

Nopea tutustuminen symmetriaryhmiin

monikulmioiden symmetrioiden kautta

Emilia Takanen

emilia.takanen@aalto.fi

Aalto-yliopisto

Tämä teos on lisensoitu

Creative Commons Nimeä-JaaSamoin 4.0 Kansainvälinen -lisenssillä.

1. INTRO

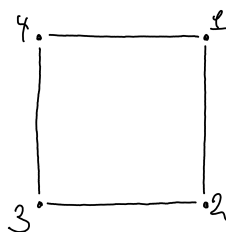
Symmetria voidaan hyvin epätarkasti määritellä olevan jonkinlainen muunnos, joka säilyttää jonkin rakenteen. Yleiskielessä käytettynä tämä ymmärretään visuaalisesti: jokin avaruuden manipulaatio liikuttaa kappaletta, mutta lopulta kappaleessa ainoastaan toisiaan vastaavat osat ovat vaihtaneet paikkaa ja liikettä ei pintapuolisella katseella pysty huomata tapahtuneen. Kuitenkin vaikka kappale itse ei ole välittänyt liikkeestä, muut asiat ympäröivässä maailmassa eivät välttämättä ole samaa mieltä.

Tämä huomio on ollut rikas lähde innovaatioille kautta matematiikan, erityisesti geometriassa. Oikeassa kontekstissa muunnokset, joista kappale ei välitä, sen symmetriat, voivat erottaa sen muista jossain joukossa kappaleita, kertoa sen rakenteesta tai jopa poissulkea sen olemassaolon, ainakin tässä tietyssä kontekstissa.

Muodollisesti tällainen kappaleen säilyttävien muunnosten kokoelma tulee algebrallisena rakenteena olemaan ns. **ryhmä** ja sen ollessa geometrisesti tulkittu erityisesti **symmetriaryhmä**. Esitelmän idea on käydä läpi yksinkertaista esimerkkiä, säännöllisen monikulmion symmetrioita, ja luoda näistä ryhmäteorian avulla ehkä hieman aiempaa yhtenäisempi käsitys.

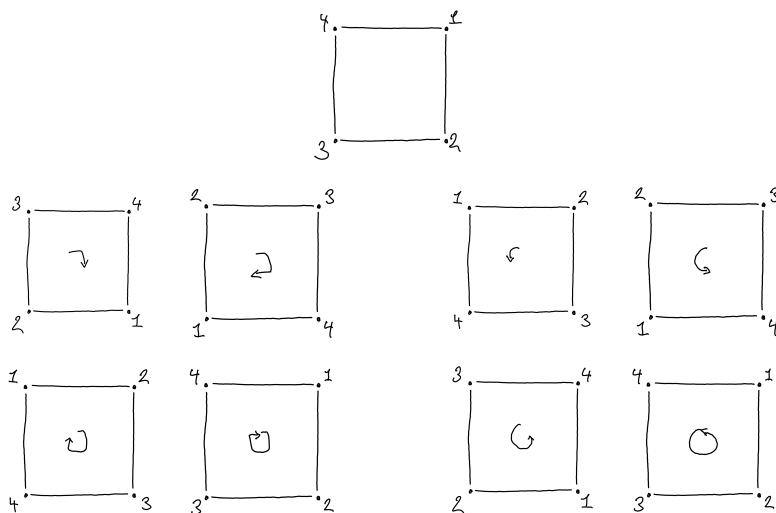
2. NELIÖN SYMMETRIARYHMÄ

Otetaan esimerkkinä neliö. Jos haluamme kuvata tason (nätisti) itselleen siten että neliö kuviona pysyy paikallaan, meidän täytyy viedä neliön kärjet kärjille. Oikeastaan jos saamme tämän ehdon toteutumaan, niin olettamamme nätteys varmistaa lopunkin neliöstä pysyvän paikallaan. Merkitään siis neliön kärjet numeroilla.



KUVA 1. Neliö, jonka kärjet on numeroitu

Nyt voimme tutkia tason muunnoksia sen perusteella miten nämä numeroitut kärjet liikkuvat. Ensinnäkin seuraavat kierrot säilyttävät neliön.



