

Nopea tutustuminen symmetriaryhmiin

monikulmioiden symmetrioiden kautta

Emilia Takanen (Aalto-yliopisto)

emilia.takanen@aalto.fi

9. lokakuuta 2026

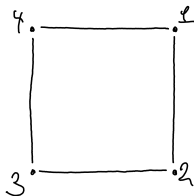
Mikä on symmetria?

Symmetria: Ympäröivän avaruuden muunnos, joka pitää jonkin valitsemamme kappaleen paikallaan.

- Kappale itsessään ei välitä liikkeestä, mutta muut asiat ympäröivässä avaruudessa eivät välttämättä ole samaa mieltä.
- Näiden muunnosten, kappaleen symmetrioiden, kokoelma voi kertoa meille paljon kappaleesta verrattuna muihin kappaleisiin.
- Kappaleen säilyttävien muunnosten kokoelma on algebrallisena rakenteena **ryhmä** tai geometrisesti tulkitussa kontekstissa **symmetriaryhmä**.

Neliö

Otetaan esimerkkinä neliö. Muunnoksen täytyy viedä kärjet kärjille, mutta kun päättämme rajoittua tarpeeksi "nätteihin" kuvauksiin, näiden kärkien kuvat määräävät koko neliön. Voidaan siis rajoittua tutkimaan vain neliön kärkiä.

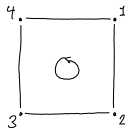
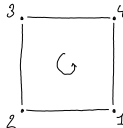
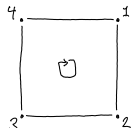
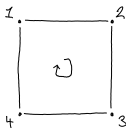
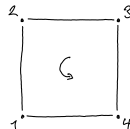
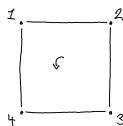
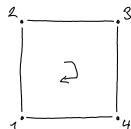
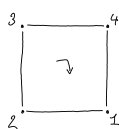
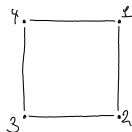


Kuva: Neliö, jonka kärjet on numeroitu

Kierrot

Kierrot säilyttävät neliön. Huomataan myös että myötä- ja vastapäivään kierroissa on vastaavuus.

$$\text{Kierto } 90^\circ = \text{Kierto } (-360^\circ + 90^\circ) = \text{Kierto } (-270^\circ)$$

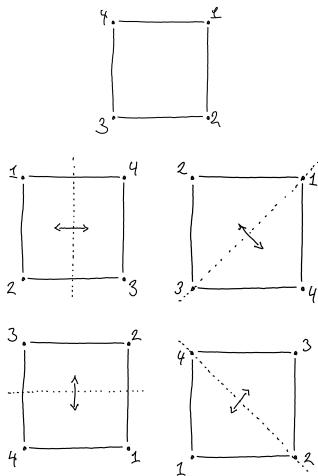


(a) Neliön kiertoja myötäpäivään

(b) Neliön kiertoja vastapäivään

Peilaukset

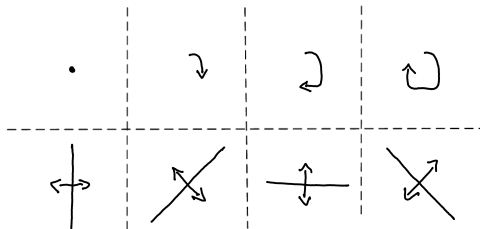
Peilaukset säilyttävät neliön. Kun kiinnitämme peilausakselin, esim. pystysuoraksi, huomaamme loppujen peilausakselien olevan sen kiertoja.



Kuva: Neliön peilauksia

Kaikki neliön symmetriat

Väitämme näiden olevan kaikki neliön symmetriat, eli koottuna.



