.1.1 ja 6.1.2 perusteella ole homotooppinen mihinkään reunan komponenttiin tai pisteeseen äärettömyydessä. Silmukka c on vapaasti homotooppinen isometrian σ akselin kuvaan ja, koska c ei ole vapaasti homotooppinen pisteeseen äärettömyydessä, σ on hyperbolinen, sen akseli on geodeesi ja täten c on vapaasti homotooppinen suljettuun geodeesiin, jonka pituus on pienempi kuin $2 \operatorname{arcsinh}(1)$. Tämä on ristiriita oletuksen, että lyhimmän suljetun geodeesin pituus on yli $2 \operatorname{arcsinh}(1)$, kanssa, eli $\operatorname{inrad}(S, s) \geq \operatorname{arcsinh}(1)$ kaikilla $s \in \gamma$.

Jos $\ell(\gamma) \leq 9 \operatorname{arcsinh}(1)$, niin $\ell(\gamma) \leq 9 \operatorname{arcsinh}(1) \mathcal{A}(S)$ ja tulos pätee.

Jos $\ell(\gamma) \geq 9 \operatorname{arcsinh}(1)$, merkitään $m \in \mathbb{N}$ suurinta luonnollista lukua, jolle pätee

$$m \leq \frac{\ell(\gamma)}{3 \operatorname{arcsinh}(1)}$$

selvästi $m \geq 3$ ja $\ell(\gamma) \in [3m \operatorname{arcsinh}(1), 3(m+1) \operatorname{arcsinh}(1))$. Nyt voidaan valita m kappaletta sellaisia pisteitä $p_i, i \in \{1, \dots, m\}$, että näiden pisteiden välillä on geodeesin γ osia, joista $m-2$ ovat pituudeltaan $3 \operatorname{arcsinh}(1)$ ja yhden pituus on välillä $[3 \operatorname{arcsinh}(1), 6 \operatorname{arcsinh}(1))$. Oletetaan, että pisteiden p_i parittainen etäisyys olisi pienempää kuin $2 \operatorname{arcsinh}(1)$. Tällöin pisteiden p_k ja p_{k+1} , $k \in \{1, \dots, m\}$, välillä olisi geodeesi ξ , jonka pituudelle pätee $\ell(\xi) < 2 \operatorname{arcsinh}(1)$ ja joka jakaa geodeesin γ osiin γ' ja γ'' . Nyt γ on homotooppinen polkujen $\gamma'\xi \in \pi_1(S, p_1)$ ja $\gamma''\xi^- \in \pi_1(S, p_1)$ summaan, missä ξ^- on ξ käänteisellä parametrisaatiolla. Vähintään toisen näistä silmukoista täytyy olla kutistumaton. Molempien näistä silmukoista pituus täytyy olla pienempää kuin $\ell(\gamma)$,

sillä

$$\ell(\gamma'\xi) \leq 6 \operatorname{arcsinh}(1) + 2 \operatorname{arcsinh}(1) \leq \ell(\gamma)$$

ja

$$\ell(\gamma''\xi^-) \leq 3(m-3) \operatorname{arcsinh}(1) + 6 \operatorname{arcsinh}(1) + 2 \operatorname{arcsinh}(1) \leq \ell(\gamma).$$