(A) Neliön kiertoja myötäpäivään

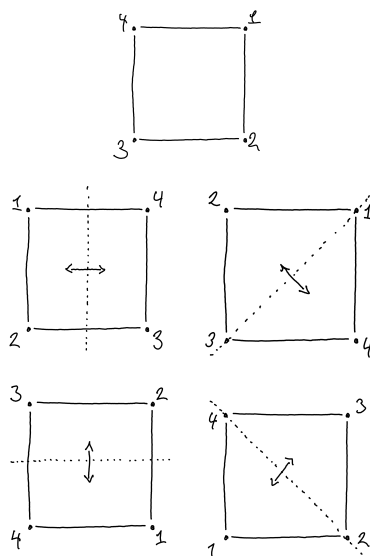
(B) Neliön kiertoja vastapäivään

Huomaamme, että myötä- ja vastapäivään kierrot vastaavat toisiaan. Esimerkiksi

$$\text{Kierto } 90^\circ = \text{Kierto } (-360^\circ + 90^\circ) = \text{Kierto } (-270^\circ)$$

Lisäksi 360° asteen kierto vastaa kärkien pysymistä paikallaan.

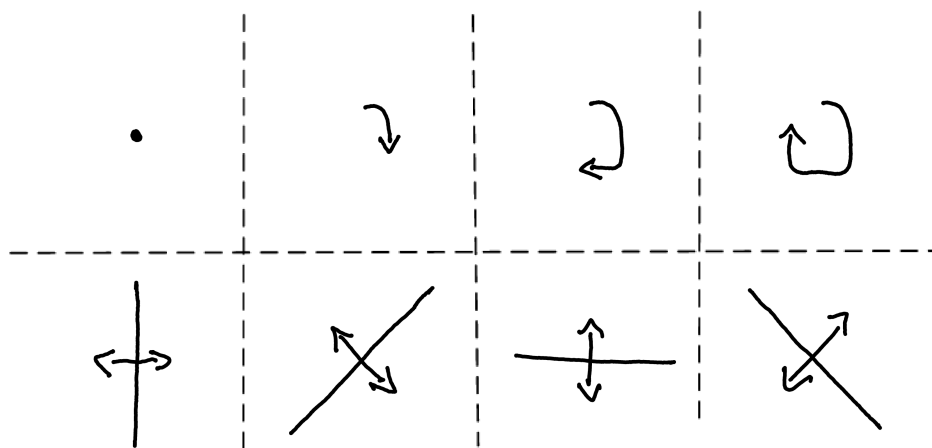
Toinen ryhmä muunnoksia on peilaukset.



KUVA 3. Neliön peilauksia

Päättämällä lähtökohtaisen peilausakselin olevan pystysuora, huomaamme loppujen peilausakselien olevan sen kiertoja. Erityisesti pystysuora peilaus seurattuna 90° , 180° ja 270° kierroilla antaa kolme loppua peilausta.

Väitämme näiden olevan kaikki neliön symmetriat, jotka saadaan tason ”näiteillä” muunnoksilla. Koottuna ne muodostavat seuraavan taulukon.



KUVA 4. Neliön symmetriaryhmän alkiot

Määritelmä 2.1 (Ryhmä). *(Symmetria)ryhmä* on kokoelma ”muunnoksia”, jolle pätee:

- (1) Kokoelma on suljettu: Jos teemme useamman muunnoksen peräkkäin, yhdistetty muunnos on kokoelmassamme.

- (2) *Kokoelma sisältää "neutraalin" muunnoksen, joka ei muuta mitään.*
 (3) *Jokaisella muunnoksella on käänteismuunnos, joka tekee alkuperäisen muunnoksen takaperin.*

Äsken saadut neliön muunnokset toteuttavat nämä ehdot.

- (1) Kokoelma on suljettu sillä
- kiertojen yhdiste on kierto,
 - kahden peilauksen yhdiste on kierto,
 - peilauksen ja kierron yhdiste on peilaus.
- (2) 0° kierto pitää neliön paikallaan ja on siis neutraalimuunnos.
- (3) Jokaisella muunnoksella on käänteismuunnos sillä
- Kierron myötäpäivään x° käänteismuunnos on kierto vastapäivään x° . Tämä on kuitenkin sama kuin kierto $360^\circ - x^\circ$.
 - Peilauksen käänteismuunnos on tämä peilaus itse.

Tosiaankin pätee

Lause 2.2. *Säännöllisen n -kärkisen tason monikulmion, missä $n \geq 3$ symmetriaryhmän rakennuspalikat ovat $\frac{360^\circ}{n}$ kierto ja peilaus. Kokonaisuudessaan symmetriaryhmän alkiot ovat*

- n kpl kiertoja mukaanlukien neutraalimuunnos ja
- n kpl peilauksia, joiden akselit eroavat toisistaan $180/n^\circ$ kierrolla.

