

MS-C1530 Käyrät ja pinnat

Riikka Kangaslampi ja Kirsi Peltonen

Syksy 2015

Sisällys

Alkusanat	5
I Käyrät	7
1 Taso- ja avaruuskäyrät	9
2 Käyrän kaarevuus	13
3 Frenet-kehykset ja torsio	21
4 Tasokäyrien globaalia teoriaa	37
II Pinnat	45
5 \mathbb{R}^3 :n pinnat	47
5.1 Parametrisoidut pinnat	47
5.2 Käänteiskuvauslauseen sovelluksia	57
6 Ensimmäinen perusmuoto	61
6.1 Ensimmäisen perusmuodon määritelmä	61
6.2 Isometriat	64
6.3 Pintojen konformikuvaukset	66
6.4 Pinta-ala	71
7 Toinen perusmuoto	75
7.1 Toisen perusmuodon määritelmä	75
7.2 Normaalikaarevuus ja geodeettinen kaarevuus	77
7.3 Pääkaarevuudet	80
7.4 Pääkaarevuuksien geometrinen tulkinta	89

8	Gaussin kaarevuus ja Gaussin lause	95
8.1	Pinnan Gaussin kaarevuus	95
8.2	Gaussin kaarevuuden geometrinen tulkinta	97
8.3	Geodeesit	100
8.4	Gaussin lause (Theorema egregium)	104
9	Gauss–Bonnet’n lause	109
9.1	Gauss–Bonnet’n lause käyrille	109
9.2	Gauss–Bonnet’n lause monikulmioille	113
9.3	Gauss–Bonnet’n lause kompakteille pinnoille	117
	Hakemisto	123

Alkusanat

Tämä luentomoniste on kirjoitettu Kirsi Peltosen aiempien käsin kirjoittamien luentomuistiinpanojen pohjalta keväällä 2012 kurssia Mat-1.3530 Johdatus differentiaaligeometriaan varten, hieman lisäillen, muokaten ja täydentäen. Sama kurssi kulkee nykyään nimellä MS-C1530 Käyrät ja pinnat. Moniste on edelleen keskeneräinen, useimmat kuvat puuttuvat ja tekstissäkin on epätäsmällisyyksiä. Lukujen 4 ja 5.1 kuvista kiitän Timo Weckmania kevään 2014 kurssilta, geodeesiesimerkistä 8.11 Alex Karrilaa. Pyydän huomauttamaan minulle kaikista virheistä ja epäselvyyksistä.

Luentomonisteen ohella suosittelen luettavaksi Andrew Pressleyn erinomaista kirjaa Elementary Differential Geometry.

Espoossa 28.10.2015

Riikka Kangaslampi
riikka.kangaslampi@aalto.fi

Part I

Käyrät

Luku 1

Taso- ja avaruuskäyrät

Tarkastellaan polkuja ja käyriä euklidisessa avaruudessa:

Määritelmä 1.1. Polku on jatkuva kuvaus $c : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a < b$.

Määritelmä 1.2. Käyrä on polun kuvajoukko $c(I) \subset \mathbb{R}^n$, jota merkitään usein myös $|c|$. Käyrää sanotaan suljetuksi, jos $I = [a, b]$ ja $c(a) = c(b)$.

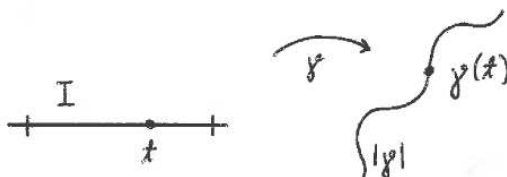


Figure 1.1: Polku ja sen määräämä käyrä

Polku vastaa siis jatkuvasti parametrisoitua käyrää. Kahden eri polun määräämät käyrät voivat olla samat: käyrää pitkin voidaan esimerkiksi kulkea eri nopeuksilla tai mikäli käyrä on suljettu, kiertää sitä useita kertoja.

Määritelmä 1.3. Säännöllinen polku on polku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ siten, että

- (1) on olemassa derivaatat $c'(t)$, $c''(t)$, \dots , $c^{(k)}(t)$, \dots (päätepisteissä toispuoleisesti) kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $t \in I = [a, b]$;
- (2) $c'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$.

Esimerkki 1.4. Polku $t \mapsto c(t) = (at, bt)$ on suoran standardi parametrisointi. Sille $c'(t) = (a, b) \neq 0$, joten polku on säännöllinen. Polulle $s \mapsto \tilde{c}(s) = (as^3, bs^3)$ pätee $\tilde{c}'(0) = (0, 0)$, joten se ei ole säännöllinen. Kuitenkin polut c ja \tilde{c} määräävät saman käyrän, $|c| = |\tilde{c}|$.

Määritelmä 1.5. Polun c *pituus* on

$$l(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt,$$

missä $\|\cdot\|$ on \mathbb{R}^n :n tavallinen normi.

Tulkinta: $c'(t)$ on polun pisteeseen $c(t)$ liittyvä tangenttivektori:

$$c(t+h) - c(t) = c'(t)h + h\varepsilon(t, h),$$

missä $\varepsilon(t, h) \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$.

Määritelmä 1.6. Käyrän *parametrisointi kaarenpituuden suhteen* on säännöllinen polku $t \mapsto c(t)$ s.e. pätee $\|c'(t)\| = 1$ kaikilla $t \in [a, b]$.

Lause 1.7. *Säännöllinen polku voidaan parametrisoida kaarenpituuden suhteen.*

Todistus. Olkoon $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ säännöllinen polku. Sen pituus on

$$L = l(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Asetetaan parametriväliksi $[0, L]$ ja määritellään kuvaus $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, L]$ siten, että

$$s = \varphi(t) = \int_a^t \|c'(t)\| dt.$$

Nyt pätee $\varphi'(t) = \|c'(t)\| \neq 0$, koska $\tilde{t} \mapsto \|c'(\tilde{t})\|$ on jatkuva kuvaus. Siis $t \mapsto \varphi(t)$ on aidosti kasvava, joten sillä on olemassa käänteisfunktio $\varphi^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$. Polku $s \mapsto \tilde{c}(s) := c(\varphi^{-1}(s))$ on sileä parametrisointi kaarenpituuden suhteen: sileys seuraa käänteiskuvauslauseesta ja

$$\tilde{c}'(s) = c'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s) = c'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

eli $\|\tilde{c}'(s)\| = 1$ kaikilla $s \in [0, L]$. □

Huomio: Parametrisointi kaarenpituuden suhteen on translaatiota $s \mapsto \pm s + s_0$ vaille yksikäsitteinen. Vastaavasti säännöllisen polun pituus on riippumaton parametrisoinnista. (HT)

Lemma 1.8. *Jos säännöllinen polku c on parametrisoitu kaarenpituuden suhteen, niin $c''(t) \perp c'(t)$ kaikilla $t \in [0, L]$.*

Todistus. Koska polku on parametrisoitu kaarenpituuden suhteen, $\|c'(t)\| = 1$, eli $c'(t) \cdot c'(t) = 1$. Derivoidaan tämä puolittain:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt}(c'(t) \cdot c'(t)) \\ &= c''(t) \cdot c'(t) + c'(t) \cdot c''(t) = 2c''(t) \cdot c'(t), \end{aligned}$$

joten $c''(t) \cdot c'(t) = 0$, eli $c''(t) \perp c'(t)$. \square

Esimerkki 1.9. 1. Suoran standardi parametrisointi $t \mapsto c(t) = (at, bt)$ on parametrisointi kaarenpituuden suhteen, joss $\|c'(t)\| = \|(a, b)\| = (a^2 + b^2)^{1/2} = 1$, eli $a^2 + b^2 = 1$.

2. Ympyrän parametrisointi $t \mapsto c(t) = \frac{1}{2}(\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in [0, \pi]$, on parametrisointi kaarenpituuden suhteen, sillä

$$c'(t) = (-\sin 2t, \cos 2t) \Rightarrow \|c'(t)\| = 1.$$

3. Ympyräspiraalin parametrisointi $t \mapsto c(t) = (a \cos \alpha t, a \sin \alpha t, bt)$ voidaan muokata parametrisoinniksi kaarenpituuden suhteen seuraavasti:

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-a\alpha \sin \alpha t, a\alpha \cos \alpha t, b) \\ \Rightarrow \|c'(t)\| &= \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} = \text{vakio} =: \beta \end{aligned}$$

Näin ollen

$$s \mapsto \tilde{c}(s) = \left(a \cos \frac{\alpha}{\beta} s, a \sin \frac{\alpha}{\beta} s, \frac{b}{\beta} s \right)$$

on ympyräspiraalin parametrisointi kaarenpituuden suhteen.

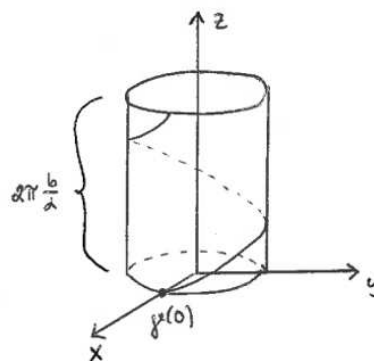


Figure 1.2: Ympyräspiraali ympyrälieriön pinnalla

Geometrisesti tilanne voidaan tulkita seuraavasti: Piste $c(0) = (a, 0, 0)$ rata ruuviliikkeessä on

$$a_t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ \sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{pyörittäminen } xy\text{-tasossa}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ bt \end{pmatrix}}_{\text{siirto}}$$

4. Neilen¹ paraabelilla $t \mapsto c(t) = (t^2, t^3)$ ei ole säännöllistä parametrisointia, sillä $c'(t) = (2t, 3t^2)$, eli $c'(0) = (0, 0)$, joten paraabelilla ei ole tangenttia origossa.

Huom: parametrisointi on silti sileä!

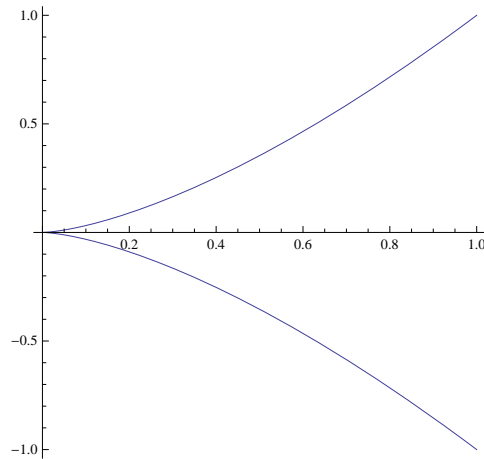


Figure 1.3: Neilen paraabeli

¹William Neile (1637, Äi1670), englantilainen matemaatikko

Luku 2

Käyrän kaarevuus

Määritelmä 2.1. Olkoon $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku. Sen *kaarevuus* pisteessä $t \in [a, b]$ on

$$\kappa(t) = \|c''(t)\|.$$

Esimerkki 2.2. Tarkastellaan (x_0, y_0) -keskistä R -säteistä ympyrää $t \mapsto c(t) = (x_0 + R \cos \frac{t}{R}, y_0 + R \sin \frac{t}{R}, 0)$, $t \in [0, 2\pi R]$. Nyt

$$c'(t) = \left(-\sin \frac{t}{R}, \cos \frac{t}{R}, 0 \right), \quad \|c'(t)\| = 1$$

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R}, 0 \right), \quad \|c''(t)\| = \frac{1}{R} \equiv \kappa$$

(Muistutus: Lemman 1.8 mukaan $c''(t) \perp c'(t)$, kun c on parametrisoitu kaarenpituuden suhteen.)

Kaarevuuden on oltava riippumaton parametrisoinnista. Jos c ei ole määritelty kaarenpituuden suhteen, niin pätee:

Lause 2.3. *Olkoon c \mathbb{R}^3 :n säännöllinen polku. Tällöin sen kaarevuudelle pätee*

$$\kappa = \frac{\|c'' \times c'\|}{\|c'\|^3}.$$

Todistus. Olkoon $c(t) = \tilde{c}(\varphi(t))$, missä $s = \varphi(t)$ on parametri kaarenpituuden suhteen. Polun \tilde{c} kaarevuus pisteessä s on

$$\kappa(s) = \|\tilde{c}''(s)\| = \frac{\|\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|^3},$$

sillä $\|\tilde{c}'(s)\| = 1$ ja lemmän 1.8 mukaan $\tilde{c}''(s) \perp \tilde{c}'(s)$.

Koska $c'(t) = \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi'(t)$, niin

$$\tilde{c}'(s) = \frac{c'(t)}{\varphi'(t)} \quad (\text{huom: } \varphi' = \|c'\| > 0)$$

ja

$$c''(t) = \tilde{c}''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi''(t).$$

Tästä seuraa, että

$$\tilde{c}''(s) = \frac{c''(t)}{(\varphi'(t))^2} - \frac{\tilde{c}'(s)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} = \frac{c''(t)}{(\varphi'(t))^2} - \frac{c'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

joten

$$\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s) = \frac{c''(t) \times c'(t)}{(\varphi'(t))^3} - \underbrace{c'(t) \times c'(t)}_{=0} \frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^4},$$

eli

$$\|\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s)\| = \frac{\|c''(t) \times c'(t)\|}{(\varphi'(t))^3}.$$

Näin ollen

$$\kappa(s) = \|\tilde{c}''(s)\| = \frac{\|\tilde{c}''(s) \times \tilde{c}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|^3} = \frac{\|c''(t) \times c'(t)\|}{\|c'(t)\|^3},$$

sillä $\|\tilde{c}'(s)\| = \frac{\|c'(t)\|}{\varphi'(t)}$. □

Määritelmä 2.4. Jos c on kaarenpituuden suhteen parametrisoitu tasopolku $|c| \subset \mathbb{R}^2$, niin voidaan erikseen määritellä polun c suunnattu kaarevuus κ_s ehdosta $c'' = \kappa_s n_s$, missä $n_s(t)$ on pisteeseen $c(t)$ liittyvä normaalivektori, joka saadaan kiertämällä tangenttivektoria $c'(t)$ kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan. Tällöin $\|n_s\| = 1$ ja $\kappa = \|c''\| = \|\kappa_s n_s\| = |\kappa_s|$.

Huom: Lemman 1.8 ansiosta κ_s :n määritelmä on järkevä.

Tasokäyrän suunnattu kaarevuus voidaan geometrisesti tulkita seuraavasti:

Lause 2.5. *Olkoon c kaarenpituuden suhteen parametrisoitu tasokäyrä ja $\varphi(s)$ kiinteän yksikkövektorin ja tangenttivektorin $c'(s)$ välinen kulma pisteessä $c(s)$, mitattuna positiiviseen kiertosuuntaan. Tällöin pätee*

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Huom 2.6. • $\varphi \in [0, 2\pi) \pmod{2\pi}$

• $\frac{d\varphi}{ds}$ on mielekäs

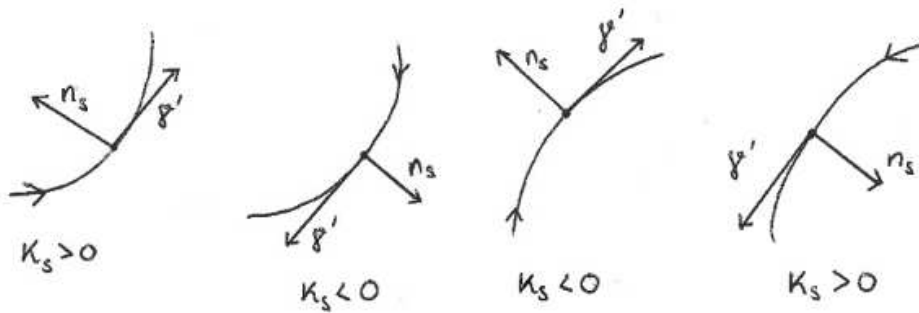


Figure 2.1: Esimerkkejä positiivisesta ja negatiivisesta suunnatus kaarevuudesta

- $\kappa_s > 0 \iff c'$ pyörii positiiviseen kiertosuuntaan, kun s kasvaa
- $\kappa_s < 0 \iff c'$ pyörii negatiiviseen kiertosuuntaan, kun s kasvaa

Todistus. Olkoon a kiinteä yksikkövektori (pisteessä $c(s)$) ja b vektori, joka saadaan vektorista a kiertämällä kulman $\pi/2$ verran positiiviseen kiertosuuntaan. Tällöin pätee

$$c'(s) = a \cos \varphi(s) + b \sin \varphi(s).$$

Tästä seuraa, että

$$c''(s) = (-a \sin \varphi(s) + b \cos \varphi(s))\varphi'(s)$$

joten

$$\kappa_s n_s \cdot a = c''(s) \cdot a = -(\sin \varphi(s))\varphi'(s).$$

Koska vektorien n_s ja a välinen kulma on $\varphi + \frac{\pi}{2}$, pätee

$$n_s \cdot a = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi.$$

Näin olen $\kappa_s = \varphi'(s)$. □

Kysymys: Jos suunnattu kaarevuus tunnetaan, määräytyykö käyrä yksikäsitteisesti?

Vastaus: Oleellisesti kyllä, nimittäin tason jäykkää liikettä vaille yksikäsitteisesti.

Määritelmä 2.7. Tason *jäykkä liike* on muotoa $M = T_a \circ R_\theta$, missä R_θ on tason kierto kulman θ verran positiiviseen kiertosuuntaan

$$R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

ja T_a on translaatio $T_a(v) = v + a$ kaikilla $v \in \mathbb{R}^2$.

Lause 2.8. *Olkoon $k : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ sileä funktio. Tällöin löytyy kaarenpituuden suhteen parametrisoitu polku $c : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$, jonka suunnattu kaarevuus $\kappa_s(t) = k(t)$ kaikilla $t \in (\alpha, \beta)$. Jos $\tilde{c} : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ on jokin toinen polku, jonka suunnattu kaarevuus on $k(t)$ kaikilla $t \in (\alpha, \beta)$, niin löytyy tason jäykkä liike siten, että $\tilde{c}(t) = M(c(t))$ kaikilla $t \in (\alpha, \beta)$.*

Todistus. Konstruoidaan ensin polku c : Olkoon $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ja asetetaan

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t k(u) du$$

(vertaa lauseen 2.5 todistus) ja

$$c(t) = \left(\int_{t_0}^t \cos \varphi(u) du, \int_{t_0}^t \sin \varphi(u) du \right),$$

jolloin $c'(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$ (lauseen 2.5 todistuksen idean mukaisesti, kun a ja b ovat vastaavia x ja y koordinaatteja). Nyt $\|c'(t)\| = 1$ ja lauseesta 2.5 seuraa, että

$$\kappa_s(t) = \varphi'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t k(u) du \right) = k(t).$$

Tämä todistaa ensimmäisen väitteen.

Olkoon sitten \tilde{c} toinen lauseen mukainen polku ja $\tilde{\varphi}(t)$ positiivisen x -akselin ja $\tilde{c}'(t)$:n välinen kulma pisteessä $\tilde{c}(t)$. Nyt $\tilde{c}'(t) = (\cos \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\varphi})$, joten

$$\tilde{c}(t) = \left(\int_{t_0}^t \cos \tilde{\varphi}(u) du, \int_{t_0}^t \sin \tilde{\varphi}(u) du \right) + \tilde{c}(t_0). \quad (2.1)$$

Lauseen 2.5 mukaan $\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = k(t)$, joten

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_{t_0}^t k(u) du + \tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(t) + \tilde{\varphi}(t_0).$$

Merkitään $a := \tilde{c}(t_0)$ ja $\theta := \tilde{\varphi}(t_0)$. Tällöin yhtälöstä (2.1) saadaan

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(t) &= T_a \left(\int_{t_0}^t \cos \tilde{\varphi}(u) du, \int_{t_0}^t \sin \tilde{\varphi}(u) du \right) \\
&= T_a \left(\int_{t_0}^t \cos(\varphi(u) + \theta) du, \int_{t_0}^t \sin(\varphi(u) + \theta) du \right) \\
&= T_a \left(\int_{t_0}^t (\cos \varphi(u) \cos \theta - \sin \varphi(u) \sin \theta) du, \int_{t_0}^t (\sin \varphi(u) \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi(u)) du \right) \\
&= T_a \left(\cos \theta \int_{t_0}^t \cos \varphi(u) du - \sin \theta \int_{t_0}^t \sin \varphi(u) du, \right. \\
&\quad \left. \cos \theta \int_{t_0}^t \sin \varphi(u) du + \sin \theta \int_{t_0}^t \cos \varphi(u) du \right) \\
&= T_a R_\theta \left(\int_{t_0}^t \cos \varphi(u) du, \int_{t_0}^t \sin \varphi(u) du \right) \\
&= T_a R_\theta(c(t)).
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.9. Osoitetaan, että jos tason säännöllisen polun kaarevuus $\kappa \equiv$ vakio $\neq 0$, niin sen jälki on osa ympyrän kaarta.