Kuitenkin $\gamma'\xi$ on silmukka kauluksessa, jonka minimaalisen geodeesin pituus on vähintään $9 \operatorname{arcsinh}(1)$, eli jonka kaikki kutistumattomat silmukat ovat vähintään pituutta $9 \operatorname{arcsinh}(1)$. Täten sen täytyy olla kutistuva. Nyt siis γ on homotooppinen ryhmän $\pi_1(S, p_1)$ kutistumattoman silmukan $\gamma''\xi^-$ kanssa, jonka pituus on pienempää kuin $\ell(\gamma)$. Täten se on myös vapaasti homotooppinen suljettuun geodeesiin, jonka pituus on pienempää kuin $\ell(\gamma)$. Tämä on ristiriita suljetun geodeesin γ valinnan kanssa. Täten $d(p_i, p_j) \geq 2 \operatorname{arcsinh}(1)$ kaikilla $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Nyt pisteet $p_i, i \in \{1, \dots, m\}$, voidaan peittää erillisillä kiekkoilla $\mathbb{D}_{p_i}(\operatorname{arcsinh}(1))$, jotka ovat isometrisiä kiekkon $\mathbb{D}_i(\operatorname{arcsinh}(1))$ kanssa hyperbolisessa puolitasossa. Erityisesti siis

$$\mathcal{A}(S) \geq m \mathcal{A}_{\mathbb{H}}(\mathbb{D}(i, \operatorname{arcsinh}(1))),$$

ja lemmän 6.1.4 perusteella integroimalla napakoordinaateissa saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{H}}(\mathbb{D}(i, \operatorname{arcsinh}(1))) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \sinh(r) \, dr \, d\theta \\ &\geq \int_0^{2\pi} \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} r \, dr \, d\theta = \pi \operatorname{arcsinh}(1)^2. \end{aligned}$$

Täten

$$m \leq \frac{\mathcal{A}(S)}{\pi \operatorname{arcsinh}(1)^2}$$

ja siis

$$\ell(\gamma) \leq 3 \operatorname{arcsinh}(1)(m+1) \leq \frac{3\mathcal{A}(S)}{\pi \operatorname{arcsinh}(1)} + 3 \operatorname{arcsinh}(1).$$

Tulos siis pätee. □

Lemma 6.1.6. *Olkoon S signaturen (g, m, k) reunallinen hyperbolinen pinta. Olkoon $\{\gamma_i\}_{i \in I}$, missä I on indeksijoukko, jolla $|I| = 3g - 3 + m + k$, lemmassa 5.2.7 saadut leikkaavat geodeesit. Tällöin $\ell(\gamma_i) < C, i \in I$, jollain pinnan S signaturesta (g, m, k) riippuvalla vakiolla $C > 0$.*

Todistus. Lemman 5.2.7 perusteella on olemassa suljetut geodeesit $\{\gamma_i\}_{i \in I}$, missä I on indeksijoukko, jolla $|I| = 3g - 3 + m + k$, jotka leikkaavat signaturen (g, m, k) reunallisen hyperbolisen pinnan S isometrisesti Y -paloiksi. Korollarin 5.3.6 perusteella suljetut geodeesit $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ kattavat kaikki pinnan S kutistumattomat yksinkertaiset suljetut geodeesit, jotka eivät ole reunan komponentteja. Täten Bersin lauseen 6.1.5 perusteella näistä lyhimmän geodeesin γ pituudelle pätee $\ell(\gamma) < C$ jollain pinta-alasta $\mathcal{A}(S)$ riippuvalla vakiolla C .

Jos $S \setminus \gamma$ on yhtenäinen, tämän komplementti voidaan samaistaa signaturen $(g-1, m+$

2, k) pinnan S' isometriseksi aliavaruudeksi. Jos $S \setminus \gamma$ on epäyhtenäinen, sen kaksi komponenttia voidaan samaistaa sellaisiksi signaturen (g_1, m_1, k_1) ja (g_2, m_2, k_2) pintojen S_1 ja S_2 isometriseksi aliavaruuksiksi, että $g_1 + g_2 = g$, $m_1 + m_2 = m + 2$ ja $k_1 + k_2 = k$.