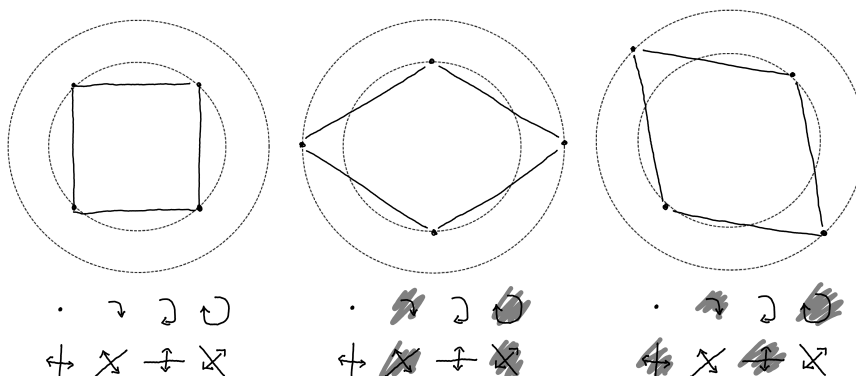
3. NELIÖN SYMMETRIARYHMÄN ALIRYHMÄT

Tarkistimme äsken ryhmän määritelmän ehdot saamallemme kokoelmalle neliön muunnoksia. Voimme kuitenkin huomata tällä kokoelmalla olevan alikokoelmia, jotka myös toteuttavat samat ehdot. Tällaista alikokoelmaa kutsutaan **aliryhmäksi**.

Määritelmä 3.1 (Aliryhmä). *Ryhmän **aliryhmä** on alikokoelma muunnoksia, jolle pätee:*

- (1) *Alikokoelma on suljettu.*
 (2) *Alikokoelma sisältää neutraalimuunnoksen.*
 (3) *Alikokoelma sisältää jokaisen muunnoksensa käänteismuunnoksen.*

Koska nämä alikokoelmat saadaan poistamalla joitain muunnoksia, ne oikeastaan vastaavat alkuperäisen kuvion symmetrioiden rikkomista. Helppoja geometrisia esimerkkejä ovat esimerkiksi seuraavat.



KUVA 5. Neliön symmetriaryhmän aliryhmiä ja niitä vastaavia kappaleita

Symmetrioita ei voi rikkoa täysin mielivaltaisesti. Jos esimerkiksi haluamme alikokoelman, joka on suljettu ja sisältää 270° kierron, sen täytyisi sisältää

- (1) ensinnäkin $270^\circ + 270^\circ = 180^\circ$,
- (2) tämän takia $270^\circ + 180^\circ = 90^\circ$
- (3) ja siis myös $270^\circ + 90^\circ = 0^\circ$.

