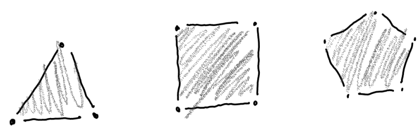
EULERIN KARAKTERISTIKA PINNOILLE

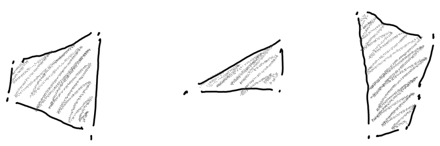
EMILIA TAKANEN (EMILIA.TAKANEN@AALTO.FI)

1. Monikulmiot ja Eulerin karakteristika

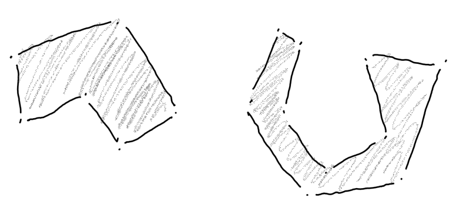
Monikulmiot ja tiilitykset. Aloitetaan määrittelemällä mistä puhumme. Mikä on (tason) monikulmio? Eräs määritelmä on, että monikulmio on kokoelma *kärkiä*, *särmiä* ja yksi *tahko*. *Kärjet* ovat jokin joukko tason pisteitä, joista jokaisesta lähtee kaksi janaa tai viivaa (*särmää*) toiseen kärkeen siten, että nämä särmät muodostavat *ketjun* (*syklin*), eli voimme kulkea särmiä pitkin järjestyksessä kaikkien kärkien kautta päätyen takaisin lähtökärkeemme. Tämän ketjun rajaama alue on monikulmion *tahko*. Kuvissa 1, 2 ja 3 on esimerkkejä monikulmioista.



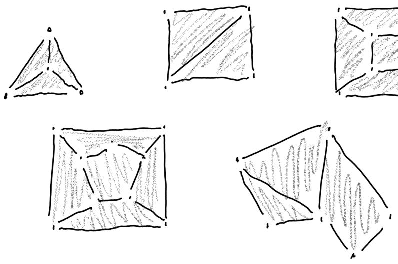
Kuva 1. Säännöllisiä monikulmioita



Kuva 2. Vinoja monikulmioita



Kuva 3. Mutkikkaita monikulmioita

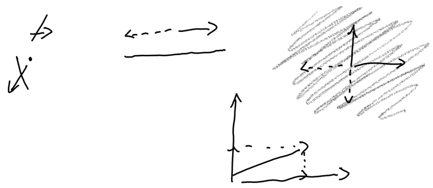


Kuva 4. Tiilitettyjä monikulmioita

Huomataan, että monikulmion voi jakaa useampaan pienempään monikulmioon. Tätä kutsutaan monikulmion *tiilittämiseksi.*

Huomataan, että jokainen monikulmio voidaan lopulta tiilittää kolmioilla. Tämä johtuu siitä, että kolmio on “yksinkertaisin” tason monikulmio. Miksi? Kahden kärjen monikulmiossa on välttämättä vain yksi särmä. Täten emme voi palata lähtökärkeen eikä tahkon rajaavaa särmien ketjua synny. Meille ei siis jää jäljelle mitään “kaksiulotteista”.

Ulottuvuuksista.
Mitä tarkoitamme sanalla *ulottuvuus*? Tietyssä mielessä kappaleen ulottuvuus kertoo kuinka moneen eri *itsenäiseen* suuntaan voimme liikkua *kappaleen sisällä.* Piste on nollaulotteinen, koska emme voi liikkua sen sisällä yhteenkään suuntaan. Viiva on yksiulotteinen, koska voimme liikkua sen sisällä vain yhteen suuntaan ottaen huomioon, että taaksepäin liikkuminen lasketaan “negatiiviseksi” liikkeeksi. Tason “alue” on kaksiulotteinen, koska voimme liikkua sen sisällä tasan kahteen “itsenäiseen” suuntaan. Mikä tahansa liike voidaan ajatella näihin kahteen suuntaan liikkumisen yhdistämisenä.



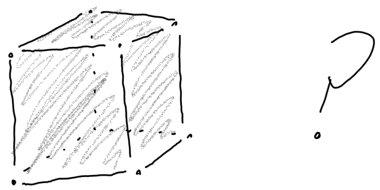
Kuva 5. Liikkumisen suuntia 0-, 1- ja 2-ulotteisten kappaleiden sisällä.