Nyt siis $\kappa_s = \pm\kappa$. Koska κ_s on jatkuva, täytyy olla joko $\kappa_s \equiv \kappa$ tai $\kappa_s \equiv -\kappa$.

R -säteisen ympyrän parametrisointi kaarenpituuden suhteen on

$$c : t \mapsto \left(R \cos \frac{t}{R}, R \sin \frac{t}{R} \right)$$

(positiivinen kiertosuunta). Nyt

$$c'(t) = \left(-\sin \frac{t}{R}, \cos \frac{t}{R} \right), \quad \|c'(t)\| = 1.$$

Koska

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R} \right),$$

pätee kaarevuudelle

$$\kappa = \|c''(t)\| = \frac{1}{R}.$$

Normaali on yhdensuuntainen vektorin c'' kanssa, sillä

$$n_s = \left(-\sin \left(\frac{t}{R} + \frac{\pi}{2} \right), \cos \left(\frac{t}{R} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left(-\cos \frac{t}{R}, -\sin \frac{t}{R} \right),$$

joten suunnatuksi kaarevuudeksi saadaan

$$\kappa_s = \frac{1}{R}.$$

Lauseen 2.8 mukaan muiden polkujen, joilla $\kappa_s = \frac{1}{R}$, jälki on myös ympyrän kaari, sillä translaatio T_a ja rotaatio R_θ säilyttävät ympyrät ympyröinä.

Vastaavasti tapaus $\kappa_s < 0$: ympyräpolulla

$$\tilde{c} : t \mapsto \left(R \cos \frac{t}{R}, R \sin \frac{t}{R} \right)$$

(parametrisointi negatiiviseen kiertosuuntaan)

$$\tilde{c}'(t) = \left(-\sin \frac{t}{R}, -\cos \frac{t}{R} \right), \quad \|\tilde{c}'(t)\| = 1$$

ja

$$\tilde{c}''(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, \frac{1}{R} \sin \frac{t}{R} \right), \quad \|\tilde{c}''(t)\| = \frac{1}{R}.$$

Nyt

$$n_s = \left(-\sin \left(\frac{t}{R} - \frac{\pi}{2} \right), -\cos \left(\frac{t}{R} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left(\cos \frac{t}{R}, -\sin \frac{t}{R} \right),$$

joten n_s on vastakkaisuuntainen vektorin $c''(t)$ kanssa. Näin ollen negatiiviseen kiertosuuntaan parametrisoidulle ympyrälle pätee

$$\kappa_s = -\frac{1}{R}.$$

Lauseen 2.8 mukaan muidenkin polkujen, joilla $\kappa_s = -\frac{1}{R}$, jälki on myös ympyrän kaari.

Huom 2.10. Avaruudessa kaarevuus κ ei enää riitä erottamaan käyriä.

Esimerkki 2.11. Ympyräspiraalille (kts. esimerkki 1.9)

$$c : t \mapsto \left(\frac{R}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{R}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

(kts. esimerkki 1.9, kun $a = R/2 = b$, $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = \frac{R}{\sqrt{2}}$) pätee

$$c'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\sqrt{2}}{R} t, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \|c'(t)\| = 1$$

ja

$$c''(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{\sqrt{2}}{R}t, -\frac{1}{R} \cos \frac{\sqrt{2}}{R}t, 0 \right), \quad \kappa = \|c''(t)\| = \frac{1}{R},$$

kuten tason ympyrälle!

Tarvittavan lisäinformaation antaa torsio, joka mittaa käyrän poikkeamaa tasokäyrästä.

Luku 3

Frenet-kehykset ja torsio

Määritelmä 3.1. Olkoon $c \mathbb{R}^3$:n säännöllinen polku, joka on parametrisoitu kaarenpituuden suhteen. Jos lisäksi pätee $c''(t) \neq 0$ kaikilla t , niin c on *Frenet-käyrä*.¹

Määritelmä 3.2. Frenet-käyrään c liittyvä *Frenet-kehys* $\{e_1, e_2, e_3\}$ muodostuu vektoreista

$$e_1 = c' \quad \text{tangenttivektori} \quad (3.1)$$

$$e_2 = \frac{c''}{\|c''\|} = \frac{c''}{\kappa} \quad \text{päänormaalivektori} \quad (3.2)$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 \quad \text{sivunormaalivektori} \quad (3.3)$$

Huom 3.3. Järjestetty joukko $\{e_1, e_2, e_3\}$ on \mathbb{R}^3 :n ortonormaali kanta $\forall t$:

$$e_3 = e_1 \times e_2$$

$$e_1 = e_2 \times e_3$$

$$e_2 = e_3 \times e_1$$

(positiivinen kiertovaihtelu).

Johdetaan sitten Frenet-yhtälöt. Määritelmästä 3.2 saadaan

$$e_1' = c'' = \kappa e_2.$$

Koska $\{e_1, e_2, e_3\}$ on ortonormaali kanta, pätee

$$e_2' = (e_2' \cdot e_1)e_1 + (e_2' \cdot e_2)e_2 + (e_2' \cdot e_3)e_3.$$

¹Jean Frédéric Frenet (1816-1900), ranskalainen matemaatikko, astronomi ja meteorologi

Tässä kuitenkin $(e'_2 \cdot e_1) = -e'_1 \cdot e_2$, sillä $e_1 \cdot e_2 = 0$, mistä derivoimalla seuraa, että $e'_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e'_2 = 0$. Lisäksi $(e'_2 \cdot e_2) = 0$, sillä $e_2 \cdot e_2 = 1$. Näin ollen

$$e'_2 = \underbrace{(-e'_1 \cdot e_2)}_{=\kappa} e_1 + \underbrace{(e'_2 \cdot e_3)}_{=:\tau} e_3 = -\kappa e_1 + \tau e_3.$$

Vastaavasti

$$e'_3 = (e'_3 \cdot e_1)e_1 + (e'_3 \cdot e_2)e_2 + (e'_3 \cdot e_3)e_3 = -\tau e_2,$$

sillä $(e'_3 \cdot e_1) = -(e'_1 \cdot e_3) = -\kappa(e_2 \cdot e_3) = 0$ (koska $(e_1 \cdot e_3) = 0$, $e'_1 = \kappa e_2$ ja $e_2 \cdot e_3 = 0$), $e'_3 \cdot e_2 = -(e'_2 \cdot e_3) = -\tau$ (koska $e_2 \cdot e_3 = 0$), ja $e'_3 \cdot e_3 = 0$ (koska $e_3 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 \times e_2 = 1$).

Saatiin *Frenet-yhtälöt*²

$$\begin{cases} e'_1 = \kappa e_2 \\ e'_2 = -\kappa e_1 + \tau e_3 \\ e'_3 = -\tau e_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Nämä voidaan esittää myös matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (F3)$$

Määritelmä 3.4. Funktio $\tau := e'_2 \cdot e_3$ on Frenet-käyrän *torsio*.

Huom 3.5. Torsio on (e_1, e_2) -tason muutos. Kun $\tau \equiv 0$, saadaan

$$\begin{cases} e'_1 = \kappa e_2 \\ e'_2 = -\kappa e_1 \\ e'_3 = 0 \end{cases}$$

eli $e_3 \equiv$ vakio. Tällöin saadaan tason \mathbb{R}^2 Frenet-yhtälöt

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Huom 3.6. Käyrän suunnistuksen muuttaminen ei vaikuta torsioon: Jos \tilde{c} on polku c suunnistettuna vastakkaiseen suuntaan, niin

$$\tilde{e}_1 = \tilde{c}' = -c' = -e_1,$$

²Tunnetaan myös nimellä Frenet-Serret-yhtälöt, sillä sekä Jean Frédéric Frenet että toinen ranskalainen matemaatikko, Joseph Alfred Serret (1819-1885), löysivät yhtälöt toisistaan riippumatta: Frenet julkaisi ne väitöskirjassaan vuonna 1847 ja Serre vuonna 1851.

$$\tilde{e}_2 = \frac{\tilde{c}''}{\|\tilde{c}''\|} = \frac{c''}{\|c''\|} = e_2,$$

$$\tilde{e}_3 = \tilde{e}_1 \times \tilde{e}_2 = -e_1 \times e_2 = -e_3$$

ja

$$\tilde{e}'_2 = -e'_2.$$

Näin ollen

$$\tilde{\tau} = \tilde{e}'_2 \cdot \tilde{e}_3 = e'_2 \cdot e_3 = \tau.$$

Lause 3.7. Olkoon $c \mathbb{R}^3$:n säännöllinen polku, jolle pätee $c''(t) \neq 0 \forall t$. Sen torsio saadaan lausekkeesta

$$\tau = \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2}.$$

Todistus. a) Oletetaan ensin, että polku on parametrisoitu kaarenpituuden suhteen. Tällöin

$$c'' = \kappa e_2 \Rightarrow c''' = \kappa' e_2 + \kappa e'_2$$

ja

$$c' = e_1 \Rightarrow c' \times c'' = \kappa e_1 \times e_2 = \kappa e_3 \Rightarrow \|c' \times c''\| = \kappa,$$

joten

$$\frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2} = \frac{\kappa e_3 \cdot (\kappa' e_2 + \kappa e'_2)}{\kappa^2} = e_3 \cdot e'_2 = \tau,$$

sillä $e_3 \cdot e_2 = 0$.

b) Olkoon c nyt yleinen polku ja $\tilde{c}(\varphi(t)) = c(t)$, missä \tilde{c} on polun c parametrisointi kaarenpituuden $s = \varphi(t)$ suhteen. Näin ollen

$$c'(t) = \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi'(t),$$

eli

$$\tilde{c}'(t) = \frac{c'}{\varphi'}.$$

Derivoimalla uudelleen ja käyttämällä tätä tietoa, saadaan

$$c''(t) = \tilde{c}''(\varphi(t))\varphi'(t)^2 + \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi''(t) = \tilde{c}''(\varphi')^2 + c' \frac{\varphi''}{\varphi'}.$$

Näin ollen

$$\tilde{c}'' = \frac{c'' - c' \frac{\varphi''}{\varphi'}}{(\varphi')^2}.$$

Tästä saadaan

$$\tilde{c}' \times \tilde{c}'' = \frac{1}{(\varphi')^3} c' \times c'',$$

josta edelleen

$$\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\| = \frac{1}{(\varphi')^3} \|c' \times c''\|. \quad (3.5)$$

Vielä tarvitaan kolmas derivaatta:

$$\begin{aligned} c'''(t) &= \tilde{c}'''(\varphi(t))(\varphi'(t))^3 + 2\tilde{c}''(\varphi(t))\varphi'(t)\varphi''(t) \\ &\quad + \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi'(t)\varphi''(t) + \tilde{c}'(\varphi(t))\varphi'''(t) \\ &= \tilde{c}'''(\varphi')^3 + 3\tilde{c}''\varphi'\varphi'' + \tilde{c}'\varphi''' \\ &= \tilde{c}'''(\varphi')^3 + 3\left(\frac{c''}{\varphi'} - c'\frac{\varphi''}{(\varphi')^2}\right)\varphi'' + c'\frac{\varphi'''}{\varphi'}. \end{aligned}$$

Ratkaistaan tästä \tilde{c}''' :

$$\tilde{c}''' = \frac{c'''}{(\varphi')^3} - 3\left(\frac{c''}{(\varphi')^4} - c'\frac{\varphi''}{(\varphi')^5}\right)\varphi'' - c'\frac{\varphi'''}{(\varphi')^4}.$$

Nyt saadaan yhtälön (3.5) avulla

$$\tilde{c}''' \cdot (\tilde{c}' \times \tilde{c}'') = \frac{1}{(\varphi')^6} c''' \cdot (c' \times c''). \quad (3.6)$$

Edellisen kohdan nojalla kaarenpituuden suhteen parametrisoidun polun torsio on

$$\tilde{\tau} = \frac{(\tilde{c}' \times \tilde{c}'') \cdot \tilde{c}'''}{\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\|^2},$$

ja sijoittamalla tähän (3.5) ja (3.6) nähdään, että sama tulos saadaan myös laskemalla torsio yleisestä polusta:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{(\varphi')^6} c''' \cdot (c' \times c'') \left(\frac{1}{(\varphi')^3} \|c' \times c''\|\right)^{-2} = \frac{(c' \times c'') \cdot c'''}{\|c' \times c''\|^2}.$$

□

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan jälleen ympyräspiraalia

$$c : t \mapsto \left(a \cos \frac{\alpha}{\beta} t, a \sin \frac{\alpha}{\beta} t, \frac{b}{\beta} t\right),$$

missä $\beta = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}$. Nyt

$$e_1 = c'(t) = \left(-a\frac{\alpha}{\beta} \sin \frac{\alpha}{\beta} t, a\frac{\alpha}{\beta} \cos \frac{\alpha}{\beta} t, \frac{b}{\beta}\right)$$

ja

$$c''(t) = \left(-a \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \cos \frac{\alpha}{\beta} t, -a \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \sin \frac{\alpha}{\beta} t, 0 \right).$$

Spiraalin kaarevuus on näin ollen

$$\kappa = \|c''(t)\| = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 a$$

(voidaan olettaa, että $a > 0$). Lasketaan sitten e'_2 ja e_3 torsiota varten:

$$e_2 = \frac{c''}{\kappa} = \left(-\cos \frac{\alpha}{\beta} t, -\sin \frac{\alpha}{\beta} t, 0 \right),$$

$$e'_2 = \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \frac{\alpha}{\beta} t, -\frac{\alpha}{\beta} \cos \frac{\alpha}{\beta} t, 0 \right),$$

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \left(\frac{b}{\beta} \sin \frac{\alpha}{\beta} t, -\frac{b}{\beta} \cos \frac{\alpha}{\beta} t, \frac{a\alpha}{\beta} \right).$$

Näin ollen

$$\tau = e'_2 \cdot e_3 = \frac{\alpha b}{\beta^2}.$$

Huomataan, että ympyräspiraalille

$$\text{kaarevuus} \quad \kappa = \frac{\alpha^2 a}{\beta^2} = \text{vakio}$$

$$\text{torsio} \quad \tau = \frac{\alpha b}{\beta^2} = \text{vakio}$$

Tarkastellaan ehtoa $\beta = \sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2}$. Voidaan olettaa, että $\beta^2 = a^2 \alpha^2 + b^2 = 1$. Tällöin $\kappa = \alpha^2 a$ ja $\tau = \alpha b$, ja saadaan

$$1 = \alpha^2 \left(\frac{\kappa}{\alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} (\kappa^2 + \tau^2).$$

Jos vakiot κ ja τ on annettu, on yhtälöllä

$$\begin{cases} \alpha^2 = \kappa^2 + \tau^2 \\ a = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \\ b^2 = \frac{\tau^2}{\kappa^2 + \tau^2} \end{cases}$$

yksikäsitteinen ratkaisu.

Saatiin: \mathbb{R}^3 :n Frenet-käyrä, jolla on vakiokaarevuus ja vakiotorsio, on ympyräspiraalin kaari. Tapauksessa $\tau = 0$ kyseessä on ympyrän kaari. Käyrän alkuarvot ovat

$$\begin{aligned}c(0) &= (a, 0, 0), \\c'(0) &= (0, a\alpha, b), \\c''(0) &= (-a\alpha^2, 0, 0).\end{aligned}$$

Vastaava tulos pätee myös yleisesti:

Lause 3.9. *Olkoon c ja \tilde{c} \mathbb{R}^3 :n Frenet-käyriä, joilla on sama kaarevuusfunktio $t \mapsto \kappa(t)$ ja torsio $t \mapsto \tau(t)$. Tällöin c ja \tilde{c} ovat \mathbb{R}^3 :n jäykkää liikettä M vaille samat, eli pätee $\tilde{c}(t) = M(c(t)) \forall t$. Jos κ ja τ ovat sileitä funktioita, $\kappa > 0$, niin löytyy Frenet-käyrä, jonka kaarevuus on κ ja torsio on τ .*

Todistus. Olkoot $\{e_1, e_2, e_3\}$ polun c ja $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ polun \tilde{c} Frenet-kehykset. Olkoon t_0 jokin parametriarvo. Soveltamalla jäykkää liikettä oikeakätisiin ortonormaaleihin koordinaatistoihin $\{e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0)\}$ ja $\{\tilde{e}_1(t_0), \tilde{e}_2(t_0), \tilde{e}_3(t_0)\}$ voidaan olettaa:

$$c(t_0) = \tilde{c}(t_0), \quad e_i(t_0) = \tilde{e}_i(t_0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Tarkastellaan lauseketta

$$A(t) = (\tilde{e}_1 \cdot e_1 + \tilde{e}_2 \cdot e_2 + \tilde{e}_3 \cdot e_3)(t).$$

Yhtälöstä (3.7) seuraa, että $A(t_0) = 3$. Lisäksi pätee $\tilde{e}_i \cdot e_i \leq 1$ ja

$$\tilde{e}_i \cdot e_i = 1 \iff \tilde{e}_i = e_i$$

kaikilla $i = 1, 2, 3$. Näin ollen $A(t) \leq 3$ ja

$$A(t) = 3 \iff \tilde{e}_i = e_i \forall i = 1, 2, 3.$$

Jos voidaan osoittaa, että $A(t) \equiv 3$, niin erityisesti $\tilde{c}'(t) = \tilde{e}_1(t) = e_1(t) = c'(t)$ kaikilla t , eli $\tilde{c}' - c' \equiv 0$ ja

$$\tilde{c} - c \equiv \text{vakio} \underbrace{=}_{(3.7)} 0.$$

Ensimmäinen väite siis seuraa, jos $A(t) \equiv 3$:

$$A' = \tilde{e}'_1 \cdot e_1 + \tilde{e}_1 \cdot e'_1 + \tilde{e}'_2 \cdot e_2 + \tilde{e}_2 \cdot e'_2 + \tilde{e}'_3 \cdot e_3 + \tilde{e}_3 \cdot e'_3$$

Käytetään Frenet-yhtälöitä

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

ja

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan

$$A' = \kappa \tilde{e}_2 \cdot e_1 + \tilde{e}_1 \cdot \kappa e_2 + (-\kappa \tilde{e}_1 + \tau \tilde{e}_3) \cdot e_2 + \tilde{e}_2 \cdot (-\kappa e_1 + \tau e_3) - \tau \tilde{e}_2 \cdot e_3 - \tilde{e}_3 \cdot \tau e_2 = 0.$$

Tästä seuraa, että

$$A \equiv \text{vakio} = A(t_0) = 3.$$

Todistetaan sitten toinen väite: Jos κ ja τ on annettu, niin yhtälöllä

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

on yksikäsitteinen sileä ratkaisu alkuarvolla $e_1(t_0) = (1, 0, 0)$, $e_2(t_0) = (0, 1, 0)$, $e_3(t_0) = (0, 0, 1)$. Matriisi

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

on vinosymmetrinen, joten $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ ovat \mathbb{R}^n :n ortonormaalit koordinaatit kaikilla t (HT). Määritellään

$$c(t) = \int_{t_0}^t e_1(s) ds.$$

Tällöin $c'(t) = e_1(t)$, joten $\|c'(t)\| = 1$. Lisäksi pätee $c''(t) = e_1'(t) = \kappa e_2$, joten $\kappa = \|c''(t)\|$ on c :n kaarevuus. Koska $e_3 \perp \text{span}\{e_1, e_2\}$, $\|e_3\| = 1$, niin $e_3 = \lambda e_1 \times e_2$, missä $\lambda = \pm 1$. Koska λ on sileä ja $e_3(t_0) = e_1(t_0) \times e_2(t_0)$, niin itse asiassa $\lambda(t) \equiv \text{vakio} = \lambda(t_0) = 1$. Näin ollen

$$e_2' \cdot e_3 = -e_3' \cdot e_2 = \tau e_2 \cdot e_2 = \tau$$

on polun c torsio. □

Tutkitaan sitten \mathbb{R}^3 :n Frenet-käyrää approksimoivan Taylorin kehitelmän esitystä Frenet-kehyyksessä:

Polun c Taylorin kehitelmä pisteen $c(0)$ ympäristössä on

$$c(t) = c(0) + c'(0)t + \frac{c''(0)t^2}{2} + \frac{c'''(0)t^3}{3!} + O(t^4).$$

Etsitään kerroinfunktiot $t \mapsto \alpha(t)$, $t \mapsto \beta(t)$, $t \mapsto \gamma(t)$ siten, että

$$c(t) = c(0) + \alpha(t)e_1(0) + \beta(t)e_2(0) + \gamma(t)e_3(0) + O(t^4).$$

Frenet-yhtälöistä (F3) saadaan

$$\begin{cases} c' = e_1 \\ c'' = e_1' = \kappa e_2 \\ c''' = \kappa' e_2 + \kappa e_2' = \kappa' e_2 + \kappa(-\kappa e_1 + \tau e_3) = -\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa \tau e_3 \end{cases}$$

Tästä seuraa, että

$$c(t) = c(0) + e_1 t + \kappa e_2 \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}(-\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa \tau e_3) + O(t^4),$$

joten

$$c(0) + \underbrace{\left(t - \frac{\kappa^2}{6}t^3\right)}_{=:\alpha(t)} e_1 + \underbrace{\left(\kappa \frac{t^2}{2} - \kappa' \frac{t^3}{3!}\right)}_{=:\beta(t)} e_2 + \underbrace{\kappa \tau \frac{t^3}{3!}}_{=:\gamma(t)} e_3 + O(t^4). \quad (3.8)$$

Tämän avulla saadaan *projektiokäyrät* (e_i, e_j) -tasoihin.