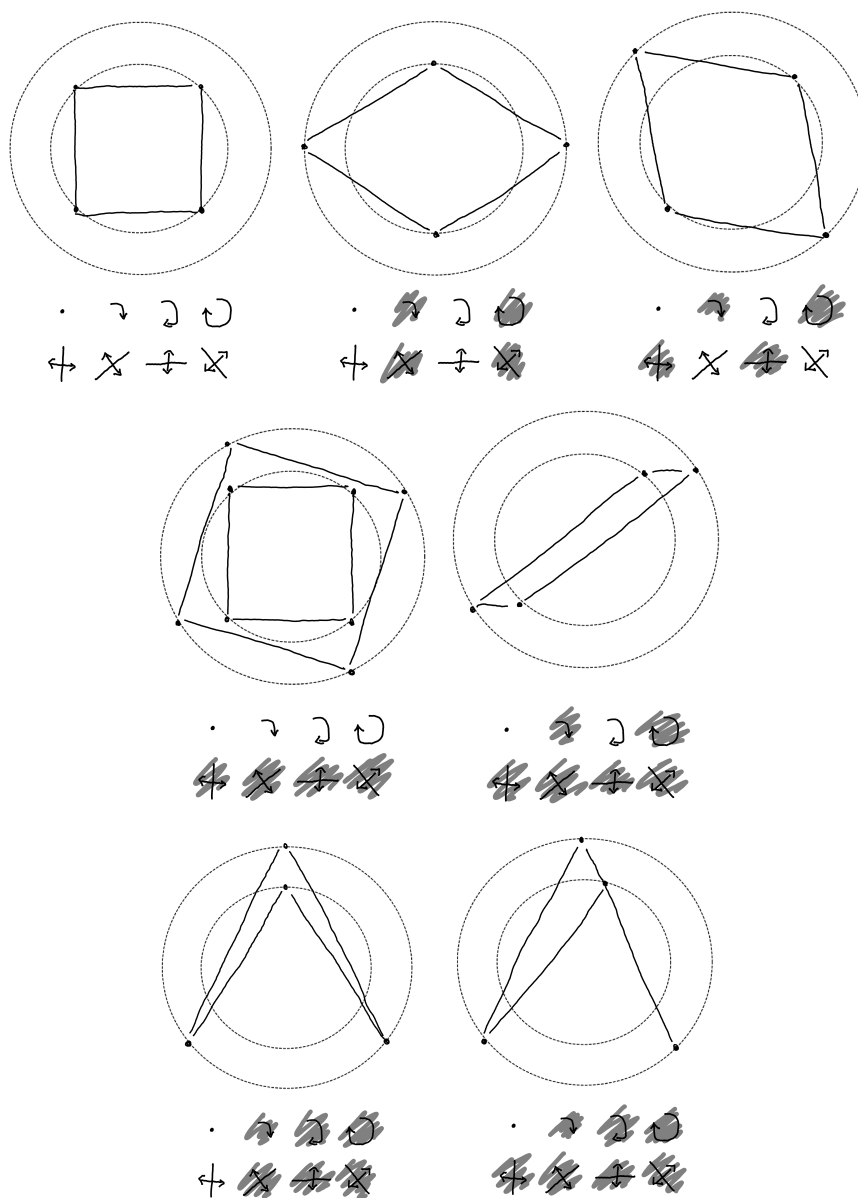
Yksi ”pariton” kierto pakotti siis sisällyttämään kaikki kierrot.

Päteekin seuraava fakta.

Lause 3.2. *Aliryhmän alkioden lukumäärä jakaa ryhmän alkioden lukumäärän.*

Neliön symmetriaryhmällä voi siis olla ainoastaan 1, 2 ja 4 alkion kokoisia aliryhmiä (ryhmä itsessään on kokoa 8).

Alla ovat kaikki aliryhmät ja jokin niitä vastaava tasokappale.



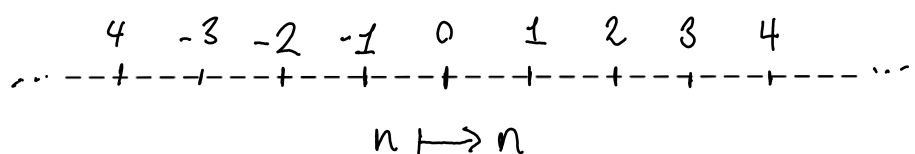
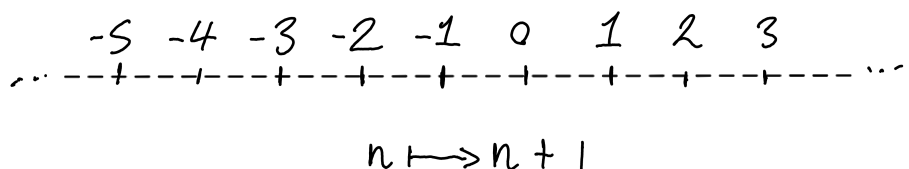
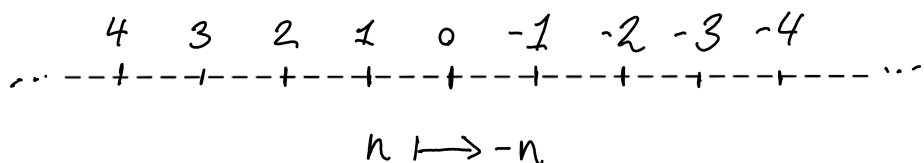
KUVA 6. Neliön symmetriaryhmän aliryhmät

Huomaa että kuvissa jokaisella ympyrällä olevat pisteet ovat tasaetäisyydellä toisistaan eli ne ovat jonkin säännöllisen tason monikulmion kärjet. Olemme oikeastaan rakentaneet aliryhmiä kuvaavat kappaleet ottamalla kahden eri monikulmion yhteiset symmetriat.