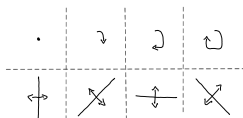
Kuva: Neliön symmetriaryhmän alkiot

Määritelmä (Ryhmä)

(Symmetria)**ryhmä** on kokoelma "muunnoksia", jolle pätee:

- 1 Kokoelma on *suljettu*: Jos teemme useamman muunnoksen peräkkäin, yhdistetty muunnos on kokoelmassamme.
- 2 Kokoelma sisältää "neutraalin" muunnoksen, joka ei muuta mitään.
- 3 Jokaisella muunnoksella on käänteismuunnos, joka tekee alkuperäisen muunnoksen takaperin.

Neliön symmetriat muodostavat ryhmän

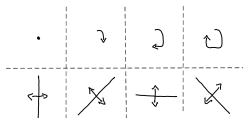


Kuva: Neliön symmetriaryhmän alkiot

Testataan määritelmää äskeisessä tapauksessa.

- 1 Kokoelma on suljettu sillä
 - kiertojen yhdiste on kierto,
 - kahden peilauksen yhdiste on kierto,
 - peilauksen ja kierron yhdiste on peilaus.
- 2 0° kierto pitää neliön paikallaan ja on siis neutraalimuunnos.
- 3 Jokaisella muunnoksella on käänteismuunnos sillä
 - Kierron myötäpäivään x° käänteismuunnos on kierto vastapäivään x° . Tämä on kuitenkin sama kuin kierto $360^\circ - x^\circ$.
 - Peilauksen käänteismuunnos on tämä peilaus itse.

Säännöllisen monikulmion symmetriaryhmä



Kuva: Neliön symmetriaryhmän alkiot

Yleinen tulos säännöllisten monikulmioiden symmetriaryhmistä on

Lause

Säännöllisen n -kärkisen tason monikulmion, missä $n \geq 3$ symmetriaryhmän rakennuspalikat ovat $\frac{360}{n}^\circ$ kierto ja peilaus. Kokonaisuudessaan symmetriaryhmän alkiot ovat

- n kpl kiertoja mukaanlukien neutraalimuunnos ja
- n kpl peilauksia, joiden akselit eroavat toisistaan $180/n^\circ$ kierrolla.

Huomataan että koko kokoelman lisäksi, myös jotkin kokoelman alikokoelmat voivat toteuttaa ryhmän määritelmän ehdot. Tämä johtaa määritelmään

Määritelmä (Aliryhmä)

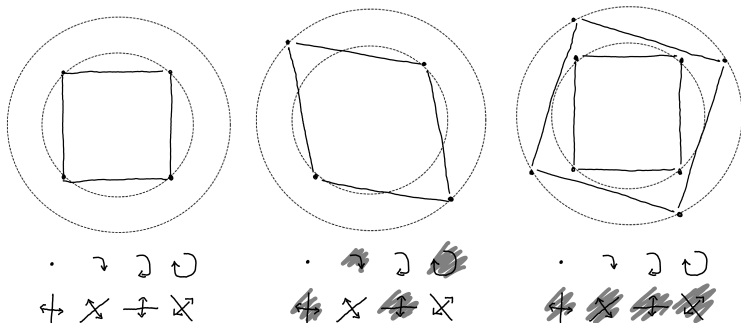
Ryhmän **aliryhmä** on **alikokoelma** muunnoksia, jolle pätee:

- 1 Alikokoelma on *suljettu*.
- 2 Alikokoelma sisältää neutraalimuunnoksen.
- 3 Alikokoelma sisältää jokaisen muunnoksensa käänteismuunnoksen.

Symmetrioiden rikkominen

Nämä alikokoelmat saadaan poistamalla joitain muunnoksia symmetriaryhmästä eli tietyssä mielessä ne vastaavat alkuperäisen kappaleen symmetrioiden rikkomista.

Helppoja esimerkkejä ovat esim.