Huomaa, että puhumme kappaleen *sisällä* liikkumisesta. Tässä mielessä ulottuvuus on kappaleen “itseinen” tai “sisäinen” ominaisuus eikä riipu siitä ulkopuolisesta avaruudesta, jossa kappale elää. Monesti matematiikassa meidän ei edes tarvitse ajatella kappaleen elävän missään ulkopuolisessa avaruudessa.

Itse asiassa, jos käytämme hieman yleisempää määritelmää monikulmioille kuin äsken, niin

Date: 5. lokakuuta 2024.

- Piste on 0-ulotteinen monikulmio.
- Jana kahden pisteen välillä on 1-ulotteinen monikulmio.
- Esimerkiksi kuutio (sisustallaan) on 3-ulotteinen monikulmio (tai monitahokas).
- Vastaavasti on olemassa n-monikulmioita kaikille ulottuvuuksille $n \in \mathbb{N}$ (n kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon). Kun $n \geq 4$ nämä eivät kuitenkaan ole (ainakaan ihmisten) visualisoitavissa.



KUVA 6. Kuutio, 3-ulotteinen monikulmio, ja kysymysmerkki kuvastamaan n-ulotteista monikulmiota, kun $n \geq 4$.

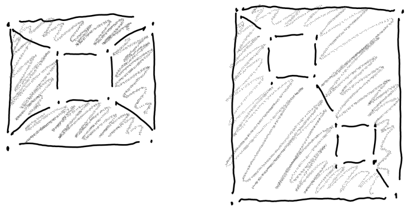
Eulerin karakteristika tasokappaleille. Geometriassa ollaan ajan myötä, käytännössä parin viime vuosisadan aikana, päädytty tutkimaan hyvin monimutkaisia ja abstrakteja kappaleita/muotoja (/avaruuksia!). Nämä eivät yleensä ole hahmoteltavissa visuaalisesti kuin ehkä jollain karkean intuition tasolla. Täten erääksi kysymykseksi herää mistä tiedämme näiden kappaleiden olevan "eri" kappaleita toisistaan (jollain luokittelun karkeudella). Tämän kysymyksen vastaamiseen on keksitty, että geometrisista kappaleista voidaan "laskea" muita matemaattisia esineitä, kuten esimerkiksi lukuja, jotka riippuvat ainoastaan kappaleen muodosta (tietyllä karheudella). Näitä kutsutaan kappaleen *invarianteiksi* ja näistä klassisin on **Eulerin(-Poincarén) karakteristika**.

Määritelmä 1.1 (Eulerin(-Poincarén) karakteristika)**.** *Olkoon S tasokappaleen tiilitys. Tällöin kappaleen S* ***Eulerin(-Poincarén) karakteristika*** *$\chi(S)$ (tai χ, jos S on selvä kontekstista) on*

$$\chi(S) = \textit{Kärkien lkm} \; - \; \textit{Särmien lkm} \; + \; \textit{Tahkojen lkm.}$$

Esimerkiksi:

- Neliöllä on 4 kärkeä, 4 särmää ja 1 tahko. Täten
$$\chi = 4 - 4 + 1 = 1.$$
- Kahteen kolmioon jaetulla neliöllä on 4 kärkeä, 5 särmää ja 2 tahkoa. Täten
$$\chi = 4 - 5 + 2 = 1.$$
- Kuvassa 7 neliöllä, jossa on neliönmuotoinen reikä on 8 kärkeä, 12 särmää ja 4 tahkoa. Täten
$$\chi = 8 - 12 + 4 = 0.$$



KUVA 7. Monimutkaisempia tasokappaleita ja niiden tiilityksiä

- Kuvassa 7 neliöllä, jossa on kaksi neliönmuotoista reikää on 12 kärkeä, 15 särmää ja 2 tahkoa. Täten

$$\chi = 12 - 15 + 2 = -1.$$

Monesti kirjoitetaan

$$\begin{aligned} V &= \text{Kärkien (vertices) lkm} \\ E &= \text{Särmien (edges) lkm} \\ F &= \text{Tahkojen (faces) lkm} \end{aligned}$$

eli

$$\chi = V - E + F.$$

Huomataan, että aiemman keskustelun perusteella

$$\begin{aligned} V &= \text{0-ulotteisten monikulmioiden lkm} \\ E &= \text{1-ulotteisten monikulmioiden lkm} \\ F &= \text{2-ulotteisten monikulmioiden lkm} \end{aligned}$$