4. ÄÄRETTÖMÄT SYMMETRIARYHMÄT

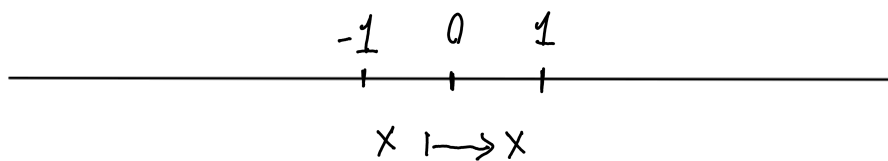
Jos tasokappale on äärellisen määrän pisteitä määräämä, jonkin näistä pisteistä täytyy olla kauimpana origosta ja jonkin lähimpänä origoa. Täten tason siirrot ja skaalaukset eivät mitenkään voi säilyttää pistejoukkoa sillä jollain näistä äärimmäisistä pisteistä ei tule olemaan joko lähtö- tai kuvapistettä. Toisaalta jos pisteitä on ääretön määrä, tätä rajoitusta ei välttämättä enää ole. Tutkitaan seuraavaksi tällaisia esimerkkejä.

Otetaan ensimmäisenä esimerkkinä kokonaisluvut.

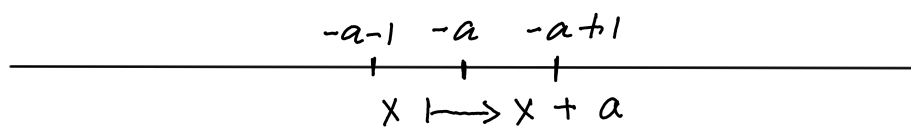
(A) Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$ (B) Siirrot, esim. $n \mapsto n + 1$, ovat kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ symmetrioita(C) Peilaukset, esim. $n \mapsto -n$, ovat kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ symmetrioita

Tässä tapauksessa tason siirrot ovat symmetrioita. Kaikkien pisteiden etäisyydet origosta muuttuvat, mutta kokoelmana etäisyydet pysyvät samoina.

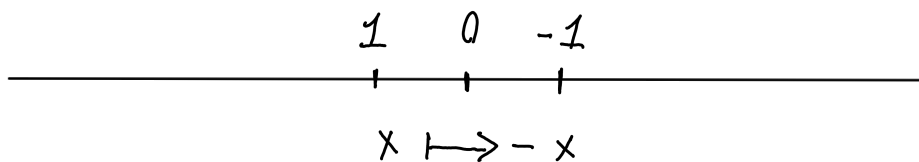
Toinen esimerkki on reaaliluvut.



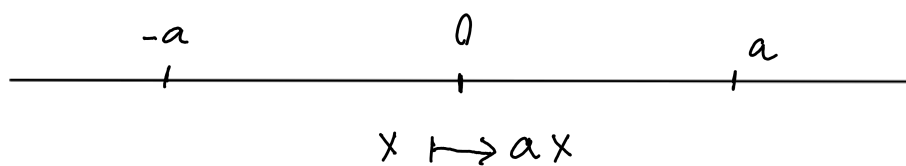
(A) Reaaliluvut $\mathbb{R}$



(B) Siirrot, esim. $x \mapsto x + a$, ovat reaalilukujen $\mathbb{R}$ symmetrioita



