

Eulerin karakteristika pinnoille

Emilia Takanen
emilia.takanen@aalto.fi
math.aalto.fi/~takanee2/

Ladottu 9. joulukuuta 2025

Kuka olen?

- Tehnyt matikkaa nyt noin yhdeksän vuotta.
 - Nykyään tohtorikoulutettava Aallon matematiikan laitoksella.
 - Valmistunut pari vuotta sitten maisteriksi Helsingin yliopiston matematiikan laitokselta.
 - Ei harrastustaustaa matikassa. Lukiokin meni vähän miten meni. Matikkaan voi siis aivan hyvin lähteä mukaan vasta yliopistossa.
- Teen geometriaa, eli erilaisten “muotojen” tutkimusta, algebran menetelmin, eli käyttäen laskettavia rakenteita omaavia “asioita”.
 - Tänään esittelen hieman tämäntyyppistä tutkimusta tapauksessa, jossa “muodot” ovat 2-ulotteisia, eli visualisoitavissa, ja algebralliset “asiat” ovat pelkkiä kokonaislukuja.

Kysykää vapaasti jos jokin esityksessä hämmentää tai mietityttää!

Esitelmän runko on seuraavanlainen.

1 Tason monikulmiot

- Tason monikulmion määritelmä
- Monikulmioiden tiilittäminen
- Mitä tarkoittaa ulottuvuus?
- Algebrallinen “asia”, Eulerin karakteristika

2 Topologia

- Mitä on topologia?
- Esimerkkejä erilaisista topologisista “muodoista”
- Miltä aiemmat määritelmät näyttävät “topologisessa perspektiivissä”?

3 Pintojen rakentaminen

- Liimaamisen vaikutus Eulerin karakteristikaan
- Pintojen luokittelu

Monikulmion määritelmä

Määritelmä (Monikulmio mutulla)

Mutulla mietittynä monikulmio on kokoelma *kärkiä* ja *särmiä*, jotka rajaavat sisäänsä *tahkon*.

Matikassa haluamme kuitenkin hieman tarkemman määritelmän.

Määritelmä (Monikulmio tarkasti)

- 1 *Kärjet* ovat jokin joukko tason pisteitä
- 2 Jokaisesta kärjestä lähtee kaksi janaa/viivaa (*särmää*) johonkin toiseen kärkeen
- 3 Näiden särmien täytyy muodostaa *ketju* (*sykli*).
- 4 Tämä ketju rajaa alueen, joka on monikulmion *tahko*.

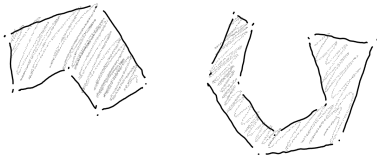


Kuva: Säännöllisiä monikulmioita

Esimerkkeitä monikulmioista



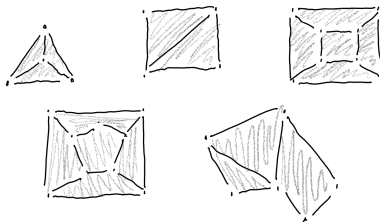
Kuva: Vinoja monikulmioita



Kuva: Mutkikkaita monikulmioita

Tiilittäminen

Monikulmioita voi *tiilittää*.



Kuva: Tiilitettyjä monikulmioita

Voimme jatkaa tätä tiilittämistä kunnes kaikki tiilit ovat kolmioita.

Väite! Kolmio on “yksinkertaisin” tason monikulmio.

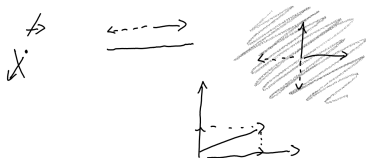
Miksi? Oletetaan, että kärkiä on ainoastaan kaksi. Tällöin särmiä on välttämättä vain yksi. Tämä särmä ei voi yksikseen muodostaa ketjua eikä täten rajata tahkoa. Täten kuvitteellisessa monikulmiossa ei olekaan mitään “kaksiulotteista”.

Mitä tarkoittaa ulottuvuus?

Määritelmä (Ulottuvuus helposti)

Kappaleen ulottuvuus kertoo kuinka moneen eri *itsenäiseen* suuntaan voimme liikkua *kappaleen sisällä*.

- **Piste** on 0-ulotteinen.
- **Viiva** on 1-ulotteinen.
- **Alue** on 2-ulotteinen.



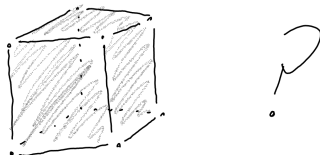
Kuva: Liikkumisen suuntia 0-, 1- ja 2-ulotteisten kappaleiden sisällä.