Kuva: Neliön symmetriaryhmän aliryhmiä ja niitä vastaavia kappaleita

Symmetrioiden rikkominen

Symmetrioita ei voi rikkoa täysin mielivaltaisesti. Jos esimerkiksi haluaisimme alikokoelman, joka on suljettu ja sisältää 270° kierron, sen täytyisi sisältää

1 ensinnäkin $270^\circ + 270^\circ = 180^\circ$,

2 tämän takia $270^\circ + 180^\circ = 90^\circ$

3 ja siis myös $270^\circ + 90^\circ = 0^\circ$.

Yksi "pariton" kierto pakotti siis sisällyttämään kaikki kierrot.

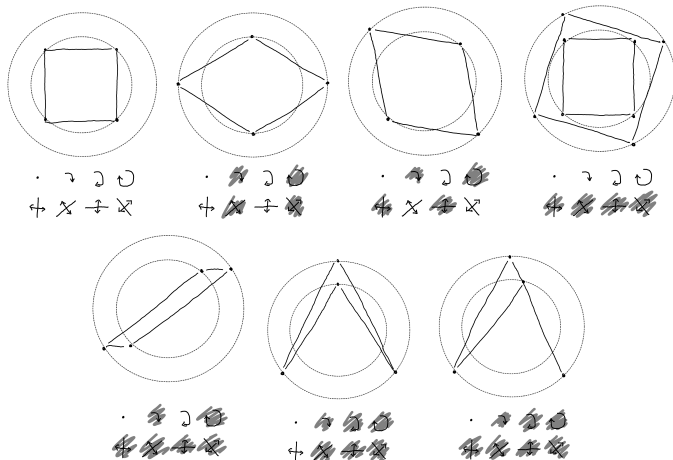
Päteekin

Lause

Aliryhmän alkioden lukumäärä jakaa ryhmän alkioden lukumäärän.

Neliön symmetriaryhmällä voi siis olla ainoastaan 1, 2 ja 4 alkion kokoisia aliryhmiä (ryhmä itsessään on kokoa 8).

Neliön symmetrioiden aliryhmät



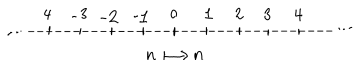
Kuva: Neliön symmetriaryhmän aliryhmät

Äärettömät symmetriaryhmät

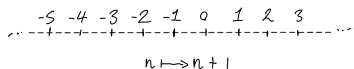
Jos tasokappale on äärellisen määrän pisteitä määäämä, jonkin näistä pisteistä täytyy olla kauimpana origosta ja jonkin lähimpänä origoa. Täten tason siirrot ja skaalaukset eivät mitenkään voi säilyttää pistejoukkoa sillä jollain näistä äärimmäisistä pisteistä ei tule olemaan joko lähtö- tai kuvapistettä. Toisaalta jos pisteitä on ääretön määrä, tätä rajoitusta ei välttämättä enää ole. Tutkitaan seuraavaksi tällaisia esimerkkejä.

Kokonaislukujen symmetriat

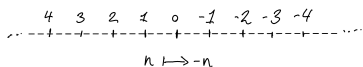
Esimerkkinä kokonaisluvut



(a) Kokonaisluvut $\mathbb{Z}$



(b) Siirrot, esim. $n \mapsto n + 1$, ovat kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ symmetrioita

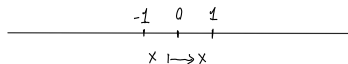


(c) Peilaukset, esim. $n \mapsto -n$, ovat kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ symmetrioita

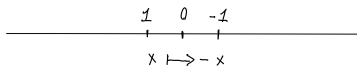
Tässä tapauksessa tason siirrot ovat symmetrioita. Kaikkien pisteiden etäisyydet origosta muuttuvat, mutta kokoelmana etäisyydet pysyvät samoina.

Reaalilukujen symmetriat

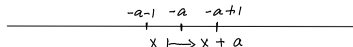
Toinen esimerkki on reaaliluvut.