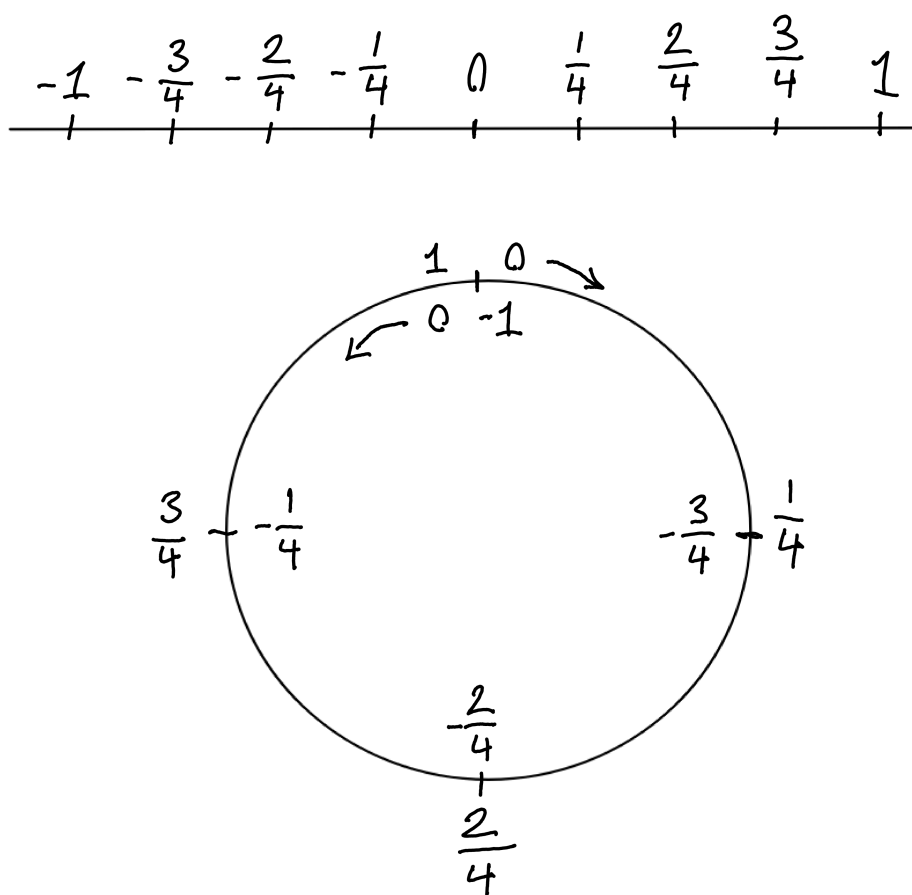
(C) Peilaukset, esim. $x \mapsto -x$, ovat reaalilukujen $\mathbb{R}$ symmetrioita



(D) Skaalaukset, esim. $x \mapsto ax$, ovat reaalilukujen $\mathbb{R}$ symmetrioita

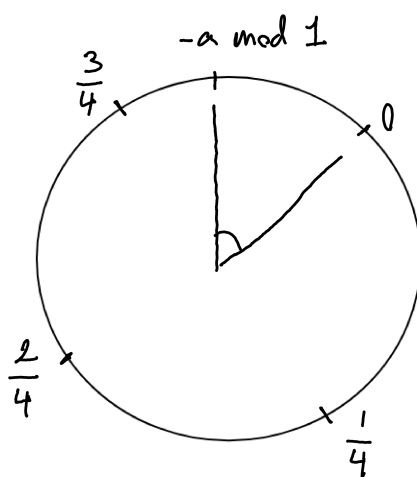
Tässä tapauksessa reaalilukujen tiheys sallii skaalauksen. Skaalauksessa $x \mapsto ax$, mielivaltaiselle luvulle y kuvautuu luku y/a . Kokonaisluvuilla tätä lukua ei välttämättä ole olemassa.

Kiertämällä reaaliluvut itseensä saamme tehtyä ympyrän. Tarkemmin, samaistamme kaikki pisteet, jotka saadan toisistaan siirrolla $x \mapsto x + 1$.

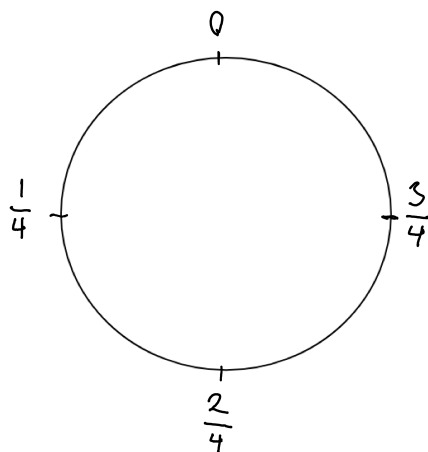


KUVA 9. Reaalilukujen $\mathbb{R}$ kiertäminen ympyrälle S^1 .

Ympyrän symmetriat saadaan reaalilukujen symmetrioista.