Tasossa (e_1, e_2) (*kosketustaso*)

$$c(t) = c(0) + t e_1 + \frac{\kappa(0)}{2} t^2 e_2 + O(t^3)$$

eli toisen kertaluvun approksimaatio on paraabeli.

Tasossa (e_2, e_3) (*normaalitaso*)

$$c(t) = c(0) + \left(\frac{\kappa(0)}{2} t^2 - \frac{\kappa'(0)}{6} t^3\right) e_2 + \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} t^3 e_3 + O(t^4).$$

(Vertaa Neilen paraabeliin, kun $\tau \neq 0$.)

Tasossa (e_1, e_3) (*suoristava taso*)

$$c(t) = c(0) + \left(t - \frac{\kappa^2(0)}{6} t^3\right) e_1 + \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} t^3 e_3 + O(t^4).$$

KUVAT

Esitys (3.8) on Frenet-käyrän *lokaali kanoninen muoto* pisteen $c(0)$ ympäristössä.

Seuraus 3.10. On olemassa parametrin $t = 0$ ympäristö $I = (-\epsilon, \epsilon)$ siten, että $c(I)$ kuuluu suoristavan tason rajaamaan positiivisen e_2 -akselin suuntaiseen puoliavaruuteen: ehdosta $\kappa > 0$ seuraa riittävän pienillä parametrin t arvoilla, että $\beta(t) = \kappa \frac{t^2}{2} - \kappa' \frac{t^3}{3!} \geq 0$, ja erityisesti $\beta(t) = 0 \iff t = 0$.

Seuraus 3.11. Kosketustaso saadaan rajana tasoista, jotka sisältävät suoran $\text{span}\{e_1(0)\}$ ja pisteen $c(t)$, kun $t \rightarrow 0$: Tasot, jotka sisältävät suoran $\text{span}\{e_1(0)\}$ ovat muotoa $z(t) = ky(t)$ tai $y(t) = 0$, missä $y(t) = 0$ on suoristava taso $(e_1(0), e_3(0))$, joka ei sisällä käyrän $|c|$ pisteitä pienillä $t \neq 0$. Taso kulkee pisteen $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ kautta $((e_1(0), e_2(0), e_3(0))$ -koordinaatistossa),

$$k = \frac{z(t)}{y(t)} = \frac{\gamma(t) + O_1(t^4)}{\beta(t) + O_2(t^4)} = \frac{\kappa\tau \frac{t^3}{6} + O_1(t^4)}{\kappa \frac{t^2}{2} + \kappa' \frac{t^3}{6} + O_1(t^4)} \rightarrow 0,$$

kun $t \rightarrow 0$, eli rajalla saadaan kosketustaso (e_1, e_2) .

Lause 3.12 (Koskettavan pallon lause). *Olkoon $c \in \mathbb{R}^3$:n Frenet-käyrä ja $\tau(t_0) \neq 0$. Tällöin käyrää pisteessä $c(t_0)$ sivuavan pallon, jonka keskipiste on*

$$c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}e_2(t_0) - \frac{\kappa'(t_0)}{\tau(t_0)\kappa^2(t_0)}e_3(t_0),$$

jonkin isoympyrän kaarella on kolmannen kertaluvun kosketus c :n kanssa pisteessä $c(t_0)$. Pallo määräytyy yksikäsitteisesti näiden ominaisuuksien perusteella.

Todistus. Olkoon $m(t_0)$ etsityn pallon keskipiste. Kirjoitetaan

$$m = m(t_0) = c(t_0) + \alpha e_1(t_0) + \beta e_2(t_0) + \gamma e_3(t_0).$$

Pallon säteen neliöllä $r(t) := \langle m - c(t), m - c(t) \rangle$ on oltava minimikohta pisteessä t_0 , joten $r'(t_0) = 0$. Koska

$$r'(t) = -2\langle c'(t), m - c(t) \rangle,$$

nähdään, että

$$\langle e_1(t_0), m - c(t_0) \rangle = \langle c'(t_0), m - c(t_0) \rangle = 0,$$

joten $\alpha = 0$.

Lisäksi vaadittiin kolmannen kertaluvun kontakti pisteessä $c(t_0)$, joten $r''(t_0) = r'''(t_0) = 0$. Nyt

$$r''(t) = -2\langle c''(t), m - c(t) \rangle + 2\underbrace{\langle c'(t), c'(t) \rangle}_{=1}$$

ja

$$r'''(t) = -2\langle c'''(t), m - c(t) \rangle + 2\underbrace{\langle c''(t), c'(t) \rangle}_{=0}.$$

Näin ollen $r''(t_0) = 0 \iff \langle c''(t_0), m - c(t_0) \rangle = 1$, ja koska

$$\langle c''(t_0), m - c(t_0) \rangle = \langle \kappa e_2(t_0), m - c(t_0) \rangle = \kappa(t_0)\beta,$$

pätee $\beta = \frac{1}{\kappa(t_0)}$. Ratkaistaan vielä γ :

$$\begin{aligned} r'''(t_0) = 0 &\iff \langle -\kappa^2 e_1 + \kappa' e_2 + \kappa \tau e_3, m - c(t_0) \rangle = 0 \\ &\iff -\kappa^2 \underbrace{\alpha(t_0)}_{=0} + \kappa' \underbrace{\beta(t_0)}_{=1/\kappa} + \kappa \tau \gamma(t_0) = 0 \\ &\iff \gamma(t_0) = -\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}. \end{aligned}$$

□

Lause 3.13 (Pallokäyrät). *Olkoon c Frenet-käyrä \mathbb{R}^3 :ssa ja $\tau(t) \neq 0$ kaikilla t . Tällöin c on jonkin pallon pinnalla jos ja vain jos pätee*

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)'$$

Todistus. Jotta käyrä olisi pallon pinnalla, käyrää sivuavan pallon keskipisteeseen

$$m = m(t) = c(t) + \alpha e_1(t) + \beta e_2(t) + \gamma e_3(t)$$

on oltava vakio kaikilla t , eli $m'(t) \equiv 0$. Koskettavan pallon lauseen 3.12 mukaisesti siis kaikilla t on oltava

$$\left(c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} e_2(t) - \frac{\kappa'(t)}{\tau(t)\kappa^2(t)} e_3(t) \right)' = 0,$$

eli

$$e_1 + \frac{e_2' \kappa - \kappa' e_2}{\kappa^2} - \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} e_3 - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' e_3 = 0,$$

josta Frenet-yhtälöiden avulla saadaan

$$e_1 + \frac{(-\kappa e_1 + \tau e_3) \kappa - \kappa' e_2}{\kappa^2} + \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \tau e_2 - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)' e_3 = 0.$$

Tämä sievenee muotoon

$$\left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)' \right) e_3 = 0,$$

mikä todistaa väitteen ensimmäisen suunnan.

Todistuksen jokainen kohta on ekvivalentti seuraavan kanssa, joten vastaava päättely lopusta alkuun osoittaa että

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)' \Rightarrow m'(t) \equiv 0.$$

Lisäksi lause 3.12 kertoo, että $r'(t) = 0$ (3. kertaluvun kontakti), joten koskettavan pallon keskipiste ja säde ovat vakioita, eli käyrä on pallon pinnalla. \square

Lause 3.14. *Olkoon c sileä käyrä yksikköpallon pinnalla, parametrisoituna kaarenpituuden suhteen. Olkoon $\mathcal{I} = \text{Det}(c, c', c'')$. Tällöin c on Frenet-käyrä ja sen kaarevuus on $\kappa = \sqrt{1 + \mathcal{I}^2}$ ja torsio $\tau = \frac{\mathcal{I}'}{1 + \mathcal{I}^2}$. Isoympyrät karakterisoi ehto $\mathcal{I} = 0$, muut ympyrät $\mathcal{I} = \text{vakio} \neq 0$.*

Todistus. Oletuksesta seuraa, että $c, c', c \times c'$ on ortonormaali kehys pitkin polkua $t \mapsto c(t)$. Näin ollen

$$c'' = \underbrace{\langle c'', c \rangle}_{=0} c + \underbrace{\langle c'', c' \rangle}_{=1} c' + \underbrace{\langle c'', c \times c' \rangle}_{=\mathcal{I}} c \times c'.$$

Lisäksi $\langle c', c \rangle = 0$, joten derivoimalla tätä saadaan

$$\langle c'', c \rangle + \underbrace{\langle c', c' \rangle}_{=1} = 0,$$

eli

$$\langle c'', c \rangle = -1. \tag{3.9}$$

Näin ollen $c'' = -c + \mathcal{I}c \times c'$. Nyt

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \langle c'', c'' \rangle = \langle -c + \mathcal{I}c \times c', -c + \mathcal{I}c \times c' \rangle \\ &= \underbrace{\langle c, c \rangle}_{=1} + \mathcal{I}^2 \underbrace{\langle c \times c', c \times c' \rangle}_{=1} - 2\mathcal{I} \underbrace{\langle c, c \times c' \rangle}_{=0} \\ &= 1 + \mathcal{I}^2 > 0,\end{aligned}$$

joten c on Frenet-käyrä ja $\kappa = \sqrt{1 + \mathcal{I}^2}$.

Saadaan siis $e_2 = \frac{c'}{\kappa} = \frac{c''}{\kappa}$ ja $e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{1}{\kappa}c' \times c''$. Lisäksi derivoimalla yhtälöä (3.9) nähdään, että

$$\langle c''', c \rangle + \underbrace{\langle c'', c' \rangle}_{=0} = 0,$$

eli

$$\langle c''', c \rangle = 0. \quad (3.10)$$

Saadaan

$$\begin{aligned}\tau &= \langle e'_2, e_3 \rangle = \langle -e_2, e'_3 \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle c'', \left(\frac{1}{\kappa}c' \times c'' \right)' \rangle \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \langle c'', c' \times c''' \rangle - \frac{1}{\kappa} \underbrace{\langle c'', \frac{-\kappa'}{\kappa^2}c' \times c'' \rangle}_{=0} \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \langle -c + \mathcal{I}c \times c', c' \times c''' \rangle\end{aligned}$$

Yhtälöstä (3.10) seuraa, että $c''' \perp c$, joten $\langle c \times c', c' \times c''' \rangle = 0$. Näin ollen

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} \langle c, c' \times c''' \rangle = \frac{\mathcal{I}'}{\kappa^2},$$

sillä koska $\mathcal{I} = \langle c, c' \times c'' \rangle$, niin

$$\mathcal{I}' = \underbrace{\langle c', c' \times c'' \rangle}_{=0} + \langle c, c' \times c''' \rangle = \langle c, c' \times c''' \rangle.$$

Tapaus $\mathcal{I} \equiv \text{vakio}$ eli $\mathcal{I}' = 0$ ($c'' \neq 0$) antaa $\tau \equiv 0$, jolloin c on tasokäyrä. Toisaalta $\kappa^2 = 1 + \mathcal{I}^2 = \text{vakio} \neq 0$, joten $\mathcal{I} \equiv \text{vakio} \iff c$ on osa $\frac{1}{\kappa}$ -säteisen ympyrän kaarta. Erityisesti: $\mathcal{I} \equiv 0 \iff \kappa \equiv 1 \iff c$ on isoympyrän kaari. \square

Huom 3.15. Geodeettinen kaarevuus $\mathcal{I} = \langle c'', c \times c' \rangle$ on c' :n pallolle \mathbb{S}^2 tangentiaalinen osa.

Lause 3.16. \mathbb{R}^3 :n Frenet-käyrille seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- i) on olemassa $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ siten, että $\langle e_1, v \rangle = \text{vakio}$
- ii) on olemassa $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ siten, että $\langle e_2, v \rangle = 0$
- iii) on olemassa $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ siten, että $\langle e_3, v \rangle = \text{vakio}$
- iv) $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \text{vakio}$

Määritelmä 3.17. Lauseen 3.16 ehdot toteuttava käyrä on kaltevuussuora.

Huom 3.18. Kaltevuussuoran suoristava taso $\text{span}\{e_1, e_3\}$ sisältää Lauseen 3.16 mukaisen vektorin v .

Lauseen 3.16 todistus. Jos c on tasokäyrä, niin $\tau \equiv 0$ ja voidaan valita $v \perp \text{span}\{e_1, e_2\}$, jolloin $\langle v, e_1 \rangle = \langle v, e_2 \rangle \equiv 0$ ja $\langle v, e_3 \rangle = \langle v, e_1 \times e_2 \rangle = \pm \|v\|$.

Oletetaan, että $\tau \neq 0$.

i) \iff ii):

$$\langle e_1, v \rangle = \text{vakio} \iff 0 = \langle e_1, v \rangle' = \langle e_1', v \rangle \underbrace{=}_{(F3)} \kappa \langle e_2, v \rangle,$$

joten tiedosta $\kappa > 0$ seuraa väite.

ii) \iff iii):

$$\langle e_3, v \rangle = \text{vakio} \iff 0 = \langle e_3, v \rangle' = \langle e_3', v \rangle \underbrace{=}_{(F3)} -\tau \langle e_2, v \rangle,$$

joten tiedosta $\tau > 0$ seuraa väite.

i), ii), iii) $\Rightarrow v$ on suoristavan tason vektori, eli $v = \alpha e_1 + \beta e_3$ joillakin arvoilla α ja β . Koska v on vakiovektori, saadaan derivoimalla

$$0 = \alpha e_1' + \beta e_3' \underbrace{=}_{(F3)} (\alpha \kappa - \beta \tau) e_2,$$

mistä seuraa, että

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\alpha}{\beta} \equiv \text{vakio}$$

($\alpha, \beta \neq 0$, sillä $\alpha = 0 \iff \beta = 0$), joten saatiin väite iv).

Toisaalta jos oletetaan väite iv) eli $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \text{vakio}$, niin myös vektori $v := \frac{\tau}{\kappa} e_1 + e_3$ on vakio, sillä pätee

$$v' = \frac{\tau}{\kappa} e_1' + e_3' \underbrace{=}_{(F3)} \frac{\tau}{\kappa} \kappa e_2 - \tau e_2 = 0.$$

Lisäksi $\langle v, e_2 \rangle = \frac{\tau}{\kappa} \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_3, e_2 \rangle = 0$, mikä antaa väitteen ii). \square

Määritelmä 3.19. Vektori $D = \tau e_1 + \kappa e_3$ on *Darbouxin*³ pyörimisvektori.⁴

Esimerkki 3.20. Ympyräspiraalille $c : c(t) = (a \cos at, a \sin at, tb)$ pätee

$$\begin{cases} \tau = \alpha b \\ \kappa = \alpha^2 a \end{cases},$$

joten

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{b}{\alpha a},$$

ja Darbouxin pyörimisvektoriksi saadaan

$$\begin{aligned} D &= \tau e_1 + \kappa e_3 \\ &= \tau(-a\alpha \sin at, a\alpha \cos at, b) + \kappa(b \sin at, -b \cos at, a\alpha) \\ &= (0, 0, \underbrace{\tau b + \kappa a\alpha}) \\ &= \frac{\tau^2}{\alpha} + \frac{\kappa^2}{\alpha} = \alpha, \text{ sillä } \frac{\tau^2 + \kappa^2}{\alpha^2} = a^2 \alpha^2 + b^2 = 1 \\ &= (0, 0, \alpha) \\ &= (0, 0, \sqrt{\tau^2 + \kappa^2}). \end{aligned}$$

Huom 3.21. Merkitään

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix},$$

jolloin

$$K^2 = \begin{pmatrix} -\kappa^2 & 0 & \kappa\tau \\ 0 & -\kappa^2 - \tau^2 & 0 \\ \kappa\tau & 0 & -\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan matriisin K^2 ominaisarvot:

$$\det(K^2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\kappa^2 - \lambda & 0 & \kappa\tau \\ 0 & -\kappa^2 - \tau^2 - \lambda & 0 \\ \kappa\tau & 0 & -\tau^2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\kappa^2 + \tau^2 + \lambda)^2,$$

joten $\lambda = -\kappa^2 - \tau^2$ on ainoa ominaisarvo.

1. Jos c on ympyräspiraali, niin $\lambda = -\alpha^2$ ja α on merkkiä vaille yksikäsitteisesti määrätty, $a = \kappa/\alpha^2$ ja $b = \tau/\alpha$.

³Jean-Gaston Darboux (1842-1917), ranskalainen matemaatikko

⁴E erityisesti fysiikassa Darbouxin pyörimisvektoria kutsutaan myös pyörimisliikemäärävektoriksi (angular momentum vector), sillä se on suoraan verrannollinen kappaleen pyörimisliikemäärään.

2. Yleisesti jokaiseen \mathbb{R}^3 :n Frenet-käyrän pisteeseen p voidaan liittää yksikäsitteinen *liittospiraali* siten, että molemmilla käyrillä on sama Frenet-kehys, torsio ja kaarevuus pisteessä p . Ruuviliike voidaan siis nähdä käyrään liittyvänä. Darbouxin vektori antaa liittospiraaliin liittyvän sylinterin avautumissuunnan. Sen pituus $|D| = (\tau^2 + \kappa^2)^{1/2}$ on liikkeen *kulmanopeus*. Näin ollen *Darbouxin yhtälöt*

$$e'_i = D \times e_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ovat yhtäpitävät Frenet-yhtälöiden kanssa. (HT)

Lause 3.9 yleistyy korkeampiin ulottuvuuksiin seuraavasti:

Määritelmä 3.22. Säännöllinen polku $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *Frenet-käyrä* jos $\|c'(t)\| = 1$ ja kaikilla $t \in [a, b]$ vektorit $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Pisteeseen $c(t)$ liittyvä *Frenet-kehys* $\{e_1, \dots, e_n\}$ määräytyy yksikäsitteisesti ehdoista

- i) $\{e_1, \dots, e_n\}$ on ortonormaali ja positiivisesti suunnistettu,
- ii) kaikilla $k = 1, \dots, n-1$ pätee $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{c'(t), \dots, c^{(k)}(t)\}$,
- iii) $c^{(k)}(t) \cdot e_k(t) > 0$ kaikilla $k = 1, \dots, n-1$.

Huom 3.23. 1. Vektorit e_1, \dots, e_{n-1} määräytyvät derivaatoista $c'(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ Gram-Schmidt-ortonormeerauksen⁵ avulla:

$$\begin{aligned} e_1 &:= c'(t) \\ e_2 &:= \frac{c''(t) - \overbrace{(c''(t) \cdot e_1)e_1}^{=0}}{||c''(t) - (c''(t) \cdot e_1)e_1||}}{||c''(t) - (c''(t) \cdot e_1)e_1||} = \frac{c''(t)}{||c''(t)||} \\ e_3 &:= \frac{c'''(t) - (c'''(t) \cdot e_1)e_1 - (c'''(t) \cdot e_2)e_2}{||c'''(t) - (c'''(t) \cdot e_1)e_1 - (c'''(t) \cdot e_2)e_2||} \\ &\vdots \\ e_v &:= \frac{c^{(j)}(t) - \sum_{i=1}^{j-1} (c^{(j)}(t) \cdot e_i)e_i}{||c^{(j)}(t) - \sum_{i=1}^{j-1} (c^{(j)}(t) \cdot e_i)e_i||} \end{aligned}$$

Vektori e_n määräytyy yksikäsitteisesti ehdosta i).

⁵Metodi on saanut nimensä Jorgen Pedersen Gramin (1850-1916, tanskalainen matemaatikko ja aktuaari) ja Erhard Schmidtin (1876-1959, saksalainen matemaatikko) mukaan, vaikka menetelmä esiintyykin jo aiemmin Laplacen ja Cauchyn töissä.

2. Kun $n = 2$: säännöllinen käyrä, $\|c'\| = 1 \Rightarrow$ Frenet-käyrä
Kun $n = 3$: säännöllinen käyrä, $\|c'\| = 1, c'' \neq 0 \Rightarrow$ Frenet-käyrä
3. Frenet-kehys $t \mapsto (e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))_{c(t)}$ on pitkin polkua c liikkuva kehys, joka kussakin polun pisteessä antaa uudet \mathbb{R}^n :n koordinaatit, jotka heijastavat käyrän geometriaa.

Voidaan todistaa seuraavat lauseet:

Lause 3.24. *Olkoon c \mathbb{R}^n :n Frenet-käyrä ja $(e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t))$ siihen liittyvä Frenet-kehys. Tällöin löytyy sileät funktiot $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ siten, että $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$. Funktio $t \mapsto \kappa_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$, on käyrän c Frenet-kaarevuus. Yhtälöryhmä*

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (\text{Fn})$$

on käyrään c liittyvät Frenet-yhtälöt ja $\kappa_i = e_i' \cdot e_{i+1}$.