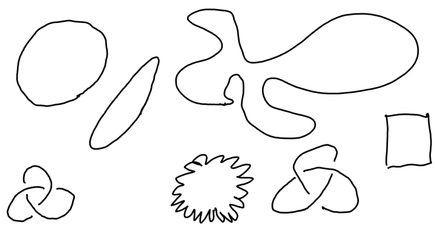
ja siis

$$\begin{aligned} \chi =& V - E + F = 1 \cdot V + (-1) \cdot E + (-1) \cdot (-1) \cdot F \\ =& (-1)^0 \cdot V + (-1)^1 \cdot E + (-1)^2 \cdot F \\ =& \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \cdot k\text{-ulotteisten monikulmioiden lkm.} \end{aligned}$$

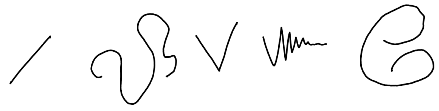
2. Pinnat ja Eulerin karakteristika

Topologia. Topologia on geometrian kaikista joustavin (tai vastaavasti karhein) ala-(tai ylä-)luokka. Kappaleita/muotoja erotellaan ainoastaan niissä määrin missä ne eroavat toisistaan "epäjatkuvilla" muunnoksilla. Jatkuvia muunnoksia ovat esimerkiksi venyttäminen, vääntäminen tai rutistaminen. Epäjatkuvia muunnoksia ovat esimerkiksi kolojen tekeminen, irrottaminen tai liimaaminen.

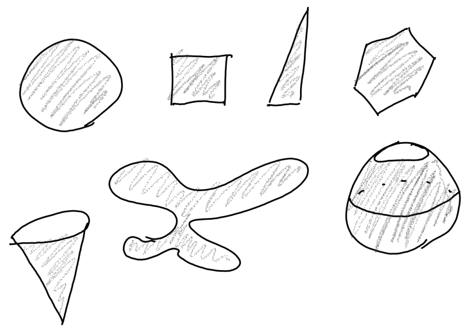
Esimerkkejä topologisista kappaleista. Kuvissa 8, 9, 10, 11, 12 ja 13.



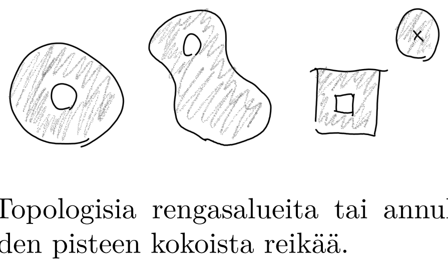
Kuva 8. Topologisia ympyröitä. Huomaa kaksi eri kätistä trefoil-solmua, jotka elävät tason sijasta kolmiulotteisessa avaruudessa.



Kuva 9. Topologisia janoja, eli yksiulotteisia monikulmioita.

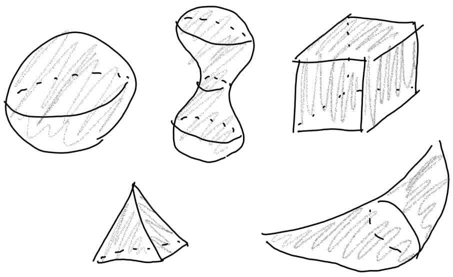


Kuva 10. Topologisia levyjä. Huomaa pallopinta, jossa on reikä, ja tötterö.



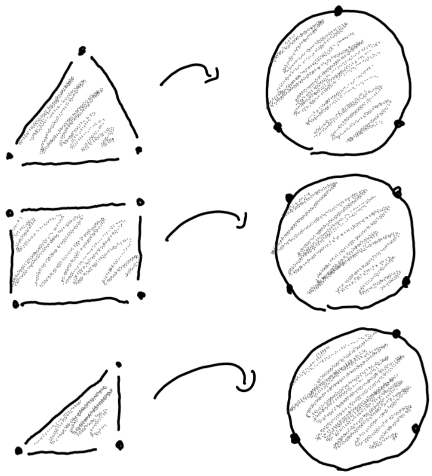
Kuva 11. Topologisia rengasalueita tai annuluksia. Rasti kuvastaa yhden pisteen kokoista reikää.