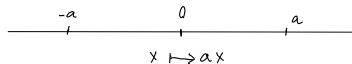
(a) Reaaliluvut $\mathbb{R}$



(c) Peilaukset, esim. $x \mapsto -x$, ovat reaalilukujen $\mathbb{R}$ symmetrioita



(b) Siirrot, esim. $x \mapsto x + a$, ovat reaalilukujen $\mathbb{R}$ symmetrioita

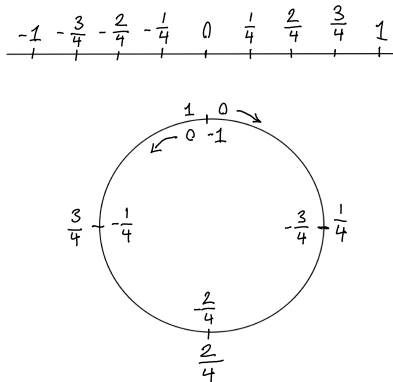


(d) Skaalaukset, esim. $x \mapsto ax$, ovat reaalilukujen $\mathbb{R}$ symmetrioita

Tässä tapauksessa reaalilukujen tiheys sallii skaalauksen. Skaalauksessa $x \mapsto ax$, mielivaltaiselle luvulle y kuvautuu luku y/a . Kokonaisluvuilla tätä lukua ei välttämättä ole olemassa.

Reaalilukujen kiertäminen ympyrälle

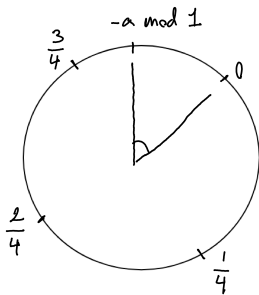
Kiertämällä reaaliluvut itseensä saamme tehtyä ympyrän. Tarkemmin, samaistamme kaikki pisteet, jotka saadan toisistaan siirrolla $x \mapsto x + 1$.



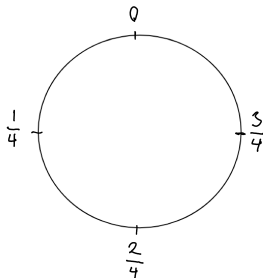
Kuva: Reaalilukujen $\mathbb{R}$ kiertäminen ympyrälle S^1 .

Ympyrän symmetriat

Ympyrän symmetriat saadaan reaalilukujen symmetrioista.



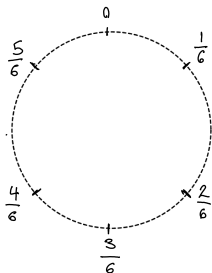
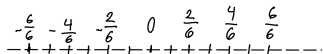
(a) Kierto kehän pituudella $a \bmod 1$ on ympyrän S^1 symmetria ja vastaa reaalilukujen $\mathbb{R}$ siirtoa $x \mapsto x + a$.



(b) Peilaus on ympyrän S^1 symmetria ja vastaa reaalilukujen $\mathbb{R}$ peilausta.

Reaalilukujen skaalaus ei laskeennu ympyrän symmetriaksi sillä se pienentäisi ympyrän kehän pituutta.

Säännöllinen monikulmio kokonaisluvuista



Kuva: Kuvauksella $n \mapsto n/6$ tiivistetyt kokonaisluvut $\mathbb{Z}$ samaistettuna kuvauksella $n \mapsto n + 1$.

Yhdistämällä tämä tapa rakentaa ympyrä reaailuvuista aiempaan kokonaislukujen pohdintaan, saamme

- Luvun 6 millä tahansa luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$, jolloin saamme säännöllisen k -kulmion kärjet.
- säännöllisten monikulmioiden symmetriaryhmien rakenne tuleekin siis tosiasiaassa kokonaislukujen symmetrioista. Kokonaislukujen siirto vastaa monikulmion kiertoa ja peilaus sen peilausta.
- Ympyrä, ∞ -kulmio, saadaan ottamalla raja-arvo $k \rightarrow \infty$.

Kiitos!

Kysymyksiä? Kommentteja?