Lause 3.25 (Käyrien lokaalin teorian peruslause). *Olkoot annettu sileät funktiot $t \mapsto \kappa_i(t)$, $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n-1$, siten, että $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$. Olkoon lisäksi kiinteällä parametrilla $t_0 \in (a, b)$ annettu piste $q_0 \in \mathbb{R}^n$ ja kehys $(e_1(t_0), e_2(t_0), \dots, e_n(t_0))$. Tällöin löytyy yksikäsitteinen Frenet-käyrä siten, että*

- i) $c(t_0) = q_0$,
- ii) $(e_1(t_0), e_2(t_0), \dots, e_n(t_0))$ on käyrän c Frenet-kehys pisteessä q_0 ,
- iii) $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ ovat polun c Frenet-kaarevuudet.

Luku 4

Tasokäyrien globaalia teoriaa

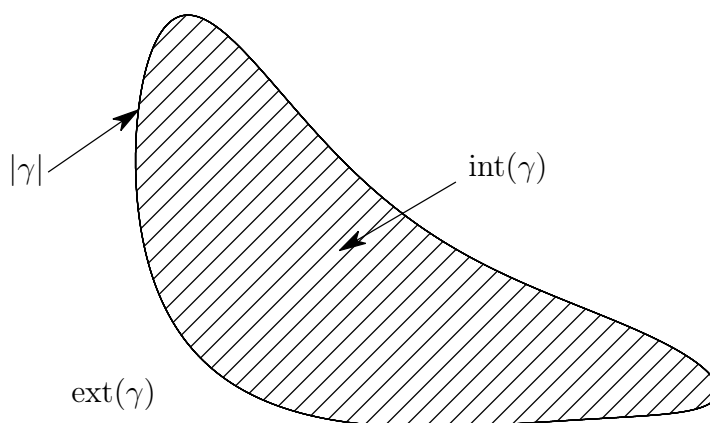
Määritelmä 4.1. Olkoon $a > 0$. a -jaksoinen yksinkertainen suljettu polku $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ on säännöllinen polku c siten, että

$$c(t) = c(t') \iff t' - t = ka \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}.$$

Oletetaan tunnetuksi seuraava lause:

Lause 4.2 (Jordanin käyrälause). Yksinkertainen suljettu tasopolku γ jakaa \mathbb{R}^2 :n kolmeen pistevieraaseen osaan, jotka ovat

- i) $|\gamma|$ (polun jäljen pisteet)
- ii) $\text{int}(\gamma)$ (rajoitettu alue, jonka reuna on $|\gamma|$)
- iii) $\text{ext}(\gamma)$ (rajoittamaton alue, jonka reuna on $|\gamma|$)



Huom 4.3. 1. alue = avoin ja yhtenäinen osajoukko

2. avoimella joukolla D yhtenäisyys = polkuyhtenäisyys: kaikilla $x, y \in D$ on olemassa polku $c : [a, b] \rightarrow D$ siten, että $c(a) = x$ ja $c(b) = y$.

3. Jordanin käyrälauseen tarkka todistus löytyy esimerkiksi teoksista
James R. Munkres: Topology
C.T.C. Wall: Geometric introduction to topology

Määritelmä 4.4. Yksinkertaisella suljetulla käyrällä tarkoitetaan yksinkertaista suljettua polkua, joka on parametrisoitu kaarenpituuden suhteen ja jonka pituus on jakson pituus. Yksinkertaista suljettua käyrää sanotaan positiivisesti suunnistetuksi, jos sen suunnistettu normaali n_s osoittaa joukkoon $\text{int}(c)$ kaikilla t .

Huom 4.5 (Muistutus kurssilta L2). Alueen $\text{int}(\gamma)$ pinta-ala on

$$\mathcal{A}(\text{int}\gamma) = \iint_{\text{int}(\gamma)} dx dy.$$

Greenin kaava:

$$\iint_{\text{int}(\gamma)} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dx dy = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

missä \mathbf{k} on koordinaatin z suuntainen yksikkövektori, $d\mathbf{r} = \gamma'(t)dt$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$, ja

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Näin ollen

$$\int_{\text{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} (f_1, f_2) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f_1 dx + \int_{\gamma} f_2 dy,$$

missä $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ja siten $\gamma'(t)dt = (x'(t), y'(t))dt = (dx, dy)$.

Valitsemalla $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$ siten, että $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{k}$, saadaan

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

a) Valinta $\mathbf{F} = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$ (jolloin $\nabla \times \mathbf{F} = (\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})) \mathbf{k} = \mathbf{k}$) antaa

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-y) dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^L (xy' - yx') dt, \quad (4.1)$$

kun $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

b) Voidaan valita yleisemmin $\mathbf{F} = (-cy, (1-c)x)$, $c \in \mathbb{R}$, jolloin $\nabla \times \mathbf{F} = ((1-c) - (-c))\mathbf{k} = \mathbf{k}$ ja

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \int_{\gamma} (-cy)dx + (1-c)x dy = \int_0^L (-cyx' + (1-c)xy')dt,$$

jolloin

$$\begin{aligned} c = 0 &\Rightarrow \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \int_0^L xy' dt \\ c = 1 &\Rightarrow \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = - \int_0^L yx' dt \end{aligned}$$

ja niin edelleen.

Lause 4.6 (Isoperimetrinen epäyhtälö). *Olkoon γ yksinkertainen suljettu käyrä, $l(\gamma)$ sen pituus ja $\mathcal{A}(\text{int}(\gamma))$ sen rajoittaman alueen pinta-ala. Tällöin pätee isoperimetrinen epäyhtälö*

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) \leq \frac{1}{4\pi} l(\gamma)^2,$$

missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos γ on ympyrä.

Todistus. Selvästi jos γ on R -säteinen ympyrä, niin $l(\gamma) = 2\pi R$ ja $\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \pi R^2$, eli

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \pi R^2 = \frac{1}{4\pi} (2\pi R)^2 = \frac{1}{4\pi} l(\gamma)^2.$$

Väitteen epätriviaali osa saadaan Wirtingerin epäyhtälöstä; todistus jatkuu epäyhtälön esittelyn jälkeen. \square

Lause 4.7 (Wirtingerin ¹ epäyhtälö). *Olkoon $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sileä funktio siten, että $F(0) = F(\pi) = 0$. Tällöin pätee*

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 dt \geq \int_0^{\pi} F(t)^2 dt$$

ja tässä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos $F(t) = A \sin(t)$ kaikilla $t \in [0, \pi]$, A vakio.

¹Wilhelm Wirtinger (1865-1945), itävaltalainen matemaatikko

Todistus. Olkoon $G(t) = \frac{F(t)}{\sin(t)}$, jolloin $F'(t) = G'(t) \sin(t) + G(t) \cos(t)$. Integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (F'(t))^2 dt &= \int_0^\pi (G'(t) \sin(t) + G(t) \cos(t))^2 dt \\ &= \int_0^\pi (G'(t))^2 \sin^2(t) dt + 2 \int_0^\pi G'(t) G(t) \sin(t) \cos(t) dt \\ &\quad + \int_0^\pi (G(t))^2 \cos^2(t) dt. \end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi G'(t) G(t) \sin t \cos t dt &= \int_0^\pi G^2(t) \sin(t) \cos(t) - \int_0^\pi G^2(t) (\cos^2(t) - \sin^2(t)) dt \\ &= \int_0^\pi G^2(t) (\sin^2(t) - \cos^2(t)) dt, \end{aligned}$$

saadaan tämä edelliseen sijoittamalla

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (F'(t))^2 dt &= \int_0^\pi (G'^2(t) + G^2(t)) \sin^2(t) dt \\ &= \int_0^\pi F^2(t) dt + \underbrace{\int_0^\pi ((G'(t))^2 \sin^2(t)) dt}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

joten

$$\int_0^\pi (F'(t))^2 dt \geq \int_0^\pi F^2(t) dt.$$

Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $G'(t) \equiv 0$, ja

$$G'(t) \equiv 0 \iff G \equiv \text{vakio} \iff F = \text{vakio} \cdot \sin(t).$$

□

Todistus: Lauseen 4.6 epätriviaali osuus. Olkoon γ parametrisoitu parametrilla $t = \frac{\pi s}{l(\gamma)} = \varphi(s)$, missä s on parametri kaarenpituuden suhteen, eli $t \in [0, \pi]$, ja olkoon $\gamma(0) = 0$ (tämä voidaan taata translaatiolla $x \mapsto x - \gamma(0)$). Merkitään $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Esitetään pituus $l(\gamma)$ ja pinta-ala $\mathcal{A}(\text{int}(\gamma))$ napakoordinaateissa:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases},$$

missä $x = x(t)$, $y = y(t)$, $r = r(t)$ ja $\theta = \theta(t)$, jolloin

$$\begin{cases} x' = r' \cos \theta - r(\sin \theta)\theta' \\ y' = r' \sin \theta + r(\cos \theta)\theta' \end{cases}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
 (x')^2 + (y')^2 &= (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta)^2 \\
 &= (r')^2 \cos^2 \theta + r^2(\theta')^2 \sin^2 \theta - 2rr'\theta' \cos \theta \sin \theta \\
 &\quad + (r')^2 \sin^2 \theta + r^2(\theta')^2 \cos^2 \theta + 2rr'\theta' \sin \theta \cos \theta \\
 &= (r')^2 + r^2(\theta')^2.
 \end{aligned}$$

Toisaalta

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \frac{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}{(\varphi'(s))^2} = \frac{l(\gamma)^2}{\pi^2},$$

sillä kun $t = \varphi(s)$, niin

$$\begin{cases} x(s) = x(\varphi(s)) \\ y(s) = y(\varphi(s)) \end{cases},$$

ja

$$\begin{cases} x'(s) = x'(t)\varphi'(s) \\ y'(s) = y'(t)\varphi'(s) \end{cases},$$

missä $\varphi'(s) = \frac{\pi}{l(\gamma)}$. Lisäksi tiedetään, että $x'(s)^2 + y'(s)^2 = \|\gamma'(s)\|^2 = 1$, koska $\gamma(s)$ oli parametrisoitu kaarenpituuden suhteen. Saatiin siis

$$(r')^2 + r^2(\theta')^2 = \frac{l(\gamma)^2}{\pi^2},$$

joten

$$\int_0^\pi ((r')^2 + r^2(\theta')^2) dt = \frac{l(\gamma)^2}{\pi^2} \int_0^\pi dt = \frac{l(\gamma)^2}{\pi}. \quad (4.2)$$

Toisaalta taas

$$\begin{aligned}
 x(t)y'(t) - y(t)x'(t) &= r \cos \theta (r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta) - r \sin \theta (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta) \\
 &= r^2\theta' \cos^2 \theta + r^2\theta' \sin^2 \theta = r^2\theta',
 \end{aligned}$$

joten

$$\mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (xy' - yx') dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2\theta' dt. \quad (4.3)$$

Pitää osoittaa:

$$\frac{l(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) \geq 0.$$

Käyttämällä yhtälöitä (4.2) ja (4.3) saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{l(\gamma)^2}{4\pi} - \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)) &\stackrel{(4.2),(4.3)}{=} \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2\theta' dt \\
&= \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2 - 2r^2\theta') dt \\
&= \frac{1}{4} \left(\underbrace{\int_0^\pi r^2(\theta' - 1)^2 dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^\pi (r'^2 - r^2) dt}_{\geq 0 (*)} \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

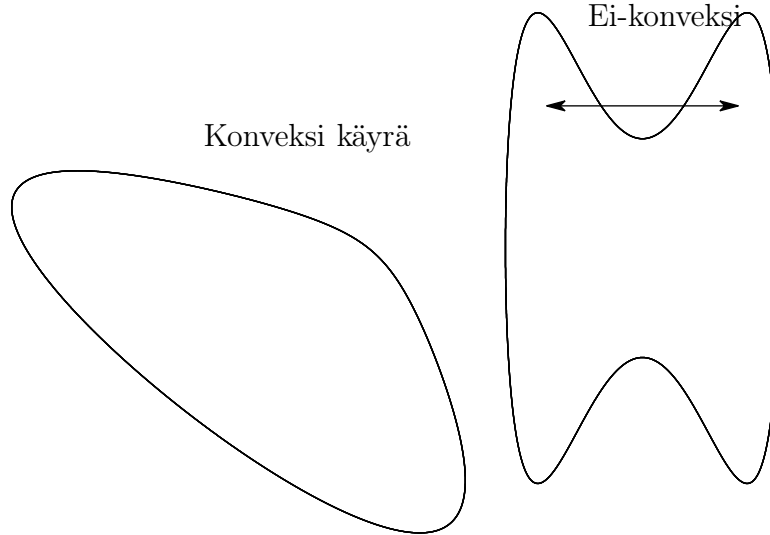
Kohta (*) saatiin Wirtingerin epäyhtälöstä (Lause 4.7) kun $F = r$ (koska valittiin $\gamma(0) = \gamma(\pi) = 0$, myös $r(0) = r(\pi) = 0$ ja lauseen ehdot toteutuvat).

Lopuksi vielä havaitaan, että yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos $\theta' = 1$ ja $r(t) = A \sin(t)$ (Lause 4.7). Tällöin $\theta(t) = t + \alpha$, missä α on vakio, joten $r(\theta) = A \sin(\theta - \alpha)$ ($A/2$ -säteisen ympyrän napakoordinaattiesitys). Näin ollen jos $\frac{1}{4\pi}l(\gamma)^2 = \mathcal{A}(\text{int}(\gamma))$, niin γ on $A/2$ -säteinen ympyrä.

KUVA

□

Määritelmä 4.8. Yksinkertainen suljettu käyrä on *konvekksi*, jos $\text{int}(\gamma)$ on konvekksi, eli kaikilla $x, y \in \text{int}(\gamma)$ pisteet x ja y ovat yhdistettävissä janapolulla $\text{int}(\gamma)$:ssa.



Määritelmä 4.9. Polun c *kärkipiste* on piste $c(t)$, joka on suunnatun kaarevuuden kriittinen piste, eli $\kappa'_s(t) = 0$.

Voidaan osoittaa, että määritelmä on riippumaton parametrisoinnista. (HT)

Esimerkki 4.10. Tarkastellaan ellipsiä $c : c(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Nyt $c'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, $c''(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$, ja

$$c' \times c'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & b \cos t & 0 \\ -a \cos t & -b \sin t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, ab).$$

Näin ollen

$$\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \kappa_s,$$

kun ellipsi on parametrisoitu positiiviseen kiertosuuntaan. Nyt

$$\begin{aligned} \kappa'_s(t) &= -\frac{3}{2}ab(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{-5/2}(2a^2 \cos t \sin t - 2b^2 \sin t \cos t) \\ &= \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Saatiin: Jos c on (aito) ellipsi ($a \neq b$), niin sillä on neljä kärkipistettä $c(0) = (a, 0)$, $c(\frac{\pi}{2}) = (0, b)$, $c(\pi) = (-a, 0)$ ja $c(\frac{3\pi}{2}) = (0, -b)$.

Jos c on ympyrä ($a = b$), niin jokainen piste on kärkipiste.

Lause 4.11 (Neljän kärkipisteen lause). *Jokaisella konveksilla yksinkertaisella tasokäyrällä on vähintään neljä kärkipistettä.*

Todistus. Jos $\kappa_s \equiv \text{vakio}$, niin $\kappa'_s \equiv 0$ ja jokainen piste on kärkipiste.

Oletetaan, että κ_s ei ole vakio. Stationaarisessa pisteessä $\kappa'_s = 0$ ja κ'_s vaihtaa etumerkkiä (konveksius). Voi olla $\kappa'_s|_{[t,t+\epsilon]} \equiv 0$.

Jatkuvana funktiona $t \mapsto \kappa_s(t)$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä $[a, b]$. Tällöin myös $\kappa' = 0$.

Voidaan olettaa, että $[a, b] = [0, L]$, käyrä parametrisoitu kaarenpituuden suhteen ja $\kappa(0)$ minimi, $\kappa(s_0)$ maksimi. Käyrä on suljettu, joten $c(0) = c(L)$.

Valitaan (x, y) -koordinaatit siten, että x -akseli sisältää pisteet $c(0)$ ja $c(s_0)$. Tällöin $c(s) = (x(s), y(s))$ ja $y(0) = y(s_0) = 0$. Käyrä ei leikkaa x -akselia muissa pisteissä välillä $[0, s_0]$, sillä konveksiudesta seuraa, että jos jokin muu leikkauspiste olisi olemassa, niin koko jana $[c(0), c(s_0)] \subset c$ sisältyisi x -akselille. Tällöin pätee $\kappa_s|_{[0, s_0]} \equiv 0$, mutta tämä tarkoittaisi että $\kappa_s \equiv 0$, koska $\kappa_s(0)$ oli pienin ja $\kappa_s(s_0)$ suurin arvo. Näin ollen y vaihtaa merkkiä täsmälleen pisteissä 0 ja s_0 .

Tehdään vasta oletus: Oletetaan, että pisteet $c(0)$ ja $c(s_0)$ ovat ainoat kärkipisteet. Tällöin κ'_s vaihtaa merkkiä vain pisteissä $s = 0$ ja $s = s_0$, ja näin ollen funktio $s \mapsto \kappa'_s(s)y(s)$ ei vaihda lainkaan merkkiä. Oletetaan parametrusointi positiiviseen kiertosuuntaan, jolloin $\kappa = \kappa_s$ (konveksius). Koska $e_1 = (x', y')$ ja $e_2 = n_s = (-y', x')$, niin Frenet-yhtälöiden (F3) mukaan

$$(x'', y'') = e'_1 = \kappa_s e_2 = \kappa(-y', x').$$

Näin ollen $x'' = -\kappa_s y'$

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa'_s(s)y(s)ds &= \int_0^L \kappa_s(s)y(s) - \int_0^L \kappa_s(s)y'(s)ds \\ &= \int_0^L x''(s)ds, \text{ sillä } y(0) = y(L) = 0 \\ &= x'(L) - x'(0) = 0, \end{aligned}$$

sillä polku oli suljettu. Tämä on ristiriidassa vasta oletuksen kanssa, sillä integroitava $s \mapsto \kappa'_s(s)y(s)$ ei vaihda merkkiä, joten $\kappa'_s y \equiv 0 \rightarrow \kappa \equiv \text{vakio}$.

Löytyy siis ainakin kolmas piste, jossa κ'_s vaihtaa merkkiä. Kuitenkin $t \mapsto \kappa'_s(t)$ on jaksollinen, joten pisteitä, joissa merkki vaihtuu, on oltava parillinen määrä. Näin ollen kärkipisteitä on vähintään neljä. \square

Huom 4.12. 1. Lauseen väite pätee myös ilman oletusta käyrän konveksiudesta.

2. Lause ei päde ilman oletusta käyrän yksinkertaisuudesta. (HT)

Part II

Pinnat

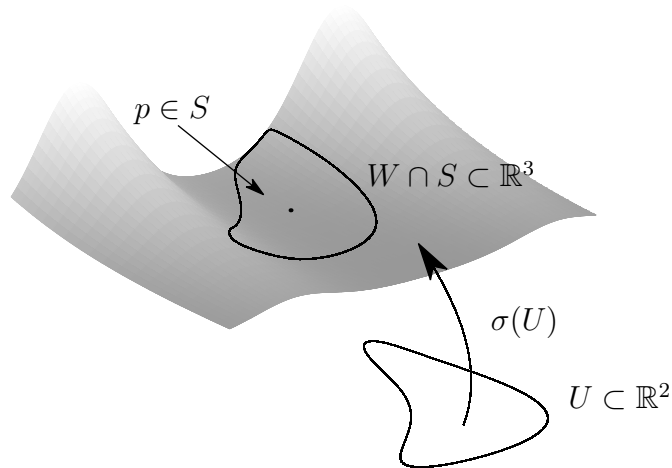
Luku 5

\mathbb{R}^3 :n pinnat

5.1 Parametrisoidut pinnat

Määritelmä 5.1. $S \subset \mathbb{R}^3$ on (topologinen) pinta, jos kaikilla $p \in S$ on olemassa avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ ja avoin joukko $W \subset \mathbb{R}^3$, $p \in W$, siten, että on olemassa homeomorfismi $\sigma : U \rightarrow W \cap S$.

Idea: kuvaus σ parametrisoi pinnan pisteen p ympäristön.



Huom 5.2 (Muistutus). $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin \iff kaikilla $u \in U$ on olemassa $r > 0$ siten, että

$$B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|u - v\| < r\} \subset U.$$

Jos $X \subset \mathbb{R}^n$ ja $Y \subset \mathbb{R}^n$, niin kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on homeomorfismi, jos f on injektio ja f, f^{-1} ovat jatkuvia.