Monikulmiot topologian näkökulmasta. Topologisen näkökulman joustavuuden takia äsken käsittelemämme monikulmiot ovatkin (topologian perspektiivistä) samoja. Kaikki ovat ilmentymiä levystä/tapoja kuvata levyä. Täten emme ole enää tiilityksissämme rajoitettuja käyttämään suoria viivoja. Tärkeintä on, että jokainen "tiili" on yhä topologinen levy. Topologinen näkökulma myös tarkoittaa, ettei kolmio ole enää yksinkertaisin "monikulmio". Särmät voivat kaartua tai yksi särmä voi jopa kiertää takaisin



KUVA 12. Topologisia pallopintoja.

KUVA 13. Kaksi topologista “donitsia” (eli torusta) ja yksi “genuksen 2 pinta”.



KUVA 14. Monikulmiot venytettyinä levyiksi.

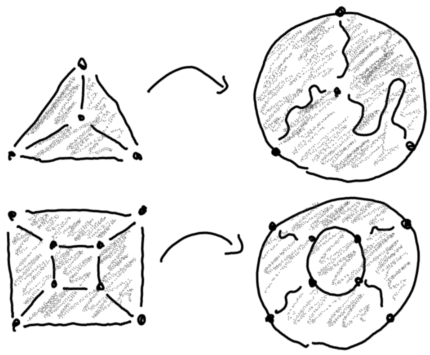
lähtökärkeensä. Topologiassa näitä “n-ulotteisia monikulmioita” kutsutaan n-soluiksi ja niistä tehtyä “tiilitystä” soluhajotelmaksi.

- Pisteet (eli *kärjet*) ovat yhä 0-ulotteisia soluja.
- Janat ja ympyrät (eli *särmät*) ovat 1-ulotteisia soluja.
- Levyt (eli *tahkot*) ovat 2-ulotteisia soluja.

On olemassa niin outoja ja patologisia topologisia esineitä, ettei niillä ole olemassa soluhajotelmaa.

Määritellään uudelleen Eulerin karakteristika.

Määritelmä 2.1 (Eulerin(-Poincarén) karakteristika)**.** *Olkoon S kappaleen soluhajotelma. Tällöin kappaleen S* ***Eulerin(-Poincarén) karakteristika***



KUVA 15. Kieroja tiilityksiä levylle.

KUVA 16. Kolmiota yksinkertaisempia “monikulmioita”.

$\chi(S)$ *(tai* χ*, jos* S *on selvä kontekstista) on*

$$\chi(S) = 0\text{-}\textit{solujen lkm} \; - \; 1\text{-}\textit{solujen lkm} \; + \; 2\text{-}\textit{solujen lkm}.$$

Olennainen fakta on seuraava.

Lause 2.2. *Jos kaksi kappaletta ovat topologian näkökulmasta samoja, niin niiden Eulerin karakteristikat* χ *ovat myös samat. Täten Eulerin karakteristika on* ***topologinen invariantti****.*

Liimaaminen. Liimaaminen ei ole jatkuva muunnos. Täten kahden kappaleen Eulerin karakteristikojen χ summa ei välttämättä ole sama kuin liimatun kappaleen.

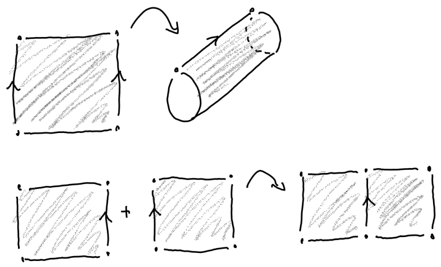
Lemma 2.3. *Olkoon* S *kaksi kappaletta* S_1 *ja* S_2 *ajateltuna yhtenä erillisenä kappaleena. Tällöin Eulerin karakteristikalle pätee*

$$\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2).$$

KUVA 17. n monta kolmiota. Lemman 2.3 mukaan $\chi = \sum_{k=1}^{n}(3-3+1) = n \cdot 1 = n$.