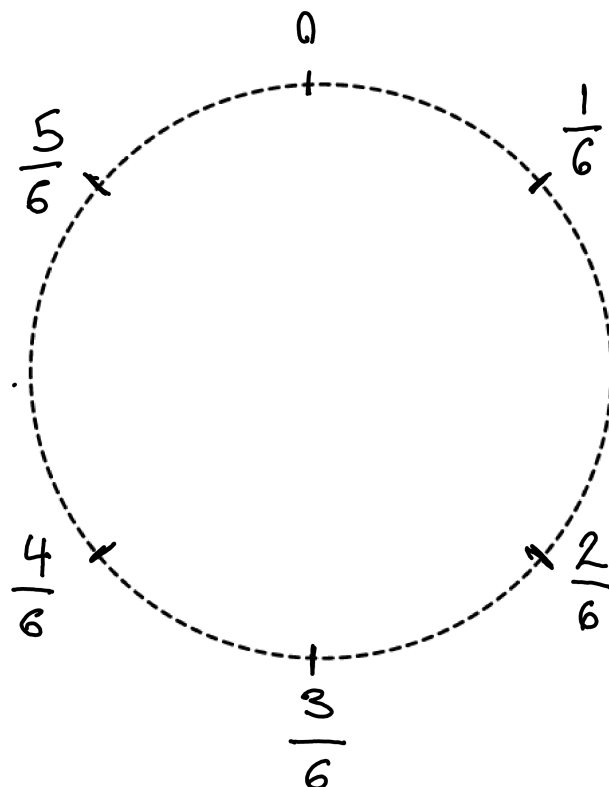
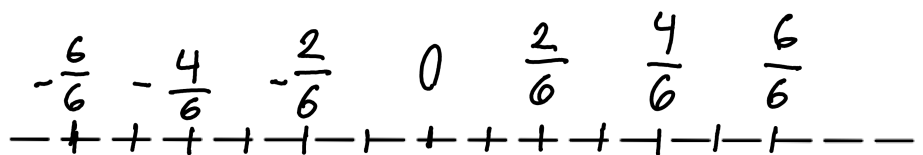
(A) Kierro kehän pituudella $a \bmod 1$ on ympyrän S^1 symmetria ja vastaa reaalilukujen $\mathbb{R}$ siirtoa $x \mapsto x + a$.



(B) Peilaus on ympyrän S^1 symmetria ja vastaa reaalilukujen $\mathbb{R}$ peilausta.

Reaalilukujen skaalaus ei laskeennu ympyrän symmetriaksi sillä se pienentäisi ympyrän kehän pituutta.

Yhdistämällä tämä tapa rakentaa ympyrä reaaliluvuista aiempaan kokonaislukujen pohdintaan, saamme



KUVA 11. Kuvauksella $n \mapsto n/6$ tiivistetyt kokonaisluvut $\mathbb{Z}$ samaistettuna kuvauksella $n \mapsto n + 1$.

Yllä olevassa kuvassa olemme ennen samaistusta tiivistäneet kokonaislu-
kuja reaaliluvuissa kuvauksella $n \mapsto n/6$. Tämän voi tietenkin luvun 6 sijasta
tehdä millä tahansa luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$, jolloin saamme säännöllisen
 k -kulmion kärjet. Aiempi säännöllisten monikulmioiden symmetriaryhmien
rakenne tuleekin siis tosiasiasa kokonaislukujen symmetrioista. Kokonais-
lukujen siirto vastaa monikulmion kiertoa ja peilaus sen peilausta.

Ottamalla raja-arvon $k \rightarrow \infty$ (ja täydentämällä rationaaliluvuista $\mathbb{Q}$ re-
aalilukuihin $\mathbb{R}$) saamme hauskan tavan nähdä, että ympyrä voidaan ajatella
 ∞ -kulmiona (tai paremminkin kärkiönä).

5. HARJOITUKSIA

- (1) Kirjoita säännöllisen n -kulmion symmetriaryhmä, missä esim. $n = 3, 5, 6, 8$. Minkäkokoisia aliryhmiä näillä voi olla? Koita keksiä joitain niitä ja niitä vastaavia tasokappaleita.
- (2) k :n narun **lettiryhmää** (braid group) voi mallintaa fyysisesti ottamalla k narua ja liittämällä niillä yhteen kaksi k :n pisteen kokoelmaa, jotka on piirretty samalle viivalle. Näiden narujen liikuttamiset toistensa yli ja ali, letitykset, muodostavat ryhmän. Leiki tällä fyysisellä mallilla ja pohdi esim. seuraavia kysymyksiä
 - mikä on kahden vierekkäisen narun letityksen käänteisletitys?
 - millaisia letitysten yhdisteitä löydät, jotka johtavat takaisin ei-letitettyyn alkutilanteeseen?
 - keksitkö mitään lettiryhmän aliryhmiä?