Määritelmä 5.3. Kokoelma $\mathcal{A} = \{(\sigma, U)\}$ siten, että $S = \cup_{(\sigma, U) \in \mathcal{A}} \sigma(U)$, on pinnan S *kartasto*. Kuvaus σ on pinnan parametrusointi ja σ^{-1} *karttakuvaus*.

Esimerkki 5.4. 1. Yksikköpallon $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ luonnollinen parametrusointi pallokoordinaateissa on

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

Tarvitaan $(\theta, \varphi) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi) =: U$. Tällöin $\sigma(U)$ peittää pallon S^2 , mutta σ ei olekaan injektio eikä U ole avoin. Valinta $U := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ on suurin mahdollinen, mutta nyt $\sigma(U)$ ei peitä palloa S^2 . Tällöin $\sigma : U \rightarrow W \cap S^2$, missä

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0 \text{ tai } x < 0\}.$$

Kuvaus $\sigma : U \rightarrow W \cap S^2$ on homeomorfismi.

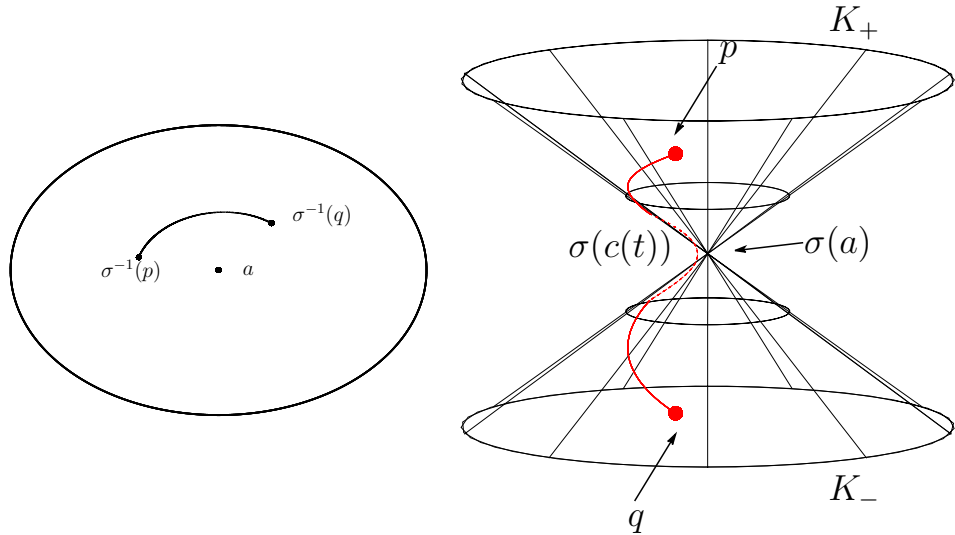
Olkoon $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ toinen parametrusointi, joka saadaan kiertämällä joukkoa $\sigma(U)$ kulman π verran (positiivisen) z-akselin suhteen ja kulman $\pi/2$ verran (positiivisen) x-akselin suhteen, eli

$$\begin{aligned} x &\mapsto -x & \mapsto -x \\ y &\mapsto -y & \mapsto -z \\ z &\mapsto z & \mapsto -y. \end{aligned}$$

Näin ollen $\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi)$. Nyt pätee $S^2 = \sigma(U) \cup \tilde{\sigma}(U)$, ja olemme osoittaneet, että S^2 on pinta.

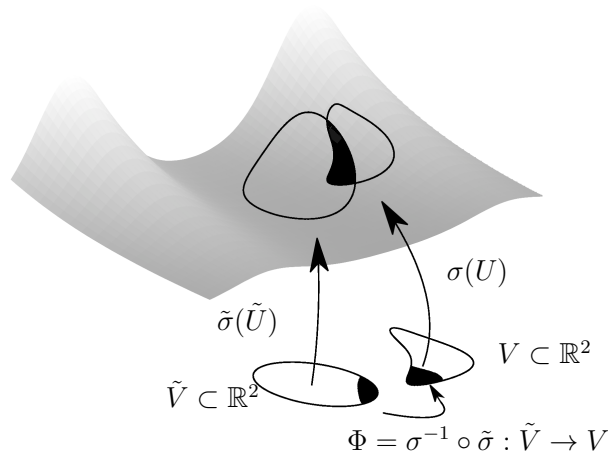
2. Kartio $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ ei ole pinta: Olkoon $\sigma : U \rightarrow K \cap W$ parametrusointi siten, että $\sigma(a) = 0$. Voidaan olettaa, että $U = B^2(a, \epsilon)$.

Merkitään $K_+ = \{(x, y, z) \in K \mid z > 0\}$ ja $K_- = \{(x, y, z) \in K \mid z < 0\}$. $W \subset \mathbb{R}^3$ on avoin joukko, joten löytyy pisteet $p \in K_+ \cap W$ ja $q \in K_- \cap W$. Nyt on olemassa pisteet $\sigma^{-1}(p)$ ja $\sigma^{-1}(q)$ yhdistävä polku c joukossa U siten, että polku ei kulje pisteen a kautta, eli $c(t) \neq a \forall t$. Näin ollen $\sigma(c) \cap \{0\} = \emptyset$, mikä on ristiriita. Kartio ei siis ole pinta.



Huomattakoon kuitenkin, että $K_+ \cup \{0\}$, $K_- \cup \{0\}$ ja $K_+ \cup K_-$ ovat (topologisia) pintoja. Parametrisoinneiksi sopivat vaikka $\sigma_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2})$ ja $\tilde{\sigma}_{\pm} = \sigma_{\pm}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$.

Määritelmä 5.5. Olkoon $\sigma : U \rightarrow S \cap W$, $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow S \cap \tilde{W}$ pinnan S parametrisointeja. Jos σ ja $\tilde{\sigma}$ ovat homeomorfismeja, niin joukot $V := \sigma^{-1}(S \cap W \cap \tilde{W})$ ja $\tilde{V} := \tilde{\sigma}^{-1}(S \cap W \cap \tilde{W})$ ovat avoimia \mathbb{R}^2 :ssa (U, \tilde{U} avoimia).



Jos $S \cap W \cap \tilde{W} \neq \emptyset$, saadaan homeomorfismi $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma} : \tilde{V} \rightarrow V$, joka on parametrisointien σ ja $\tilde{\sigma}$ välinen *transitiokuvaus*.

Pätee: $\tilde{\sigma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sigma(\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}))$ kaikilla $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{V}$.

Määritelmä 5.6. Parametrisointi $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on *säännöllinen*, jos se on sileä (eli kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat ovat olemassa) ja vektorit

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) \in \mathbb{R}^3$$

ovat lineaarisesti riippumattomia eli

$$\sigma_u \times \sigma_v \neq 0 \quad \forall (u, v) \in U,$$

kun merkitään osittaisderivaattoja u :n ja v :n suhteen lyhyesti σ_u ja σ_v .

Määritelmä 5.7. *Sileä pinta* on pinta S , jolla on kartasto, joka koostuu säännöllisistä parametrisoinneista.

Esimerkki 5.8. Tarkastellaan edellisen kohdan esimerkkejä:

1. Olkoon $\sigma, \tilde{\sigma}$ pallon S^2 parametrisointi kuten edellä, eli

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta),$$

$$\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi).$$

Nämä ovat selvästi sileitä. Nyt

$$\sigma_\theta = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

$$\sigma_\varphi = (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0),$$

joten

$$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, \cos^2 \theta \sin \varphi, \underbrace{-\sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi - \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi}_{=-\sin \theta \cos \theta}),$$

eli

$$\begin{aligned} \|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\|^2 &= \cos^4 \theta \cos^2 \varphi + \cos^4 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

mistä saadaan

$$\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos \theta| \neq 0 \quad \forall \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

joten σ on säännöllinen parametrisointi. Vastaavasti $\tilde{\sigma}$ on myös säännöllinen.

2. $K_+ \cup \{0\}$ ja $K_- \cup \{0\}$ eivät ole sileitä pintoja. Sen sijaan $K_+ \cup K_-$ on sileä pinta.

Huom 5.9. Yleisemmin: Jos pinta on parametrisoitavissa sileänä graafina $\sigma : (u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))$, missä $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ sileä, niin pinta on sileä:

$$\begin{aligned}\sigma_u &= (1, 0, h_u), & \sigma_v &= (0, 1, h_v) \\ \Rightarrow \sigma_u \times \sigma_v &= (-h_u, -h_v, 1) \neq 0 \quad \forall h.\end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että sileän pinnan transitiokuvaukset ovat sileitä (käänteiskuvauslause). Tähän palataan hieman myöhemmin.

Mutta mitä tarkoittaa sileys kuvausten σ^{-1} osalta?

Lause 5.10. *Olkkoon $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ avoimia ja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen parametrisointi. Jos $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ on sileä diffeomorfismi (= sileä homeomorfismi siten, että Φ^{-1} on sileä), niin $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ on säännöllinen parametrisointi.*

Todistus. Kuvauksen $\tilde{\sigma}$ sileys on selvää, sillä se on sileiden funktioiden yhdiste.

Osoitetaan, että $\tilde{\sigma}_u \times \tilde{\sigma}_v \neq 0$.

Olkkoon $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{U}$ ja $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U$. Ketjusääntö käytettynä funktion $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ antaa

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} &= \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} &= \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}},\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} &= \sigma_u \times \sigma_v \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} + \sigma_v \times \sigma_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \\ &= \sigma_u \times \sigma_v \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix} \\ &= J_\Phi \sigma_u \times \sigma_v,\end{aligned}$$

missä J_Φ on Φ :n Jacobin determinantti. Koska Φ on kääntyvä, niin $J_\Phi \neq 0$:

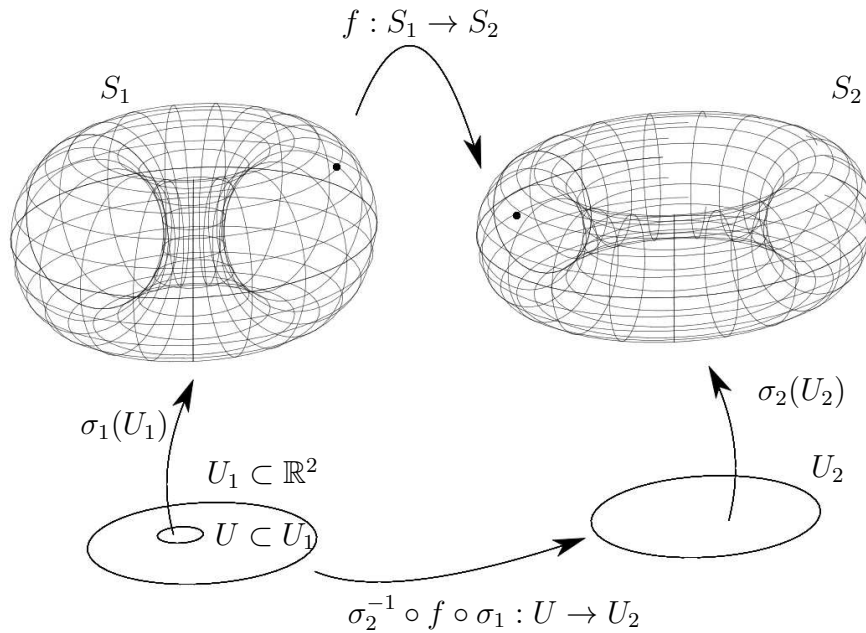
$$\Phi \circ \Phi^{-1}(x) = x = \Phi^{-1} \circ \Phi(x) \quad \forall x,$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow D\Phi \circ D\Phi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1} \\ \Rightarrow J_\Phi &= \det D\Phi \neq 0.\end{aligned}$$

Näin ollen $\tilde{\sigma}$ on säännöllinen. □

Sileiden transitiokuvausten avulla voidaan määrittellä pintojen välisten kuvausten sileys:

Määritelmä 5.11. Olkoot S_1 ja S_2 sileitä pintoja. Kuvaus $f : S_1 \rightarrow S_2$ on *sileä pisteessä* $x \in S_1$, jos $\sigma_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on sileä parametrisointi pisteen x ympäristössä, $\sigma_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on sileä parametrisointi pisteen $f(x)$ ympäristössä ja kuvaus $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 : U \rightarrow U_2$ (kuvauksen f *lokaali esitys*) on sileä pisteessä $\sigma_1^{-1}(x) \in U \subset U_1$ jollakin avoimella joukolla U .



Yllä oleva määritelmä on riippumaton sileiden transitiokuvausten välittämien parametrisointien valinnasta: Olkoon $\tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ toinen sileä parametrisointi pisteen $x \in S_1$ ympäristössä ja $\tilde{\sigma}_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ toinen parametrisointi pisteen $f(x)$ ympäristössä.

Tällöin myös $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_2$ on sileä: Oletetaan tunnetuksi transitiokuvausten Φ_1 ja Φ_2 sileys. Tällöin kuvaus

$$\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\sigma}_1 = \Phi_2^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 \circ \Phi_1$$

on määrittelyjoukossaan sileä.

(Harjoitustehtävä: Jos kuvaukset $f : S_1 \rightarrow S_2$ ja $g : S_2 \rightarrow S_3$ ovat sileitä, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ on sileä.)

Lause 5.12. Olkoon $f : S_1 \rightarrow S_2$ diffeomorfismi sileiden pintojen S_1 ja S_2 välillä ja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen parametrisointi pinnalle S_1 . Tällöin $f \circ \sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on säännöllinen parametrisointi pinnalle S_2 .

Todistus. Olkoon $x \in \sigma(U)$ ja $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ pinnan S^2 parametrisointi siten, että $f(x) \in \tilde{\sigma}(\tilde{U})$. Tällöin $F := \tilde{\sigma}^{-1} \circ f \circ \sigma : U \rightarrow \tilde{U}$ on sileä homeomorfismi ja $F^{-1} = \sigma^{-1} \circ f^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ on sileä. Lauseen 5.10 mukaan $f \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ F$ on säännöllinen parametrisointi pinnalle S^2 .

KUVA

□

Olkoon S sileä pinta ja $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen parametrisointi. Olkoon $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sileä polku siten, että $\gamma(\alpha, \beta) \subset \sigma(U)$. Tällöin

$$t \mapsto (\sigma^{-1} \circ \gamma)(t) = (u(t), v(t))$$

on sileä tasopolku. (HT)

Kääntäen: Jos $t \mapsto (u(t), v(t))$ on sileä, niin ehto $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ määrää sileä polun pinnalla S .

Huom 5.13. Lokaalisti voidaan olettaa, että tarkasteltava polku on tasopolku nostettuna parametrisoinnin avulla tasosta pinnalle: Kaikilla poluilla $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow S$ kiinteällä $t_0 \in (\alpha, \beta)$ pätee $\gamma(t) \in \sigma(U)$ kaikilla $t \in (t_0 + \epsilon, t_0 - \epsilon)$, jollakin kartalla (σ, U) , jollakin $\epsilon > 0$. Näin ollen riittää tarkastella muotoa $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ olevia polkuja (ainakin lokaalisti).

Määritelmä 5.14. Pisteeseen $p \in S$ kuuluva *tangenttiavaruus* on

$$T_p S := \{\gamma'(t_0) \mid \gamma : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow S \text{ sileä}, \gamma(t_0) = p\}.$$

Lause 5.15. Olkoon $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ pinnan S parametrisointi siten, että $p \in \sigma(U)$ ja (u, v) ovat σ :n välittämät koordinaatit. Tällöin $T_p S = \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ on \mathbb{R}^3 : n vektorialiavaruus.

Yllä $\sigma_u = \sigma_u(u_0, v_0)$, $\sigma_v = \sigma_v(u_0, v_0)$, $p = \sigma(u_0, v_0)$.

Todistus. Olkoon γ sileä polku siten, että $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$. Ketjusäännön mukaan

$$\gamma'(t) = \sigma_u u' + \sigma_v v',$$

joten $\gamma'(t) \in \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$, mikä todistaa väitteen suunnan $T_p S \subset \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$.

Toista suuntaa varten oletetaan, että $w \in \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$, eli että $w = \xi \sigma_u + \eta \sigma_v$ joillakin $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Asetetaan $\gamma(t) := \sigma(u_0 + \xi t, v_0 + \eta t)$. Nyt γ on sileä pisteessä $t = 0$, $\gamma(0) = \sigma(u_0, v_0) = p$. $\gamma'(t) = \sigma_u \xi + \sigma_v \eta = w$, joten $\text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\} \subset T_p S$. □

Huom 5.16. Tangenttiavaruuden määritelmä on riippumaton parametrisoinnin σ valinnasta. (HT)

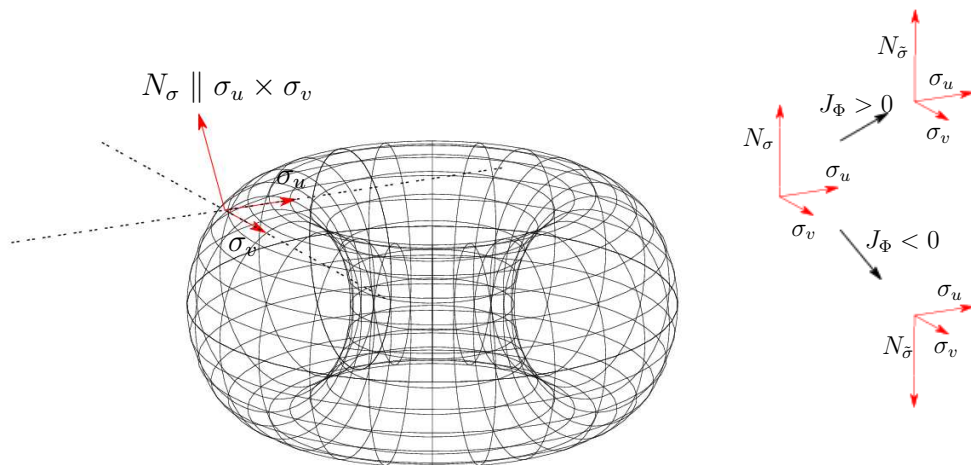
$T_p S$ määräytyy yksikäsitteisesti vektorista $N \perp T_p S$, $\|N\| = 1$.

Parametrisoinnin σ välittämä *standardi yksikkönormaali* määräytyy ehdosta

$$N_\sigma := \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}.$$

N_σ määräytyy suunnistusta vaille yksikäsitteisesti: Jos $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ on toinen parametrisointi pisteen p ympäristössä, niin lauseen 5.10 todistuksen mukaan $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = J_\Phi \sigma_u \times \sigma_v$, missä $p = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = \sigma(u_0, v_0)$ ja $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$, $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ on transitiofunktio ja J_Φ sen Jacobin determinantti.

Näin ollen $N_{\tilde{\sigma}} = \pm N_\sigma$.



Määritelmä 5.17. Sileä pinta S on *suunnistuva*, jos sillä on kartasto, jonka transitiofunktioille pätee $J_\Phi > 0$ aina, kun J_Φ on määritelty.

Olemme näin osoittaneet seuraavan:

Lause 5.18. Sileän suunnistuvan pinnan suunnistettu kartasto määrää pinnan yksikkönormaanin yksikäsitteisesti.

Huom 5.19. Lause 5.18 pätee myös kääntäen.

\mathbb{R}^3 :n pinnoille siis suunnistuvuus \iff pinnan kaksipuolisuus. Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti, sillä suunnistuvuus on topologinen ominaisuus, kun taas kaksipuolisuus riippuu upotuksesta. (Esimerkki HT)

Esimerkki 5.20 (Möbiuksen nauha). Alkutilassa z -akselin suuntainen jana $\{(1, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ pyörähtää kulman π keskipisteen P (alkutilassa $P = (1, 0, 0)$) suhteen pisteen P liikkuessa pitkin ympyrän $\{(x, y, 0) \mid x^2 +$

$y^2 = 1$ } kaarta. Asetetaan parametrisointi $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $U \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0, 2\pi)$, missä

$$\sigma(t, \theta) = \left(\left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right),$$

ja toinen parametrisointi $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä $\tilde{U} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\pi, \pi)$ ja $\tilde{\sigma} = \sigma$.

Nyt $\{(\sigma, U), (\tilde{\sigma}, \tilde{U})\}$ on Möbiuksen nauhan kartasto (säännöllinen, HT).

Osoitetaan, että Möbiuksen nauha ei ole suunnistuva:

$$\sigma_t = \left(-\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \left(-\frac{t}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta - \left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \right. \\ & \left. -\frac{t}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + \left(1 - t \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, -\frac{t}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Näin ollen mediaaniympyrällä $t = 0$ pätee

$$\sigma_\theta(0, \theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

ja

$$\sigma_t \times \sigma_\theta = \left(-\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta, -\cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, -\sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Havaitaan, että kun $t = 0$, pätee

$$\|\sigma_t \times \sigma_\theta\| = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \theta + \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2} = 1,$$

joten

$$N_\sigma(0, \theta) = \left(-\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta, -\cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, -\sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Kuitenkin

$$N_\sigma(0, 0) = (-1, 0, 0) \neq (1, 0, 0) = N_\sigma(0, 2\pi)$$

pisteessä $P = (1, 0, 0) = \sigma(0, 0) = \sigma(0, 2\pi)$. Möbiuksen nauha ei siis ole suunnistuva.