Lemman 5.3.8 perusteella kaikkien pintojen S' , S_1 ja S_2 pinta-alat ovat enintään yhtä suuria kuin $\mathcal{A}(S)$. Täten näiltä uusilta pinnoilta voidaan löytää uudet lyhimmat geodeesit, joiden pituudet ovat rajoitettuja ylhäältä samalla vakiolla kuin aiemmin. Voidaan jatkaa tätä iteratiivisesti kunnes kaikki komponentit ovat Y -paloja. Täten $\ell(\gamma_i) < C$ kaikilla $i \in I$. Lemman 5.3.8 perusteella pinnan S pinta-ala riippuu ainoastaan sen signaturesta (g, m, k) antaen tuloksen. \square

6.2 Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause

Bersin lause 6.1.6 yhdessä aiempien Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseiden 4.2.21 ja 5.4.2 ja lemmän 5.3.5, jonka perusteella reunallinen hyperbolinen pinta voidaan rakentaa liimaamalla Y -paloista, antaa lopullisen version Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolauseesta.

Lause 6.2.1 (Delignen–Mumfordin kompaktifikaatiolause). *Olkoot $(S_n, h_n)_{n=1}^\infty$ jono hyperbolisia pintoja, joiden signaturet ovat (g, m, k) , joiden reunan komponenttien pituudet ovat rajoitettuja ylhäältä ja joiden reunan ulkopuolella olevien minimaalisten geodeesien pituudet ovat rajoitettuja alhaalta. Tällöin on olemassa sellainen hyperbolinen pinta (S_∞, h_∞) ja jono diffeomorfismeja $\psi_n : S_\infty \rightarrow S_n$, että jollain osajonolla metriikat $\psi^* h_n$ suppenevat metriikkaan h_∞ C^∞ -topologian mielessä.*

Kirjallisuus

- [1] Lipman Bers. *An inequality for Riemann surfaces*. Toim. I. Chavel ja H. M. Farkas. A volume dedicated to the memory of Harry Ernest Rauch. Springer-Verlag, Berlin, 1985, s. 87–93. ISBN: 3-540-13543-X. DOI: 10.1007/978-3-642-69828-6. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69828-6>.
- [2] Alexander Brudnyi ja Yuri Brudnyi. *Methods of geometric analysis in extension and trace problems. Volume 1*. Vol. 102. Monographs in Mathematics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012, s. xxiv+560. ISBN: 978-3-0348-0208-6.
- [3] Jean Gallier ja Dianna Xu. *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Vol. 9. Geometry and Computing. Springer, Heidelberg, 2013, s. xii+178. ISBN: 978-3-642-34363-6; 978-3-642-34364-3. DOI: 10.1007/978-3-642-34364-3. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-34364-3>.
- [4] Martin R Bridson; André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 319. Springer, 1999. ISBN: 3540643249,9783540643241. URL: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=09963d57e205e9b486c812750fc49247>.
- [5] John Hamal Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006, s. xx+459. ISBN: 978-0-9715766-2-9; 0-9715766-2-9.
- [6] Christoph Hummel. *Gromov's compactness theorem for pseudo-holomorphic curves*. Vol. 151. Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, s. viii+131. ISBN: 3-7643-5735-5. DOI: 10.1007/978-3-0348-8952-0. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8952-0>.
- [7] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*. Vol. 176. Graduate Texts in Mathematics. Second edition of [MR1468735]. Springer, Cham, 2018, s. xiii+437. ISBN: 978-3-319-91754-2; 978-3-319-91755-9.
- [8] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013, s. xvi+708. ISBN: 978-1-4419-9981-8.
- [9] Bernard Maskit. *Kleinian groups*. Vol. 287. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1988, s. xiv+326. ISBN: 3-540-17746-9.

- [10] Terrence Napier ja Mohan Ramachandran. *An introduction to Riemann surfaces*. Cornerstones. Birkhäuser/Springer, New York, 2011, s. xviii+560. ISBN: 978-0-8176-4692-9; 978-0-8176-4693-6.
- [11] Joseph J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Vol. 119. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1988, s. xiv+433. ISBN: 0-387-96678-1. DOI: 10.1007/978-1-4612-4576-6. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4576-6>.
- [12] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970, s. xiv+290.