Lemma 2.4. *Olkoon kappaleen S_{vanha} (yhtenäinen tai erillinen) soluhajotelmassa (tai tiilityksessä) kaksi eri* 1*-solua, joiden molempien päätepisteinä on kaksi* 0*-solua (eli janoja, joilla on yhteensä neljä eri kärkeä päätepisteinä). Jos kappale liimataan yhteen näistä soluista, niin liimatulle kappaleelle S_{uusi} pätee*

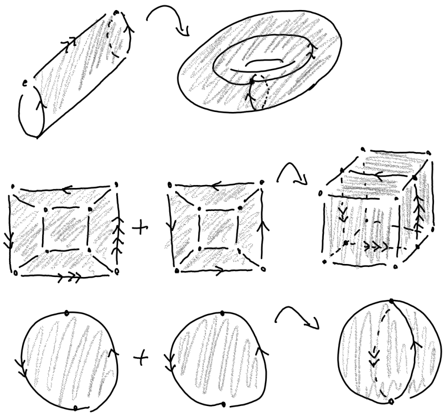
$$\chi(S_{uusi}) = \chi(S_{vanha}) - 1.$$



Kuva 18. Lemman 2.4 mukaisia liimauksia.

Lemma 2.5. *Olkoon kappaleen S_{vanha} (yhtenäinen tai erillinen) soluhajotelmassa (tai tiilityksessä) kaksi eri topologista ympyrää (eli ketjua kärkiä ja särmiä), joiden soluhajotelma on sama (eli ketjussa on sama määrä kärkiä ja särmiä). Jos kappale liimataan yhteen näistä ympyröistä, niin liimatulle kappaleelle S_{uusi} pätee*

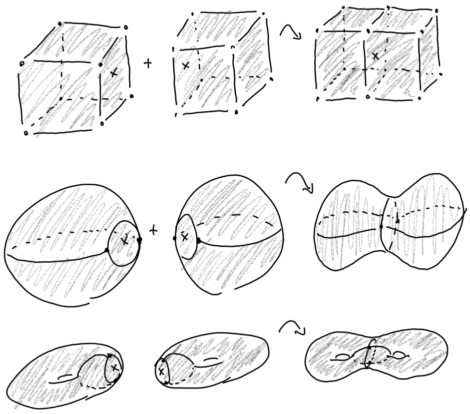
$$\chi(S_{uusi}) = \chi(S_{vanha}).$$



Kuva 19. Lemman 2.5 mukaisia liimauksia.

Lemma 2.6. *Olkoon kappaleen S_{vanha} (yhtenäinen tai erillinen) soluhajotelmassa (tai tiilityksessä) kaksi eri levyä (eli tahkoa), joita ympäröivillä ympyröillä on sama soluhajotelma (eli ketjussa on sama määrä kärkiä ja särmiä). Jos kappale liimataan yhteen näistä levyistä, niin liimatulle kappaleelle S_{uusi} pätee*

$$\chi(S_{uusi}) = \chi(S_{vanha}) - 2.$$



KUVA 20. Lemman 2.6 mukaisia liimauksia.

Näiden tulosten avulla voimme rakentaa pintoja vaihe vaiheelta monikulmioista. Kuitenkin pätee myös seuraava tulos.

Lause 2.7. *Jokainen "äärellisen kokoinen" pinta voidaan tiilittää "kolmioilla".*

Tämän avulla jokainen pinta voidaan myös leikata auki takaisin monikulmioksi. Tästä seuraavat seuraavat loistavat tulokset.

Lause 2.8. *Olkoon S_1 ja S_2* "äärellisen kokoisia" "täysin 2-ulotteisia" *pintoja "ilman reunaa". Tällöin S_1 ja S_2 ovat topologian mielessä sama kappale jos ja vain jos $\chi(S_1) = \chi(S_2)$* ***ja*** *ne ovat molemmat joko* "suunnattavissa" *tai* "ei-suunnattavissa".

Lause 2.9. *Olkoon S_1 ja S_2* "äärellisen kokoisia" "täysin 2-ulotteisia" *pintoja "1-ulotteisella reunalla". Tällöin S_1 ja S_2 ovat topologian mielessä sama kappale jos ja vain jos $\chi(S_1) = \chi(S_2)$, ne ovat molemmat joko* "suunnattavissa" *tai* "ei-suunnattavissa" ***ja*** *niillä on sama määrä reunan osia.*

Tehtävien perusteella todetaan "suunnattavilla" pinnoilla ehdon Eulerin karakteristikalle χ tarkoittavan "donitsikolojen" määrää.

Kuva 21. “ei-suunnistuva” pinta, jossa yksi “ei-suunnistuva donitsikolo”, eli Kleinin pullo upotettuna kolmiulotteiseen avaruuteen. Kuvan ottanut en:User:Lethe Wikipediassa. Lisensoitu CC-BY-SA 3.0 Unported-lisenssin alla.

.