Tärkeä huomio! Ulottuvuus on kappaleen “itseinen” tai “sisäinen” ominaisuus.

Eriulotteisia monikulmioita

Aletaan joustamaan monikulmion määritelmässä.

- Piste on 0-ulotteinen monikulmio.
- Jana kahden pisteen välillä on 1-ulotteinen monikulmio.
- Esimerkiksi kuutio (sisustallaan) on 3-ulotteinen monikulmio (tai monitahokas).
- Vastaavasti on olemassa n -monikulmioita kaikille ulottuvuuksille $n \in \mathbb{N}$ (n kuuluu luonnollisten lukujen joukkoon).



Kuva: Kuutio, 3-ulotteinen monikulmio, ja kysymysmerkki kuvastamaan n -ulotteista monikulmiota, kun $n \geq 4$.

Eulerin(-Poincarén) karakteristika

Pääsemme lopulta asiaan.

Määritelmä (Invariantti)

Kappaleen *invariantti* on matemaattinen esine (esim. luku) joka riippuu ainoastaan kappaleen “muodosta” jollain valitulla karkeudella.

Invariantit ovat (mielestäni) fundamentaalisin keksintö modernissa matematiikassa.

Määritelmä (Eulerin(-Poincarén) karakteristika)

Olkoon S tiilitetty tasokappale. Kappaleen S **Eulerin(-Poincarén) karakteristika** $\chi(S)$ (χ on chi) on

$$\chi(S) = \text{Kärkien lkm} - \text{Särmien lkm} + \text{Tahkojen lkm}.$$

Lasketaan Eulerin karakteristikkaa



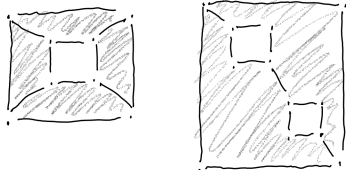
- Neliöllä on 4 kärkeä, 4 särmää ja 1 tahko. Täten

$$\chi = 4 - 4 + 1 = 1.$$

- Kahteen kolmioon jaetulla neliöllä on 4 kärkeä, 5 särmää ja 2 tahkoa. Täten

$$\chi = 4 - 5 + 2 = 1.$$

Lasketaan Eulerin karakteristikkaa



- Neliöllä, jossa on neliönmuotoinen reikä on 8 kärkeä, 12 särmää ja 4 tahkoa. Täten

$$\chi = 8 - 12 + 4 = 0.$$

- Neliöllä, jossa on kaksi neliönmuotoista reikää on 12 kärkeä, 15 särmää ja 2 tahkoa. Täten

$$\chi = 12 - 15 + 2 = -1.$$

Eulerin karakteristikan määritelmä ulottuvuuksien kautta

Monesti kirjoitetaan

V = Kärkien (vertices) lkm

E = Särmien (edges) lkm

F = Tahkojen (faces) lkm

eli

$$\chi = V - E + F.$$

Huomataan, että aiemman keskustelun perusteella

V = 0-ulotteisten monikulmioiden lkm

E = 1-ulotteisten monikulmioiden lkm

F = 2-ulotteisten monikulmioiden lkm

Pyöritellään (muista että $(-1)(-1) = 1$)

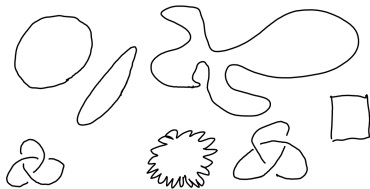
$$\begin{aligned}\chi &= V - E + F = 1 \cdot V + (-1) \cdot E + (-1) \cdot (-1) \cdot F \\ &= (-1)^0 \cdot V + (-1)^1 \cdot E + (-1)^2 \cdot F \\ &= \sum_{k=0}^2 (-1)^k \cdot k\text{-ulotteisten monikulmioiden lkm.}\end{aligned}$$

Määritelmä (“Yleistajuinen” määritelmä topologialle)

Topologia on geometrian kaikista joustavin (tai vastaavasti karhein) ala-(tai ylä-)luokka. Kappaleita/muotoja erotellaan ainoastaan niissä määrin missä ne eroavat toisistaan “epäjatkuvilla” muunnoksilla.

- Jatkuvia muunnoksia ovat esimerkiksi venyttäminen, vääntäminen tai rutistaminen.
- Epäjatkuvia muunnoksia ovat esimerkiksi kolojen tekeminen, irrottaminen tai liimaaminen.