Esimerkki 5.21 (Yleistetty sylinteri siirtämällä käyrää). Olkoon $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja \mathbf{a} yksikkövektori. Asetetaan $\sigma : U \Rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{a},$$

kun $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < u < \beta\}$. Selvästi σ on sileä jos γ on sileä. Lisäksi $\sigma(u, v) = \sigma(u', v')$ jos ja vain jos $\gamma(u) - \gamma(u') = (v' - v)\mathbf{a}$, joten σ on injektio jos ja vain jos \mathbf{a} :n suuntainen suora kohtaa γ :n täsmälleen yhdessä pisteessä. Koska $\sigma_u = \gamma'$ ja $\sigma_v = \mathbf{a}$, niin $\sigma_u \times \sigma_v = \gamma' \times \mathbf{a}$. Näin ollen σ on säännöllinen jos ja vain jos γ on säännöllinen, $\gamma'(u) \nparallel \mathbf{a}$ kaikilla u ja vektorin \mathbf{a} suuntainen suora kohtaa γ :n täsmälleen yhdessä pisteessä.

KUVA

Esimerkki 5.22 (Yleistetty kartio). Yleistetty kartio on muotoa

$$\cup_{u \in (\alpha, \beta)} \text{span}\{\gamma(u) - \mathbf{p}\},$$

missä $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ ja $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Olkoon

$$\sigma(u, v) = (1 - v)\mathbf{p} + v\gamma(u).$$

Kuvaus σ on sileä, jos γ on sileä. Nyt $\sigma(u, v) = \sigma(u', v')$ jos ja vain jos $v\gamma(u) - v'\gamma(u') - (v - v')\mathbf{p} = 0$, eli jos ja vain jos vektorit $\gamma(u)$, $\gamma(u')$ ja \mathbf{p} ovat samalla suoralla. Näin ollen σ on injektio jos ja vain jos joukko $\text{span}\{\gamma(u) - \mathbf{p}\}$ sisältää täsmälleen yhden käyrän γ pisteen. Koska $\sigma_u = v\gamma'$ ja $\sigma_v = -\mathbf{p} + \gamma$, niin

$$\sigma_u \times \sigma_v = -v\gamma' \times \mathbf{p} + v\gamma' \times \gamma = v\gamma' \times (\gamma - \mathbf{p}).$$

Näin ollen σ on säännöllinen jos ja vain jos γ on säännöllinen, $v \neq 0$, $\gamma' \nparallel \gamma - \mathbf{p}$ ja $\text{span}\{\gamma(u) - \mathbf{p}\}$ sisältää täsmälleen yhden käyrän γ pisteen.

KUVA

Edellinen esimerkki voidaan yleistää seuraavasti:

Esimerkki 5.23 (Viivoitinpinta). Olkoon $S = \cup_{u \in (\alpha, \beta)} L_{\gamma(u)}$, missä $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $L_{\gamma(u)}$ on pisteen $\gamma(u)$ kautta kulkeva suora. Oletetaan, että $\gamma(t) \cap L_{\gamma(u)} \neq \emptyset$ jos ja vain jos $t = u$. Kaikilla $P \in S$ on olemassa yksikäsitteinen suora $L_{\gamma(u)}$ siten, että $P \in L_{\gamma(u)}$. Merkitään sitä $\delta(u)$, jolloin $0 \neq \delta(u) \parallel \text{span}\{P - \gamma(u)\}$. Olkoon $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$, kun $v \in \mathbb{R}$. Nyt σ on sileä,

kun γ ja δ ovat sileitä. Derivaatoille pätee $\sigma_u = \gamma' + v\delta'$ ja $\sigma_v = \delta$, joten $\sigma_u \times \sigma_v = \gamma' \times \delta + v\delta' \times \delta = (\gamma' + v\delta') \times \delta$. Näin ollen σ on säännöllinen jos ja vain jos $\gamma' + v\delta'$ ja δ ovat lineaarisesti riippumattomia. Erityisesti σ on säännöllinen, kun γ' ja δ ovat lineaarisesti riippumattomia ja v on riittävän pieni.

KUVA

Esimerkki 5.24 (Pyörähdyspinta). Pyörähdyspinta saadaan, kun tasokäyrä (profiilikäyrä) pyörähtää samassa tasossa olevan suoran ympäri. Olkoon pyörähdysakselina nyt z -akseli ja tasokäyrä $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2 = xz$ -taso muotoa $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$. Valitaan pinnalle parametrisointi

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

tällöin $\sigma_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))$ ja $\sigma_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$. Näin ollen

$$\sigma_u \times \sigma_v = (-g'(u)f(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f'(u)f(u)),$$

joten

$$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = g'^2 f^2 + f'^2 f^2 = (g'^2 + f'^2) f^2,$$

eli $\|\sigma_u \times \sigma_v\| \neq 0$, kun $f(u) \neq 0 \neq g'^2(u) + f'^2(u) = |\gamma'(u)|^2$ kaikilla u . Voidaan olettaa, että $f(u) > 0$, sillä $f(u)$ on pisteen $\sigma(u, v)$ etäisyys z -akselista. Havaitaan, että σ on injektio kun γ on injektio ja $v \in (\alpha, \beta)$, $\beta - \alpha \in (0, 2\pi)$.

KUVA

5.2 Käänteiskuvauslauseen sovelluksia

Olkoon $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sileä kuvaus, $U \subset \mathbb{R}^m$ avoin ja

$$(Df)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

lineaarikuvausten $(Df)(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ esitysmatriisi \mathbb{R}^m :n ja \mathbb{R}^n :n standardikantojen suhteen pisteessä $x \in U$. Tällöin pätee käänteiskuvauslause:

Lause 5.25 (Käänteiskuvauslause). *Olkoon $n = m$. Jos $(Df)(x_0)$ on kääntövä jollakin $x_0 \in U$ ($\iff J(f(x_0)) = \det(Df)(x_0) \neq 0$) niin löytyy avoin joukko $V \in \mathbb{R}^n$ ja sileä kuvaus $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ siten, että pätee*

1. $y_0 = f(x_0) \in V$
2. $g(y_0) = x_0$
3. $g(V) \subset U$
4. $g(V) \subset \mathbb{R}^n$ on avoin
5. $f(g(y)) = y$ kaikilla $y \in V$

Erityisesti siis $g : V \rightarrow g(V)$ ja $f : g(V) \rightarrow V$ ovat toistensa käänteiskuvauslauseita.

Osoitetaan tämän avulla seuraava lause:

Lause 5.26. *Sileän pinnan transitiofunktiot ovat sileitä.*

Todistus. Olkoon $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllisiä parametrisointeja ja $\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Oletetaan, että $\sigma(u_0, v_0) = \tilde{\sigma}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = P$.

(KUVA)

Merkitään $\sigma(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$. Koska $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$, niin Jacobin matriisi on

$$D\sigma = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix} = (\sigma_u, \sigma_v)$$

ja $\text{rank}(D\sigma) = 2$. Näin ollen kaikilla (u, v) jokin matriiseista

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

on kääntövä, sillä

$$\sigma_u \times \sigma_v = \left(\begin{vmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} f_u & h_u \\ f_v & h_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{vmatrix} \right).$$

Voidaan olettaa, että $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$ on kääntyvä pisteessä P . Sovelletaan nyt käänteiskuvauslausetta funktioon $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$. Tällöin havaitaan, että löytyy avoin joukko $V \in \mathbb{R}^2$ siten, että $F(u_0, v_0) \in V$ ja avoin joukko $W \in U$ siten, että $F : W \rightarrow V$ on bijektio ja sillä on sileä käänteiskuvaus $F^{-1} : V \rightarrow W$. Koska $\sigma|_W : W \rightarrow \sigma(W)$ on bijektio, myös projektio $\pi : \sigma(W) \rightarrow V$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, on bijektio, sillä

$$\pi \circ \sigma|_W = \pi \circ (f, g, h)|_W = (f, g)|_W = F|_W.$$

Siis $\pi = F|_W \circ \sigma^{-1}|_W$ on bijektio. Voidaan olettaa, että $\sigma(W) \subset \tilde{\sigma}(\tilde{U})$. Merkitään $\tilde{W} := \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(W)) \subset \tilde{U}$ (avoin joukko, sillä $\sigma(W)$ on avoin ja $\tilde{\sigma}$ jatkuva) ja $\tilde{F} := \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}|_{\tilde{W}} = F^{-1} \circ \tilde{F}|_{\tilde{W}}$, missä $\tilde{F} = \pi \circ \tilde{\sigma}$, on sileä kuvaus \tilde{W} :ssä. Tämä todistaa väitteen.

(KUVA)

□

Lause 5.27. *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^3$ siten, että kaikilla $P \in S$ on olemassa avoin joukko $W \subset \mathbb{R}^3$, $P \in W$, ja sileä kuvaus $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että*

$$(i) \quad S \cap W = \{(x, y, z) \in W \mid f(x, y, z) = 0\}$$

$$(ii) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P) \right) \neq 0.$$

Tällöin S on säännöllinen pinta.

Todistus. Olkoon $P = (x_0, y_0, z_0)$. Voidaan olettaa, että $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$. Asetetaan $F : W \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$. (Jos sen sijaan päteisi $\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ tai $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$, asetettaisiin vastaavasti $F(x, y, z) = (f(x, y, z), y, z)$ tai $F(x, y, z) = (x, f(x, y, z), z)$.) Nyt

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

ja $DF(P)$ on kääntyvä, sillä $f_z(P) \neq 0$. Käänteiskuvauslauseesta seuraa nyt, että on olemassa avoin joukko $V \in \mathbb{R}^3$ siten, että $F(P) = (x_0, y_0, 0) \in V$ ja sileä kuvaus $G : V \rightarrow W$ siten, että $\tilde{W} = G(V) \in \mathbb{R}^3$ on avoin ja $F : \tilde{W} \rightarrow V$ ja $G : V \rightarrow \tilde{W}$ ovat toistensa käänteiskuvauksia.

Koska $V \subset \mathbb{R}^3$ on avoin, on olemassa avoimet joukot $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ ja $U_2 \subset \mathbb{R}$ siten, että $(x_0, y_0) \in U_1$ ja $0 \in U_2$ ja $U_1 \times U_2 \subset V$. Voidaan olettaa, että $V = U_1 \times U_2$.

Koska F ja G ovat käänteiskuvauksia, pätee $G(x, y, w) = (x, y, g(x, y, w))$ jollakin sileällä $g : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Lisäksi $f(x, y, g(x, y, w)) \in W$ kaikilla

$(x, y) \in U_1$, $w \in U_2$. Asetetaan $\sigma : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y, 0))$. Tällöin σ on homeomorfismi kuvajoukolleen $\sigma(U_1) = S \cap W$. Nyt $\sigma^{-1} = \pi|_{S \cap W}$, missä $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Kuvaus σ on säännöllinen: se on selvästi sileä, ja lisäksi $\sigma_x = (1, 0, g_x)$, $\sigma_y = (0, 1, g_y)$, ja

$$\sigma_x \times \sigma_y = (-g_x, -g_y, 1) \neq 0.$$

Näin ollen σ on säännöllinen pinnan parametrisointi pisteen P ympäristössä. Koska P oli mielivaltainen S :n piste, saamme näin kartaston, joka osoittaa joukon S olevan säännöllinen pinta.

(KUVA)

□

Luku 6

Ensimmäinen perusmuoto

6.1 Ensimmäisen perusmuodon määritelmä

Olkoon $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen parametrisointi ja $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \sigma(U)$ sen polku,

$$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)).$$

Olkoon $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Polun kaarenpituus on

$$s = l(\gamma|_{[t_0, t]}) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tilde{t})\| d\tilde{t}.$$

Ketjusääntö antaa $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$, joten

$$\begin{aligned} \|\gamma'\|^2 &= (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_u u' + \sigma_v v') \\ &= \sigma_u \cdot \sigma_u (u')^2 + 2\sigma_u \cdot \sigma_v u'v' + \sigma_v \cdot \sigma_v (v')^2 \\ &=: E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^t (E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2)^{1/2} d\tilde{t} \\ &= \int_{t_0}^t (E(u'd\tilde{t})^2 + 2Fu'v'd\tilde{t}^2 + G(v'd\tilde{t})^2)^{1/2} \\ &= \int_{\gamma} \sqrt{ds^2}. \end{aligned}$$

Lauseke $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ on parametrisointiin σ liittyvä *ensimmäinen perusmuoto*. Nyt ds^2 , tai paremminkin ds , antaa pinnan metriikan *kaarenpituuselementin*.

Huom 6.1. Elementti ds^2 määrää myös *metriikan* $\sigma(U)$:lle:

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} \{l(\gamma) \mid \gamma \text{ on pisteet } p, q \in \sigma(U) \text{ yhdistävä polku } \gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \sigma(U)\}.$$

Ensimmäinen perusmuoto voidaan tulkita *parametriperheenä sisätuloja* $I : p \rightarrow I_p$, $I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$, missä $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ on avaruuden $T_p\mathbb{R}^3 = \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v, N_\sigma\}$, $p = \sigma(u, v)$, sisätulon $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (tämä on \mathbb{R}^3 :n euklidinen sisätulo: $\langle X, Y \rangle = X \cdot Y$, $X, Y \in \mathbb{R}^3$) rajoittuma tangentialiavaruuteen T_pS .

(KUVA)

Merkitään lyhyesti $I(X, Y) := \langle X, Y \rangle$ kaikilla $X, Y \in T_p\mathbb{R}^3$.

I indusoi symmetrisen bilineaarimuodon myös pisteeseen $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ liittyvään tangentialiavaruuteen $T_{(u,v)}U \cong \mathbb{R}^2$ parametrisoinnin σ välityksellä: Kaikilla $V, W \in T_{(u,v)}U$

$$I_{(u,v)} : (V, W) \mapsto \langle D\sigma(u, v)V, D\sigma(u, v)W \rangle = \underbrace{\langle (D\sigma(u, v))^T D\sigma(u, v)V, W \rangle}_{=:g(u,v)}.$$

Jos $V = (V^1, V^2)$, $W = (W^1, W^2) \in T_{(u,v)}U$, niin merkitään

$$I_{(u,v)}(V, W) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u, v) V^i W^j,$$

missä $g_{ij}(u, v)$ on 2×2 -matriisi. Etsitään tämän matriisin esitys parametrisoinnin $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ välittämässä koordinaateissa:

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= D\sigma^T D\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u^1 & \sigma_v^1 \\ \sigma_u^2 & \sigma_v^2 \\ \sigma_u^3 & \sigma_v^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sigma_u^1)^2 + (\sigma_u^2)^2 + (\sigma_u^3)^2 & \sigma_u^1\sigma_v^1 + \sigma_u^2\sigma_v^2 + \sigma_u^3\sigma_v^3 \\ \sigma_v^1\sigma_u^1 + \sigma_v^2\sigma_u^2 + \sigma_v^3\sigma_u^3 & (\sigma_v^1)^2 + (\sigma_v^2)^2 + (\sigma_v^3)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mikä on positiivinen, symmetrinen 2×2 -matriisi.

Voidaan kirjoittaa:

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} I(\sigma_u, \sigma_u) & I(\sigma_u, \sigma_v) \\ I(\sigma_v, \sigma_u) & I(\sigma_v, \sigma_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

missä $(u, v) \mapsto E(u, v)$, $(u, v) \mapsto F(u, v)$ ja $(u, v) \mapsto G(u, v)$ ovat kuten edellä.

Määritelmä 6.2. Matriisi (g_{ij}) on parametrisointiin σ liittyvä *metrinen tensori*.

Huom 6.3. Neliömuoto $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ operoi vektorikenttiin: $V = (V^1, V^2) := V^1 \frac{\partial}{\partial u} + V^2 \frac{\partial}{\partial v}$ ja $W = (W^1, W^2) := W^1 \frac{\partial}{\partial u} + W^2 \frac{\partial}{\partial v}$, missä $T_{(u,v)}U = \text{span}\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ ja $\frac{\partial}{\partial u}$ ja $\frac{\partial}{\partial v}$ merkintä koordinaattien u, v suuntaisille yksikkövektoreille.

$$\begin{aligned} ds^2(V, W) &= Edu^2(V, W) + 2Fdudv(V, W) + Gdv^2(V, W) \\ &:= EV^1W^1 + F(V^1W^2 + W^1V^2) + GV^2W^2. \end{aligned}$$

Tämä vastaa matriisioperointia

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} EV^1 + FV^2 \\ FV^1 + GV^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= EV^1W^1 + F(V^1W^2 + W^1V^2) + GV^2W^2. \end{aligned}$$

Esimerkki 6.4 (Tason parametrisointi). Jos $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$, $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = 1$, niin $\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$ on pisteen \mathbf{a} kautta kulkevan, tason $\text{span}\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ suuntaisen tason parametrisointi. σ on säännöllinen, koska $\sigma_u = \mathbf{p}$, $\sigma_v = \mathbf{q}$, $\sigma_u \times \sigma_v = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$. Lisäksi

$$\left. \begin{aligned} E &= \sigma_u \cdot \sigma_u = \|\mathbf{p}\|^2 = 1 \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0 \\ G &= \sigma_v \cdot \sigma_v = \|\mathbf{q}\|^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1. \text{ perusmuoto } du^2 + dv^2.$$

Esimerkki 6.5 (Pallo). Pallopinnan parametrisoinnille

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

pätee

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \sigma_\varphi &= (-\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} E &= \sigma_\theta \cdot \sigma_\theta = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1 \\ F &= \sigma_\theta \cdot \sigma_\varphi = \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi = 0 \\ G &= \sigma_\varphi \cdot \sigma_\varphi = \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi = \cos^2 \theta \end{aligned}$$

ja 1. perusmuoto on $d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$.

Esimerkki 6.6 (Yleistetty sylinteri). Olkoon $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\mathbf{a}$ yleistetyn sylinterin parametrisointi. Oletetaan, että $\|\gamma'\| = 1$, $\|\mathbf{a}\| = 1$ ja että $|\gamma|$ on tasossa, joka on kohtisuorassa vektoria \mathbf{a} vastaan. Nyt $\sigma_u = \gamma'$ ja $\sigma_v = \mathbf{a}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} E &= \|\sigma_u\|^2 = \|\gamma'\|^2 = 1 \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = \gamma' \cdot \mathbf{a} = 0 \\ G &= \|\sigma_v\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 = 1 \end{aligned}$$

ja 1. perusmuoto on $du^2 + dv^2$ kuten tasollakin.

Esimerkki 6.7 (Yleistetty kartio). Yleistetyn kartion parametrisointi on $\sigma(u, v) = (1 - v)\mathbf{p} + v\gamma(u)$. Voidaan olettaa, että $\mathbf{p} = 0$ (siirto ei vaikuta 1. perusmuotoon (HT)), $\|\gamma(u)\| = 1$ (tarvittaessa valitaan γ uudelleen leikkaamalla kartio yksikköpallolla), ja $\|\gamma'\| = 1$. Tällöin $\sigma_u = v\gamma'$ ja $\sigma_v = \gamma$, joten

$$\begin{aligned} E &= \|\sigma_u\|^2 = v^2\|\gamma'\|^2 = v^2 \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = v\gamma' \cdot \gamma = 0 \\ G &= \|\sigma_v\|^2 = \|\gamma\|^2 = 1 \end{aligned}$$

ja 1. perusmuoto on $v^2 du^2 + dv^2$, eli se on riippumaton polusta γ !

6.2 Isometriat

Määritelmä 6.8. Olkoot S_1, S_2 säännöllisiä pintoja. Diffeomorfismi $f : S_1 \rightarrow S_2$ on *isometria* jos se kuvaa S_1 :n polut samanpituisiksi poluiksi pinnalla S_2 .

Lause 6.9. *Diffeomorfismi $f : S_1 \rightarrow S_2$ on isometria jos ja vain jos S_1 :n säännölliselle parametrisoinnilla σ_1 ja S_2 :n parametrisoinnilla $f \circ \sigma_1$ on sama ensimmäinen perusmuoto.*

Todistus. Riittää tarkastella yhtä säännöllistä parametrisointia $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Lauseen 5.12 mukaan $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$ on tällöin S_2 :n säännöllinen parametrisointi.

“ \Leftarrow ”: Olkoon $t \mapsto ((u(t), v(t)))$ alueen U säännöllinen polku. Määritellään

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \gamma_1(t) &= \sigma_1(u(t), v(t)) \in S_1, \\ \gamma_2 : \gamma_2(t) &= \sigma_2(u(t), v(t)) \in S_2. \end{aligned}$$

Tällöin

$$f(\gamma_1(t)) = f(\sigma_1(u(t), v(t))) = \sigma_2(u(t), v(t)) = \gamma_2(t)$$

kaikilla t . Molemmilla poluilla on sama pituus, sillä se saadaan integroimalla lauseketta $(E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2)^{1/2}$, missä $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ on yhteinen perusmuoto.