3. Tehtäviä

(1) **Tiilittämättömiä monikulmioita**
   a) Laske Eulerin karakteristika χ tiilittämättömille monikulmioille kuvissa 1 ja 3 (niin monelle kuin huvittaa).
   b) **Bonus:** Todista mikä Eulerin karakteristika tiilittämättömälle monikulmiolle on yleisesti.

(2) **Muunulotteisten monikulmioiden Eulerin karakteristika**
   a) Laske Eulerin karakteristika χ pisteelle, eli 0-ulotteiselle monikulmiolle.
   b) Laske Eulerin karakteristika χ janalle, eli 1-ulotteiselle monikulmiolle.
   c) Laske Eulerin karakteristika χ kuutiolle (sisustallaan), eli eräälle 3-ulotteiselle monikulmiolle, laskemalla ensin Eulerin karakteristika sen pinnalle ja vähentämällä tuloksesta 1, eli

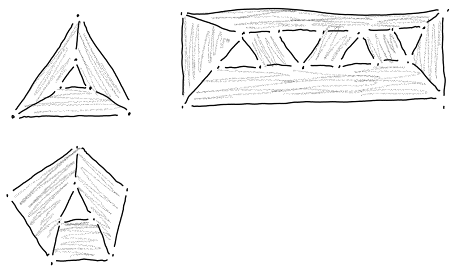
$$\chi = V - E + F - 1.$$

   Tämä -1 on $(-1)^3 \cdot$ 3-ulotteiset monikulmiot.
   d) Arvaa mikä on Eulerin karakteristika χ n-ulotteiselle monikulmiolle.

(3) **Eulerin karakteristikan tiilitysinvarianssi**
   a) Laske Eulerin karakteristika χ tiilitetyille monikulmioille kuvassa 4 (niin monelle kuin huvittaa).

b) Lisää jonkin tiilityksen monikulmion särmälle uusi kärki. Miten tämä vaikuttaa Eulerin karakteristikaan χ?
c) Lisää jonkin tiilityksen ei-kolmiomaiselle monikulmiolle uusi särmä kahden sen kärjen välille. Miten tämä vaikuttaa Eulerin karakteristikaan χ?
d) Poista jonkin tiilityksen kahden monikulmion väliltä särmä siten, että tämä yhdistynyt tason alue on yhä monikulmio. Miten tämä vaikuttaa Eulerin karakteristikaan χ?
e) Suorista jotkin kaksi tiilityksen jonkin monikulmion särmää poistamalla niiden välistä kärki. Miten tämä vaikuttaa Eulerin karakteristikaan χ?
f) **Bonus:** Päättele (eli viimeistele todistus), että kaikilla tietyn tasokappaleen tiilityksillä Eulerin karakteristika on vakio, eli se on **monikulmion invariantti**.

(4) **Kolojen vaikutus Eulerin karakteristikaan**



KUVA 22. Monikulmioita koloilla

a) Laske Eulerin karakteristika χ kuvan 22 monikulmioille, joissa on koloja.
b) Arvaa (**Bonus:** tai todista) kaava monikulmion, jossa on n koloa Eulerin karakteristikalle χ. Voit käyttää apunasi tehtävän 3.f) tulosta.

(5) **Särmästä liimaaminen**
a) Laske Eulerin karakteristika χ kuvan 18 kappaleille.
b) Etsi kappale, jonka kanssa liimaaminen lemman 2.4 mukaisesti ei muuta Eulerin karakteristikaa?
c) **Bonus:** Todista lemma 2.4.

(6) **Ympyrästä liimaaminen**
a) Laske Eulerin karakteristika χ kuvan 19 kappaleille.
b) Etsi kappale, jonka kanssa liimaaminen lemman 2.5 mukaisesti ei muuta Eulerin karakteristikaa?
c) **Bonus:** Todista lemma 2.5.

(7) **Levystä liimaaminen**
a) Laske Eulerin karakteristika χ kuvan 20 kappaleille.
b) Etsi kappale, jonka kanssa liimaaminen lemman 2.6 mukaisesti ei muuta Eulerin karakteristikaa?
c) **Bonus:** Todista lemma 2.6.

(8) **Donitsikolot** Laske Eulerin karakteristika pinnalle, jossa on n monta "donitsikoloa".

a) Käyttäen tehtävän 4.b) tulosta ja lemmaa 2.5.
b) Käyttäen tehtävän 6.a) tulosta ja lemmaa 2.6.