Yksiulotteisia topologisia esineitä

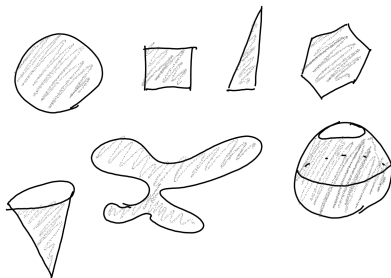


Kuva: Topologisia ympyröitä. Huomaa kaksi eri kätistä trefoil-solmua, jotka elävät tason sijasta kolmiulotteisessa avaruudessa.



Kuva: Topologisia janoja, eli yksiulotteisia monikulmioita.

“Reunallisia” pintoja

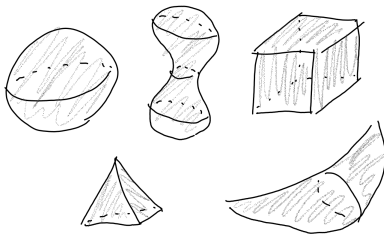


Kuva: Topologisia levyjä. Huomaa pallopinta, jossa on reikä, ja tötterö.



Kuva: Topologisia rengasalueita tai annuluksia. Rasti kuvastaa yhden pisteen kokoista reikää.

“Reunattomia” pintoja



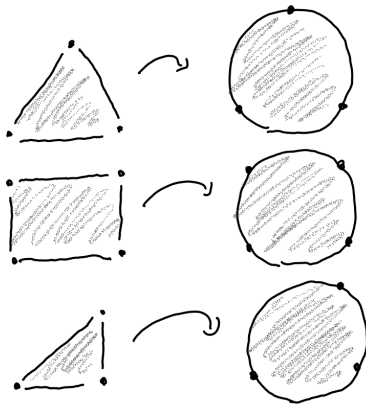
Kuva: Topologisia pallopintoja.



Kuva: Kaksi topologista “donitsia” (eli torusta) ja yksi “genuksen 2 pinta”.

Monikulmioiden venyttäminen

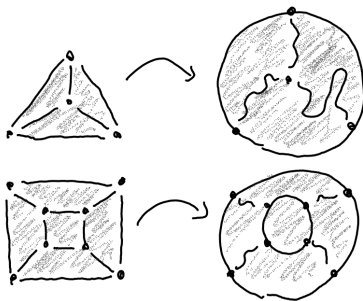
Topologisen näkökulman joustavuuden takia äsken käsittelemämme monikulmiot ovatkin (topologian perspektiivistä) samoja. Kaikki ovat ilmentymiä levystä/tapoja kuvata levyä.



Kuva: Monikulmiot venytettyinä levyiksi.

Tiilittäminen uudestaan

Täten emme ole enää tiilityksissämme rajoitettuja käyttämään suoria viivoja. Tärkeintä on, että jokainen “tiili” on yhä topologinen levy.



Kuva: Kieroja tiilityksiä levyille.

Yksinkertaisin monikulmio uudestaan

Topologinen näkökulma myös tarkoittaa, ettei kolmio ole enää yksinkertaisin “monikulmio”. Särmät voivat kaartua tai yksi särmä voi jopa kiertää takaisin lähtökärkeensä.



Kuva: Kolmiota yksinkertaisempia “monikulmioita”.

Topologiassa näitä “ n -ulotteisia monikulmioita” kutsutaan n -soluiksi ja niistä tehtyä “tiilitystä” soluhajotelmaksi.

- Pisteet (eli *kärjet*) ovat yhä 0-ulotteisia soluja.
- Janat ja ympyrät (eli *särmät*) ovat 1-ulotteisia soluja.
- Levyt (eli *tahkot*) ovat 2-ulotteisia soluja.

On olemassa niin outoja ja patologisia topologisia esineitä, ettei niillä ole olemassa soluhajotelmaa.

Eulerin karakteristika uudestaan

Määritellään uudelleen Eulerin karakteristika.

Määritelmä (Eulerin(-Poincarén) karakteristika)

Olkoon S soluhajotelmaan hajotettu kappale. Kappaleen S
Eulerin(-Poincarén) karakteristika $\chi(S)$ on

$$\chi(S) = 0\text{-solujen lkm} - 1\text{-solujen lkm} + 2\text{-solujen lkm}.$$

Olennainen fakta on seuraava.

Lause

*Jos kaksi kappaletta ovat topologian näkökulmasta samoja, niiden Eulerin karakteristikat χ ovat myös samat. Täten Eulerin karakteristika on **topologinen invariantti**.*

Eulerin karakteristika summaamisessa

Lemma

Jos ajattelemme kahta kappaletta S_1 ja S_2 yhtenä yhtenäisenä kappaleena S , niin

$$\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2).$$



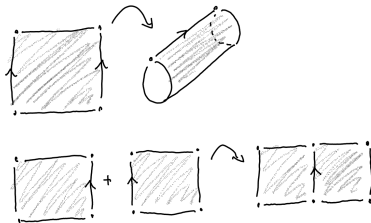
Kuva: n monta kolmiota. Lemman mukaan $\chi = \sum_{k=1}^n (3 - 3 + 1) = n \cdot 1 = n$.