" \Rightarrow ": Olkoon f isometria ja $t \mapsto (u(t), v(t))$ U :n polku. Tällöin poluilla $\gamma_1(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$ ja $\gamma_2(t) = \sigma_2(u(t), v(t))$ on sama pituus. Olkoon (α, β) parametriväli. Kaikilla $t_0, t \in (\alpha, \beta)$ pätee

$$\int_{t_0}^t (E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2)^{1/2} dt = \int_{t_0}^t (E_2(u')^2 + 2F_2u'v' + G_2(v')^2)^{1/2} dt,$$

missä E_1, F_1, G_1 ovat σ_1 :n 1. perusmuodon kertoimet ja E_2, F_2, G_2 ovat σ_2 :n 1. perusmuodon kertoimet. Näin ollen kaikilla $t_0, t \in (\alpha, \beta)$

$$E_1(u')^2 + 2F_1u'v' + G_1(v')^2 = E_2(u')^2 + 2F_2u'v' + G_2(v')^2. \quad (*)$$

Olkoon $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ja $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$. Soveltamalla yhtälöä (*) seuraaviin U :n polkuihin nähdään, että kertoimet ovat samat:

- (i) $u(t) = u_0 + t - t_0$, $v \equiv v_0 \Rightarrow u' = 1$, $v' = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$
- (ii) $u \equiv u_0$, $v(t) = v_0 + t - t_0 \Rightarrow u' \equiv 0$, $v' \equiv 1 \Rightarrow G_1 = G_2$
- (iii) $u(t) = u_0 + t - t_0$, $v(t) = v_0 + t - t_0 \Rightarrow u' \equiv 1 \equiv v'$
 $\Rightarrow E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{(i) \text{ ja } (ii)} F_1 = F_2.$

□

Esimerkki 6.10. Olkoon $S_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 2\pi\}$ ja $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Tällöin $\sigma_1 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_1(u, v) = (u, v, 0)$, on koko S_1 :n parametrisointi ja $\sigma_2 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, on koko S_2 :n parametrisointi. Esimerkki 6.6 edellä kertoi, että σ_1 :n ja σ_2 :n 1. perusmuoto on sama. Näin ollen kuvaus $f : f(u, v, 0) = (\cos u, \sin u, v)$, $f : S_1 \rightarrow S_2$, on isometria.

Esimerkki 6.11. Tarkastellaan käyrän tangentin kehittämää pintaa

$$S = \cup_{u \in (\alpha, \beta)} \text{span}\{\gamma'(u)\},$$

kun $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$ on säännöllinen ja $\|\gamma'(t)\| = 1$. Pisteiden $p \in S$ ympäristön parametrisointi on $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\gamma'(u)$, $v \in \mathbb{R}$. Tällöin $\sigma_u = \gamma'(u) + v\gamma''(u)$ ja $\sigma_v = \gamma'(u)$, joten $\sigma_u \times \sigma_v = v\gamma''(u) \times \gamma'(u)$, eli parametrisointi on säännöllinen kaikilla $v \neq 0 \neq \gamma''(u)$, kaikilla u , mikäli σ on injektio. Frenet-yhtälöistä (F3) seuraa, että

$$\sigma_u \times \sigma_v = v\kappa e_2 \times e_1 = -v\kappa e_3.$$

Näin ollen σ on säännöllinen $\iff \sigma$ on injektio, $\kappa \neq 0$, $v \neq 0$.

(Erityisesti $v < 0$ ja $v > 0$ antavat kaksi säännöllistä pintaa, jotka kohtaavat käyrällä γ .)

Lause 6.12. *Käyrän tangentin kehittämä pinta on lokaalisti isometrinen tason avoimen osajoukon kanssa.*

Todistus. Lasketaan käyrän tangentin kehittämän pinnan 1. perusmuoto:

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u = (\gamma' + v\gamma'') \cdot (\gamma' + v\gamma'') = \|\gamma'\|^2 + v^2\|\gamma''\|^2 = 1 + v^2\kappa^2,$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = (\gamma' + v\gamma'') \cdot \gamma' = \|\gamma'\|^2 + v\gamma'' \cdot \gamma' = 1,$$

$$G = \sigma_v \cdot \sigma_v = \gamma' \cdot \gamma' = 1,$$

sillä $\|\gamma'\| = 1$. Näin ollen 1. perusmuoto on $ds^2 = (1+v^2\kappa^2)du^2 + 2dudv + dv^2$.

Pitää osoittaa, että tason osajoukko on parametrisoitavissa siten, että sillä on sama 1. perusmuoto.

Olkoon $\tilde{\gamma}$ tasokäyrä siten, että $\tilde{\kappa}_s = \kappa > 0$. Tällainen $\tilde{\gamma}$ löytyy aina lauseen 2.8 perusteella. Nyt $\tilde{\gamma}$:n tangenttien kehittämän pinnan parametrisointi $\tilde{\sigma}(u, v) = \tilde{\gamma}(u) + v\tilde{\gamma}'(u)$ antaa $\tilde{E} = E$, $\tilde{F} = F$ ja $\tilde{G} = G$, kun $\|\tilde{\gamma}'\| = 1$. Lisäksi $|\tilde{\gamma}| \subset \mathbb{R}^2$, sillä $\tilde{\gamma}'(t) \in \mathbb{R}^2$ kaikilla t . Näin ollen $\tilde{\sigma}(u, v) = \tilde{\gamma}(u) + v\tilde{\gamma}'(u)$ on avoimen tason osajoukon parametrisointi, kun $v \neq 0$ ja $\tilde{\sigma}$ on injektio. \square

Huom 6.13. Voidaan osoittaa myös käänteinen väite: Jokainen riittävän pieni pinnan osa, joka on isometrinen tason avoimen joukon kanssa, on

1. taso,
2. yleistetty sylinteri,
3. yleistetty kartio,
4. käyrän tangentin kehittämä pinta,

tai jonkin näistä osa.

6.3 Pintojen konformikuvaukset

Tarkastellaan sitten pintojen konformikuvauksia. Olkoon $t \mapsto \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ ja $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \sigma(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ polkuja, $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sileän pinnan S säännöllinen parametrisointi ja $\gamma(t_0) = P = \tilde{\gamma}(t_0) \in \sigma(U)$. Asetetaan

$$\theta = \angle(\gamma(t_0), \tilde{\gamma}(t_0)) := \angle(\gamma'(t_0), \tilde{\gamma}'(t_0)),$$

jolloin

$$\cos \theta = \frac{\gamma'(t_0) \cdot \tilde{\gamma}'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\| \|\tilde{\gamma}'(t_0)\|}.$$

(KUVA)

Ketjusäännöstä seuraa, että $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$, $\tilde{\gamma}' = \sigma_u \tilde{u}' + \sigma_v \tilde{v}'$, joten

$$\begin{aligned} \gamma' \cdot \tilde{\gamma}' &= \sigma_u \cdot \sigma_u u' \tilde{u}' + \sigma_u \cdot \sigma_v u' \tilde{v}' + \sigma_v \cdot \sigma_u v' \tilde{u}' + \sigma_v \cdot \sigma_v v' \tilde{v}' \\ &= Eu' \tilde{u}' + F(u' \tilde{v}' + v' \tilde{u}') + Gv' \tilde{v}', \end{aligned}$$

ja saadaan

$$\cos \theta = \frac{Eu' \tilde{u}' + F(u' \tilde{v}' + v' \tilde{u}') + Gv' \tilde{v}'}{(E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2)^{1/2} (E(\tilde{u}')^2 + 2F\tilde{u}'\tilde{v}' + G(\tilde{v}')^2)^{1/2}}.$$

Esimerkki 6.14. Koordinaattikäyrille $\gamma(t) = \sigma(u_0, v_0 + t + t_0)$, $\tilde{\gamma}(t) = \sigma(u_0 + t + t_0, v_0)$ saadaan

$$\begin{aligned} u(t) &\equiv u_0, \\ v(t) &= v_0 + t + t_0, \\ \tilde{u}(t) &= u_0 + t + t_0, \\ \tilde{v}(t) &\equiv v_0, \end{aligned}$$

joten $u' \equiv 0 \equiv \tilde{v}'$ ja $v' \equiv 1 \equiv \tilde{u}'$, ja näin ollen

$$\cos(\theta) = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Erityisesti: Koordinaattikäyrät ovat kohtisuorassa jos ja vain jos $F = 0$.

Määritelmä 6.15. Jos S_1 ja S_2 ovat sileitä pintoja, niin diffeomorfismi $f : S_1 \rightarrow S_2$ on *konforminen* jos

$$\angle(\gamma'(t_0), \tilde{\gamma}'(t_0)) = \angle((f \circ \gamma)'(t_0), (f \circ \tilde{\gamma})'(t_0))$$

kaikilla säännöllisillä $\gamma, \tilde{\gamma}$ joille $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$.

Toisin sanoen, f on konforminen, jos se säilyttää kulmat. Usein vaaditaan myös, että f on suunnistuksen säilyttävä. Jos suunnistus kääntyy, f on *antikonforminen*. Erityisen kiinnostavia ovat säännölliset parametrisoinnit $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, jotka ovat lisäksi konformisia (=konforminen parametrisointi).

Lause 6.16. *Diffeomorfismi $f : S_1 \rightarrow S_2$ on konforminen jos ja vain jos $\sigma_1:n$ ja $f \circ \sigma_1:n$ ensimmäiset perusmuodot ovat keskenään (pisteittäin) verrannollisia kaikilla pinnan S_1 parametrisoinneilla σ_1 .*

Todistus. Väite on lokaali, joten riittää tarkastella yhtä parametrisointia. Olkoon $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

“ \Leftarrow ”: Oletetaan, että näiden ensimmäiset perusmuodot ovat keskenään (pisteittäin) verrannollisia, eli että

$$E_2 du^2 + 2F_2 dudv + G_2 dv^2 = \lambda(E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2),$$

missä (E_1, F_1, G_1) ovat $\sigma_1:n$ 1. perusmuodon kertoimet, (E_2, F_2, G_2) ovat $\sigma_2:n$ 1. perusmuodon kertoimet ja $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \lambda(u, v)$, on sileä (verrannollisuus)funktio. Pätee $E_i, G_i > 0$, joten myös $\lambda(u, v) > 0$ kaikilla (u, v) .

Olkoot γ ja $\tilde{\gamma}$ polkuja $\gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$, $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$, ja $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$. Tällöin polkujen

$$t \mapsto (f \circ \gamma)(t) = f(\sigma_1(u(t), v(t))) = \sigma_2(u(t), v(t)) \in \sigma_2(U)$$

ja

$$t \mapsto (f \circ \tilde{\gamma})(t) = f(\sigma_1(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))) = \sigma_2(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) \in \sigma_2(U)$$

välinen kulma θ pisteessä $\sigma_2(u(t_0), v(t_0)) = \sigma_2(\tilde{u}(t_0), \tilde{v}(t_0))$ toteuttaa

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{E_2 u' \tilde{u}' + F_2 (u' \tilde{v}' + \tilde{u}' v') + G_2 v' \tilde{v}'}{(E_2 (u')^2 + 2F_2 u' v' + G_2 (v')^2)^{1/2} (E_2 (\tilde{u}')^2 + 2F_2 \tilde{u}' \tilde{v}' + G_2 (\tilde{v}')^2)^{1/2}} \\ &= \frac{E_1 u' \tilde{u}' + F_1 (u' \tilde{v}' + \tilde{u}' v') + G_1 v' \tilde{v}'}{(E_1 (u')^2 + 2F_1 u' v' + G_1 (v')^2)^{1/2} (E_1 (\tilde{u}')^2 + 2F_1 \tilde{u}' \tilde{v}' + G_1 (\tilde{v}')^2)^{1/2}} \\ &= \cos \angle(\gamma'(t_0), \tilde{\gamma}'(t_0)), \end{aligned}$$

sillä kertoimet $\lambda(u(t_0), v(t_0))$ supistuvat pois lausekkeesta. Näin ollen f on konforminen.

” \Rightarrow ”: Nyt pitää osoittaa, että jos $\angle(\tilde{\gamma}(t_0), \gamma(t_0)) = \angle((f \circ \tilde{\gamma})'(t_0), (f \circ \gamma)'(t_0))$ kaikilla $t \mapsto \gamma(t) = \sigma_1(u(t), v(t))$, $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$, joille $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$, niin perusmuodot ovat verrannollisia.

Olkoon $(u_0, v_0) \in U$ ja $\gamma(t) = \sigma_1(u_0 + t, v_0)$, $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_1(u_0 + t \cos \phi, v_0 + t \sin \phi)$. Tällöin $\gamma(0) = \sigma_1(u_0, v_0) = \tilde{\gamma}(0)$. Nyt siis

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + t \\ v(t) &\equiv v_0 \\ \tilde{u}(t) &= u_0 + t \cos \phi \\ \tilde{v}(t) &= v_0 + t \sin \phi, \end{aligned}$$

joten $u'(t) \equiv 1$, $v'(t) \equiv 0$, $\tilde{u}'(t) = \cos \phi$ ja $\tilde{v}'(t) = \sin \phi$. Näin ollen

$$\cos \angle(\gamma'(0), \tilde{\gamma}'(0)) = \frac{E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi}{[E_1(E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \cos \phi \sin \phi + G_1 \sin^2 \phi)]^{1/2}}$$

ja

$$\cos \angle((f \circ \gamma)'(0), (f \circ \tilde{\gamma})'(0)) = \frac{E_2 \cos \phi + F_2 \sin \phi}{[E_2(E_2 \cos^2 \phi + 2F_2 \cos \phi \sin \phi + G_2 \sin^2 \phi)]^{1/2}}.$$

Oletuksen mukaan kulmat ovat kuitenkin samat, joten

$$\begin{aligned} & (E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi)^2 (E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2F_2 \cos \phi \sin \phi + G_2 \sin^2 \phi)) \quad (6.1) \\ &= (E_2 \cos \phi + F_2 \sin \phi)^2 (E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \cos \phi \sin \phi + G_1 \sin^2 \phi)). \end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned} (E_1 \cos \phi + F_1 \sin \phi)^2 &= E_1^2 \cos^2 \phi + 2E_1 F_1 \cos \phi \sin \phi + F_1^2 \sin^2 \phi \\ &= E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \cos \phi \sin \phi + G_1 \sin^2 \phi) \\ &\quad + (F_1^2 - E_1 G_1) \sin^2 \phi \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} (E_2 \cos \phi + F_2 \sin \phi)^2 &= E_2^2 \cos^2 \phi + 2E_2 F_2 \cos \phi \sin \phi + F_2^2 \sin^2 \phi \\ &= E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2F_2 \cos \phi \sin \phi + G_2 \sin^2 \phi) \\ &\quad + (F_2^2 - E_2 G_2) \sin^2 \phi, \end{aligned}$$

saadaan yhtälö (6.1) nämä sijoittamalla muotoon

$$\begin{aligned} & (E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \cos \phi \sin \phi + G_1 \sin^2 \phi) + (F_1^2 - E_1 G_1) \sin^2 \phi) \\ & \quad (E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2F_2 \cos \phi \sin \phi + G_2 \sin^2 \phi)) \\ &= (E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2F_2 \cos \phi \sin \phi + G_2 \sin^2 \phi) + (F_2^2 - E_2 G_2) \sin^2 \phi) \\ & \quad (E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \cos \phi \sin \phi + G_1 \sin^2 \phi)) \end{aligned}$$

ja edelleen (poistamalla yhteiset termit ja olettamalla $\sin \phi \neq 0$)

$$\begin{aligned} & (F_1^2 - E_1 G_1) (E_2 (E_2 \cos^2 \phi + 2F_2 \cos \phi \sin \phi + G_2 \sin^2 \phi)) \\ &= (F_2^2 - E_2 G_2) (E_1 (E_1 \cos^2 \phi + 2F_1 \cos \phi \sin \phi + G_1 \sin^2 \phi)). \end{aligned}$$

Ryhmitellään tämä uudelleen muotoon

$$\begin{aligned} & ((F_1^2 - E_1 G_1) E_2^2 - (F_2^2 - E_2 G_2) E_1^2) \cos^2 \phi + \\ & 2((F_1^2 - E_1 G_1) E_2 F_2 - (F_2^2 - E_2 G_2) E_1 F_1) \cos \phi \sin \phi + \\ & ((F_1^2 - E_1 G_1) E_2 G_2 - (F_2^2 - E_2 G_2) E_1 G_1) \sin^2 \phi = 0. \end{aligned}$$

Koska kuvaukset $\phi \mapsto \cos^2 \phi$, $\phi \mapsto \sin^2 \phi$ ja $\phi \mapsto \cos \phi \sin \phi$ ovat lineaarisesti riippumattomia, täytyy nyt olla

$$\begin{cases} (F_1^2 - E_1G_1)E_2^2 - (F_2^2 - E_2G_2)E_1^2 = 0 \\ (F_1^2 - E_1G_1)E_2F_2 - (F_2^2 - E_2G_2)E_1F_1 = 0 \\ (F_1^2 - E_1G_1)E_2G_2 - (F_2^2 - E_2G_2)E_1G_1 = 0. \end{cases}$$

Merkitään $\lambda = \frac{(F_2^2 - E_2G_2)E_1}{(F_1^2 - E_1G_1)E_2}$. (Näin voidaan tehdä, sillä $F_i^2 - E_iG_i \neq 0$. Jos päitisi $F_i^2 - E_iG_i = 0$, niin silloin $\|\sigma_u \cdot \sigma_v\|^2 = \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2$ eli σ_u ja σ_v olisivat yhdensuuntaiset. Näin ei kuitenkaan voi olla, koska kyseessä on säännöllinen parametrisointi.) Saadaan

$$\begin{cases} E_2 = \lambda E_1 \\ F_2 = \lambda F_1 \\ G_2 = \lambda G_1. \end{cases}$$

□

Esimerkki 6.17 (Stereografinen projektio). Olkoon $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1)$ "pohjoisnapa", $P = (u, v, 0)$ xy -tason eräs piste. Vektori $\bar{P} - \bar{N}$ leikkaa pinnan S yhdessä pisteessä, merkitään sitä Q . On olemassa $\rho \in \mathbb{R}$ siten, että $\bar{Q} - \bar{N} = \rho(\bar{P} - \bar{N})$. Tällöin

$$\bar{Q} = (0, 0, 1) + \rho((u, v, 0) - (0, 0, 1)) = (\rho u, \rho v, 1 - \rho).$$

Koska $Q \in S$, niin $\rho^2 u^2 + \rho^2 v^2 + (1 - \rho)^2 = 1$, eli $\rho^2(u^2 + v^2 + 1) - 2\rho = 0$. Näin ollen joko $\rho = 0$ tai $\rho = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$. Näistä $\rho = 0$ antaa kuitenkin pisteen N , joten toiselle leikkauspisteelle pätee $\rho = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$. Siis

$$\bar{Q} = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) =: \sigma_1(u, v).$$

Tällöin $\sigma_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{N\}$. Asetetaan lisäksi $\sigma_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_2(u, v) = (u, v, 0)$. Nyt $f : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma_1(u, v) \mapsto \sigma_2(u, v)$ on *stereografinen projektio*.

Väite: f on konforminen.

Lauseen 6.16 mukaan todistukseksi riittää osoittaa, että σ_1 :n ensimmäinen perusmuoto on verrannollinen $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$:n ensimmäiseen perusmuotoon, joka on $du^2 + dv^2$. Nyt

$$\begin{aligned} \sigma_{1u} &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (2(u^2 + v^2 + 1) - 4u^2, -4uv, \\ &\quad 2u(u^2 + v^2 + 1) - 2u(u^2 + v^2 - 1)) \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (2(-u^2 + v^2 + 1), -4uv, 4u) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\sigma_{1v} &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (-4uv, 2(u^2 + v^2 + 1) - 4v^2, \\ &\quad 2v(u^2 + v^2 + 1) - 2v(u^2 + v^2 - 1)) \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (-4uv, 2(u^2 - v^2 + 1), 4v),\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}F_1 &= \sigma_{1u} \cdot \sigma_{1v} \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^4} (-8uv(-u^2 + v^2 + 1) - 8uv(u^2 - v^2 + 1) + 16uv) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_1 &= \sigma_{1u} \cdot \sigma_{1u} = \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^4} (4(-u^2 + v^2 + 1)^2 + 16u^2v^2 + 16u^2) \\ &= \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

ja $G_1 = E_1$, sillä u ja v esiintyvät lausekkeissa symmetrisesti. Näin ollen σ_1 :n ensimmäinen perusmuoto on

$$E_1 du^2 + 2F_1 dudv + G_1 dv^2 = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} (du^2 + dv^2) =: \lambda(du^2 + dv^2),$$

eli perusmuodot ovat verrannollisia, joten f on konforminen.