Eulerin karakteristika särmästä liimatessa

Lemma

Jos liimaamme kappaletta S_{vanha} yksittäisestä janasta/särmästä ja saamme S_{uusi} , niin

$$\chi(S_{uusi}) = \chi(S_{vanha}) - 1.$$



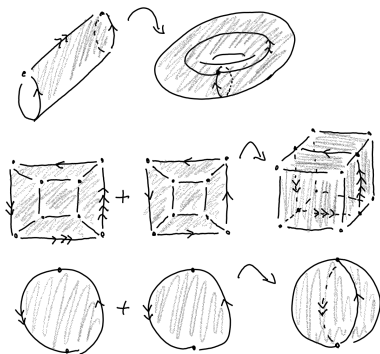
Kuva: Lemman mukaisia liimauksia.

Eulerin karakteristika ympyrästä liimatta

Lemma

Jos liimaamme kappaletta S_{vanha} ketjusta/ympyrästä ja saamme S_{uusi} , niin

$$\chi(S_{\text{uusi}}) = \chi(S_{\text{vanha}}).$$



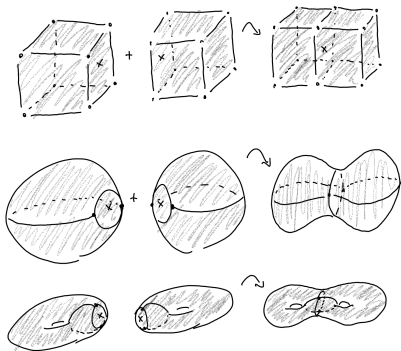
Kuva: Lemman mukaisia liimauksia.

Eulerin karakteristika tahkosta liimatessa

Lemma

Jos liimaamme kappaletta S_{vanha} levystä/tahkosta ja saamme S_{uusi} , niin

$$\chi(S_{uusi}) = \chi(S_{vanha}) - 2.$$



Kuva: Lemman mukaisia liimauksia.

Kohti luokittelutulosta

Tavoitteemme on saada luokittelu pinnoille niiden Eulerin karakteristikan kautta.

Olemme oppineet kuinka rakentaa kappaleita yksinkertaisemmista osista pysyen samalla kärryllä Eulerin karakteristikasta. Haluaisimme kuitenkin myös tietää voivamme hajottaa kappaleita.

Nämä hajoitetut kappaleet (sisältäen tiedon siitä miten ne liimataan takaisin) ovat luokiteltavissa ja täten saamme luokittelun alkuperäisille pinnoille

Seuraava tulos vaikuttaa ilmiselvältä. Matematiikassa joudumme kuitenkin tarkasti varmistamaan, ettemme vahingossa kohta patologisia esineitä.

Lause

Jokainen “äärellisen kokoinen” pinta voidaan tiilittää “kolmioilla”.

Tämä tiilitys on tarpeeksi rakennetta pinnan leikkaamiseksi auki.

Luokittelutulokset

Lopulta saamme seuraavat loistavat tulokset

Lause

*“Äärellisen kokoiset” pinnat S_1 ja S_2 “ilman reunaa” ovat topologisesti samoja jos ja vain jos $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ **ja** ne ovat molemmat joko “suunnattavissa” tai “ei-suunnattavissa”.*

Lause

*“Äärellisen kokoiset” pinnat “1-ulotteisella reunalla” ovat topologisesti samoja jos ja vain jos $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ **ja** ne ovat molemmat joko “suunnattavissa” tai “ei-suunnattavissa” **ja** niillä on sama määrä reunan osia.*

Donitsikolot

Suunnistuvilla pinnoilla Eulerin karakteristikalle pätee

$$\chi = 2 - 2 \cdot \text{donitsikolojen lkm}$$

Ei-suunnattavilla asia on samoin, mutta “ei-suunnistuvat donitsikolot” ovat hieman vaikeita hahmottaa.



Kuva: “ei-suunnistuva” pinta, jossa yksi “ei-suunnistuva donitsikolo”, eli Kleinin pullo upotettuna kolmiulotteiseen avaruuteen. Kuvan ottanut en:User:Lethe Wikipediassa. Lisensoitu CC-BY-SA 3.0 Unported-lisenssin alla.

Kiitos kuuntelemisesta :-)
Kysymyksiä? Mietteitä? Fiiliksiä?