6.4 Pinta-ala

Määritelmä 6.18. Alueen $\sigma(R)$, $R \subset U$, pinta-ala pintaelementillä $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on

$$\mathcal{A}_\sigma(R) = \iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv.$$

Lause 6.19. Pätee $\|\sigma_u \times \sigma_v\| = (EG - F^2)^{1/2}$.

Todistus.

$$\begin{aligned}\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 &= \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2 \sin^2 \angle(\sigma_u, \sigma_v) \\ &= \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2 (1 - \cos^2 \angle(\sigma_u, \sigma_v)) \\ &= \|\sigma_u\|^2 \|\sigma_v\|^2 - (\sigma_u \cdot \sigma_v)^2 \\ &= EG - F^2\end{aligned}$$

□

Huom 6.20. Lauseen 6.19 todistuksesta havaitaan, että $EG - F^2 > 0$, kun σ on säännöllinen: tällöinhän $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$.

Määritelmä 6.21. $d\mathcal{A}_\sigma = (EG - F^2)^{1/2}dudv$ on *infinitesimaalinen pinta-alan muutos*.

Lause 6.22. *Pinta-ala on riippumaton parametrisoinnista.*

Todistus. Olkoon $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisointeja siten, että $\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Olkoon $\Phi = \sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ ja $\tilde{R} \subset \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(U) \cap \tilde{\sigma}(\tilde{U}))$. Vastaavassa tilanteessa lauseen 5.10 todistuksessa havaittiin, että

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = J_\Phi \sigma_u \times \sigma_v.$$

Merkitään $R = \Phi(\tilde{R})$, jolloin

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{R}} \|\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u}d\tilde{v} &= \iint_{\tilde{R}} |J_\Phi| \|\sigma_u \times \sigma_v\| d\tilde{u}d\tilde{v} \\ &= \iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa muuttujanvaihdosta $(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$.
(KUVA) □

Määritelmä 6.23. Olkoot S_1 ja S_2 sileitä pintoja. Diffeomorfismi $f : S_1 \rightarrow S_2$ on *pinta-alan säilyttävä*, jos pätee $\mathcal{A}_\sigma(R) = \mathcal{A}_{f \circ \sigma}(R)$ kaikilla $R \subset U$, kaikilla S_1 :n parametrisoinneilla $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Lause 6.24. *Diffeomorfismi $f : S_1 \rightarrow S_2$ on pinta-alan säilyttävä jos ja vain jos pätee $E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$, kun $E_1du^2 + 2F_1dudv + G_1dv^2$ on S_1 :n parametrisoinnin $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $E_2du^2 + 2F_2dudv + G_2dv^2$ on S_2 :n parametrisoinnin $\sigma_2 = f \circ \sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ensimmäinen perusmuoto.*

Todistus. “ \Leftarrow ”: Jos $R \subset U$, niin lause 6.19 antaa $\mathcal{A}_{\sigma_1}(R) = \iint_R (E_1G_1 - F_1^2)^{1/2}dudv$ ja $\mathcal{A}_{\sigma_2}(R) = \iint_R (E_2G_2 - F_2^2)^{1/2}dudv$. Koska $f \circ \sigma_1(R) = \sigma_2(R)$, pätee siis $\mathcal{A}_{\sigma_1}(R) = \mathcal{A}_{f \circ \sigma_1}(R)$.

“ \Rightarrow ”: Olkoon $f : S_1 \rightarrow S_2$ pinta-alan säilyttävä. Tällöin kaikilla $R \subset U$ pätee $\mathcal{A}_{\sigma_1}(R) = \mathcal{A}_{f \circ \sigma_1}(R)$, joten

$$\iint_R (E_1G_1 - F_1^2)^{1/2}dudv = \iint_R (E_2G_2 - F_2^2)^{1/2}dudv$$

kaikilla R . On siis oltava $E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$. □

Esimerkki 6.25. Olkoon $S_1 = S^2(0, 1) \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z \in (-1, 1)\}$, ja $f : S_1 \rightarrow S_2$ kuvaus, joka vie pisteen $P = (x, y, z) \in S_1$ pisteeksi $Q = (X, Y, Z) \in S_2$, joka on lähimpänä pistettä P siten, että $\text{span}\{PQ\} \cap \{(0, 0, z)\} \neq \emptyset$ ja $\text{span}\{PQ\} \parallel xy$ -taso.

(KUVA)

Tällöin $Z = z$ ja $(X, Y) = \lambda(x, y)$ jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$. Koska $Q = (X, Y, Z)$ on sylinterillä, pätee

$$1 = X^2 + Y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2),$$

joten $\lambda = \pm(x^2 + y^2)^{-1/2}$. Plusmerkki antaa oikean pisteen Q , joten

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, z \right).$$

Osoitetaan, että f on pinta-alan säilyttävä diffeomorfismi:

Valitaan S_1 :lle kartasto (σ_1, U_1) , (σ_1, U_2) asettamalla

$$\begin{aligned} \sigma_1(\theta, \varphi) &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta) \\ U_1 &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \\ U_2 &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) \end{aligned}$$

jolloin

$$\sigma_2(\theta, \varphi) := (f \circ \sigma_1)(\theta, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \sin \theta)$$

antaa S_2 :lle kartaston (σ_2, U_1) , (σ_2, U_2) . Esimerkissä 6.5 laskettiin, että nyt $E_1 = 1$, $F_1 = 0$ ja $G_1 = \cos^2 \theta$. Parametrisoinnille σ_2 puolestaan

$$\begin{aligned} \sigma_{2\theta} &= (0, 0, \cos \theta) \\ \sigma_{2\varphi} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

joten $E_2 = \|\sigma_{2\theta}\|^2 = \cos^2 \theta$, $F_2 \equiv 0$, $G_2 = 1$. Näin ollen

$$E_1 G_1 - F_1^2 = E_2 G_2 - F_2^2.$$

Lisäksi $f : S_1 \rightarrow S_2$, $(\theta, \varphi) \mapsto (\theta, \varphi)$ on diffeomorfismi, sillä valituilla parametrisoinneilla se vastaa identiteettikuvausta. Lauseen 6.24 mukaan f on siis pinta-alan säilyttävä.

Esimerkki 6.26. Tarkastellaan pallon $S^2(0,1)$ kahden isoympyrän väliin jäävän alueen A pinta-alaa. Voidaan olettaa, että isoympyrät leikkaavat toisensa navoilla, sillä tämä tilanne voidaan aina pinta-alaa muuttamatta saavuttaa pyörittämällä palloa. Olkoon isoympyröiden välinen kulma θ . Tällöin edellisen esimerkin kuvaus f kuvaa alueen A kaarevaksi suorakaiteeksi, jonka korkeus on 2 ja leveys θ .

(KUVA)

Käyttämällä nyt isometriaa, joka avaa sylinterin tasoon, kaareva suorakaide kuvautuu aidoksi suorakaiteeksi, jonka korkeus on edelleen 2 ja leveys θ . Tällä on sama pinta-ala kuin alkuperäisellä alueella, joten kahden isoympyrän rajaaman alueen pinta-ala on 2θ .

Huomattakoon, että menetelmä antaa koko pallon pinta-alaksi 4π .

Lause 6.27. *Olkoon ABC kolmio pallolla $S^2(0,1)$ siten, että sen sivut ovat isoympyräiden kaaria. Kolmion pinta-ala on*

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi,$$

missä $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle C$ ovat kolmion kulmat pisteissä A , B ja C .

Todistus. Olkoot kolmen isoympyrän leikkauspisteet A , B , C ja A' , B' , C' , missä A' on pistettä A vastaava antipodaalinen piste jne. Isoympyrät jakavat pallon kahdeksaan kolmioon. Edellisen esimerkin mukaan

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(A'BC) &= 2\angle A, \\ \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(AB'C) &= 2\angle B, \\ \mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC') &= 2\angle C. \end{aligned}$$

Puolipallo muodostuu kolmioista ABC , ABC' , $A'BC$ ja $A'BC'$, joten

$$\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC') + \mathcal{A}(A'BC) + \mathcal{A}(A'BC') = 2\pi.$$

Antipodaalinen kuvaus $a : x \mapsto -x$, $x \in S^2(0,1)$, on isometria, ja siis säilyttää pinta-alan, joten $\mathcal{A}(A'BC') = \mathcal{A}(AB'C)$. Näin ollen

$$2\mathcal{A}(ABC) + \underbrace{\mathcal{A}(ABC) + \mathcal{A}(ABC') + \mathcal{A}(A'BC) + \mathcal{A}(A'BC')}_{2\pi} = 2(\angle A + \angle B + \angle C),$$

eli

$$\mathcal{A}(ABC) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

□

Luku 7

Toinen perusmuoto

7.1 Toisen perusmuodon määritelmä

Tarkastellaan seuraavaksi pinnan kaarevuuden mittaamista. Idea on seuraava: Frenet-käyrän $\gamma(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\|\gamma'\| = 1$, $\gamma'' \neq 0$) poikkeama tangenttisuorasta $\text{span}\{e_1\}$ on $(\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)) \cdot e_2$. Tässä, kuten ennenkin,

$$\begin{cases} e_1 = \gamma'(t), \\ e_2 = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}, \\ \kappa = \|\gamma''(t)\|. \end{cases}$$

Taylorin kehitelmä pisteessä t antaa

$$\gamma(t + \Delta t) = \gamma(t) + \gamma'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\gamma''(t)(\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3),$$

joten

$$(\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)) \cdot e_2 = \frac{1}{2}\kappa(\Delta t)^2 + O((\Delta t)^3),$$

sillä $e_1 \perp e_2$.

Jos $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on säännöllinen parametrisointi, niin pinnan pisteen $\sigma(u + \Delta u, v + \Delta v)$ poikkeama pisteeseen $p = \sigma(u, v)$ liittyvästä tangenttitasosta $\text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ on

$$(\sigma(u + \Delta u, v + \Delta v) - \sigma(u, v)) \cdot N_\sigma,$$

missä $N_\sigma = \sigma_u \times \sigma_v$.

Kahden muuttujan Taylorin kehitelmä antaa

$$\begin{aligned} \sigma(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \sigma(u, v) + \sigma_u \Delta u + \sigma_v \Delta v \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sigma_{uu}(\Delta u)^2 + 2\sigma_{uv}\Delta u\Delta v + \sigma_{vv}(\Delta v)^2) \\ &\quad + O((\Delta u)^i(\Delta v)^j), \end{aligned}$$

missä $i + j \geq 3$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} & (\sigma(u + \Delta u, v + \Delta v) - \sigma(u, v)) \cdot N_\sigma \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\sigma_{uu} \cdot N_\sigma}_{=:L}(\Delta u)^2 + 2\underbrace{\sigma_{uv} \cdot N_\sigma}_{=:M}\Delta u\Delta v + \underbrace{\sigma_{vv} \cdot N_\sigma}_{=:N}(\Delta v)^2) + O((\Delta u)^i(\Delta v)^j), \end{aligned}$$

$i + j \geq 3$.

Symbolisen kaarevuuselementin κdt^2 vastine pintaelementille σ on *toinen perusmuoto*

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Tämä neliömuoto voidaan tulkita ensimmäisen perusmuodon avulla, jolloin käytetään symbolia II (aiheesta lisää Gaussin kaarevuuden yhteydessä).

Esimerkki 7.1. Tasolle $\sigma(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$ pätee $\sigma_u \equiv \mathbf{p}$, $\sigma_v \equiv \mathbf{q}$, joten $\sigma_{uu} = \sigma_{uv} = \sigma_{vv} = 0$, ja siis $L = M = N = 0$.

Esimerkki 7.2. Tarkastellaan pyörähdyspintaa

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

Sen profiilikäyrä on $\gamma : t \mapsto (f(t), 0, g(t))$, $f(u) > 0$, ja pätee $1 = \|\gamma'\|^2 = (f')^2 + (g')^2$. Nyt

$$\begin{aligned} \sigma_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \\ \sigma_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} E &= \sigma_u \cdot \sigma_u = f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1 \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = 0 \\ G &= \sigma_v \cdot \sigma_v = f(u)^2, \end{aligned}$$

ja ensimmäinen perusmuoto on $du^2 + f(u)^2 dv^2$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \sigma_u \times \sigma_v &= (-g'(u)f(u) \cos v, -g'(u)f(u) \sin v, f'(u)f(u)), \\ N_\sigma &= \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = (-g'(u) \cos v, -g'(u) \sin v, f'(u)) \\ \sigma_{uu} &= (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u)) \\ \sigma_{vv} &= (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0) \\ \sigma_{uv} &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

joten saadaan

$$\begin{aligned} L &= \sigma_{uu} \cdot N_\sigma = -g'(u)f''(u) + g''(u)f'(u) \\ M &= \sigma_{uv} \cdot N_\sigma = 0 \\ N &= \sigma_{vv} \cdot N_\sigma = f(u)g'(u), \end{aligned}$$

eli toinen perusmuoto on

$$(g''(u)f'(u) - g'(u)f''(u))du^2 + f(u)g'(u)dv^2.$$

Huomattakoon, että toinen perusmuoto on riippumaton muuttujasta v .

Esimerkki 7.3 (Erikoistapaus pyörähdyspinnasta: yksikköpallo). Yksikköpallolle profiilikäyrä on $t \mapsto (\cos t, 0, \sin t)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tällöin $f(u) = \cos u > 0$ ja $g(u) = \sin u$, joten toinen perusmuoto on

$$du^2 + \cos^2 u dv^2.$$

Esimerkki 7.4 (Erikoistapaus pyörähdyspinnasta: ympyräsylinteri). Ympyräsylinterin profiilikäyrä on $t \mapsto (1, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Nyt $f(u) \equiv 1 > 0$ ja $g(u) \equiv u$, joten toinen perusmuoto on dv^2 .

7.2 Normaalikaarevuus ja geodeettinen kaarevuus

Pinnan käyriin liittyviä kaarevuussuureita ovat *normaalikaarevuus* κ_n ja *geodeettinen kaarevuus* κ_g . Määritellään ne seuraavaksi.

Olkoon $t \mapsto \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ säännöllinen polku pintaelementillä $\sigma(U)$, $\|\gamma'\| = 1$. Pisteeseen $P \in \sigma(U)$ voidaan liittää ortonormaalit vektorit γ' , $N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ ja $N_\sigma \times \gamma'$.
(KUVA)

Tiedetään, että $\gamma'' \perp \gamma'$, joten γ'' on lineaarinen yhdiste vektoreista N_σ ja $N_\sigma \times \gamma'$. Merkitään

$$\gamma'' = \kappa_n N_\sigma + \kappa_g N_\sigma \times \gamma',$$

missä $\kappa_n = \gamma'' \cdot N_\sigma$ on polun γ *normaalikaarevuus* ja $\kappa_g = \gamma'' \cdot N_\sigma \times \gamma'$ on polun γ *geodeettinen kaarevuus*.

Tällöin siis $\|\gamma''\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$, joten polun γ kaarevuudelle $\kappa = \|\gamma''\|$ pätee

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2. \quad (7.1)$$

Jos merkitään polun γ päänormaaliala symbolilla n siten, että $\gamma'' = \kappa n$, niin saadaan

$$\kappa_n = \gamma'' \cdot N_\sigma = \kappa n \cdot N_\sigma = \kappa \cos \Psi,$$

missä $\Psi = \angle(n, N_\sigma)$, ja

$$\kappa_g = \gamma'' \cdot N_\sigma \times \gamma' = \kappa n \cdot N_\sigma \times \gamma' \stackrel{(7.1)}{=} \pm \kappa \sin \Psi.$$

Uudelleenparametrisoinnissa

- N_σ säilyy, jolloin κ_n ja κ_g säilyvät, tai
- N_σ vaihtaa suuntaa, jolloin κ_n ja κ_g vaihtavat merkkiä.

Huom 7.5. Yleisemmin: Jos γ on säännöllinen, mutta $\|\gamma'\| \neq 1$, niin κ_n ja κ_g määritellään olemaan ne kaarevuudet, jotka saadaan parametrisoimalla käyrä uudelleen kaarenpituuden suhteen. Tällöin κ_n on hyvin määritelty ja κ_g etumerkkiä vaille hyvin määritelty, sillä tehtäessä uudelleenparametrisointi kahden eri kaarenpituuden suhteen parametrisoinnin välillä $t \mapsto \pm t + C$, jolloin $N_\sigma \times \gamma'$:n merkki voi vaihtua, ja siis $\kappa_n \mapsto \kappa_n$, $\kappa_g \mapsto \pm \kappa_g$.

Huom 7.6. Erikoistapaus: Pinnan S normaalisektiot ovat käyrät, jotka saadaan leikkaamalla pintaa kohtisuorasti tasolla $S_N = \text{span}\{N_\sigma, T\}$ pisteessä $p = \gamma(t_0)$, $T = \gamma'(t_0)$. Tällaiselle tasokäyrälle γ pätee $\kappa_n = \pm \kappa$ ja $\kappa_g = 0$ pisteessä p , sillä $n(t_0) = \pm N_\sigma(p)$.

Lause 7.7. Olkoon (σ, U) säännöllinen pintaelementti ja $\gamma : I \rightarrow \sigma(U)$ sen säännöllinen polku siten, että $\|\gamma'\| = 1$. Tällöin γ :n normaalikaarevuus määräytyy ehdosta

$$\kappa_n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2,$$

missä $\gamma = \sigma(u(t), v(t))$ ja $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ on σ :n toinen perusmuoto.

Huom 7.8. Kaikilla säännöllisillä poluilla γ , joilla $\|\gamma'\| = 1$ ja $\gamma(t_0) = p \in \sigma(U)$, $\gamma'(t_0) = T \in T_p S$, on sama normaalikaarevuus κ_n , koska se määräytyy vektorista $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$, eikä riipu γ :n korkeammista derivaatoista!

Lauseen 7.7 todistus.

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= N_\sigma \cdot \gamma'' = N_\sigma \cdot \frac{d}{dt} \gamma' \stackrel{\gamma=\sigma(u,v)}{=} N_\sigma \cdot \frac{d}{dt} (\sigma_u u' + \sigma_v v') \\
&= N_\sigma \cdot \left(\frac{d}{dt} (\sigma_u) u' + \sigma_u u'' + \frac{d}{dt} (\sigma_v) v' + \sigma_v v'' \right) \\
&\stackrel{\text{ketjus.}}{=} N_\sigma \cdot ((\sigma_{uu} u' + \sigma_{uv} v') u' + \sigma_u u'' + (\sigma_{uv} u' + \sigma_{vv} v') v' + \sigma_v v'') \\
&\stackrel{N_\sigma \perp \sigma_u, \sigma_v}{=} N_\sigma \cdot \sigma_{uu} (u')^2 + (N_\sigma \cdot \sigma_{uv} + N_\sigma \cdot \sigma_{vu}) u' v' + N_\sigma \cdot \sigma_{vv} (v')^2 \\
&= L(u')^2 + 2M u' v' + N(v')^2
\end{aligned}$$

□

Seuraus 7.9 (Meusnierin¹ lause). Olkoon $p \in \sigma(U) \subset S$, $v \in T_p S$ ja $S_\theta = \text{span}\{v, w\}$, missä $w \in T_p \mathbb{R}^3$ ja $\angle(w, T_p S) = \theta$. Tällöin $|\gamma_\theta| = S_\theta \cap S$ on tasokäyrä, jonka kaarevuudelle $\kappa = \kappa_\theta$ pätee: $\kappa_\theta \sin \theta$ on riippumaton kulmasta θ .

(KUVA)

Todistus. Jos $\kappa = 0$ pisteessä p , niin väite on selvä. Oletetaan, että $\kappa \neq 0$. Jos $\|\gamma'_\theta\| = 1$, niin $\gamma'_\theta(t_0) = \pm v$ kun $p = \gamma_\theta(t_0)$, ja $\gamma''_\theta(t_0) \perp v$, $\gamma''_\theta(t_0) \in S_\theta$. Tällöin

$$\Psi := \angle(n, N_\sigma) = \frac{\pi}{2} \pm \theta,$$

joten

$$\kappa_n = \kappa_\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm \kappa_\theta \sin \theta,$$

joka lauseen 7.7 mukaan riippuu vain pisteestä p ja vektorista v . □

Huom 7.10. Perinteisessä muodossaan Meusnierin lause kuuluu seuraavasti: Kaikkien pisteen p kautta kulkevien pinnan käyrien, joilla on sama tangentti pisteessä p , normaalikaarevuus pisteessä p on sama (Meusnier 1776).

¹Jean Baptiste Meusnier (1754-1793), ranskalainen matemaatikko, insinööri ja val-lankumouskenraali

Tarkastellaan ensimmäistä ja toista perusmuotoa matriisimuodossa. Aikaisemmin merkittiin

$$I_{(u,v)}(V, W) = \langle g_{(u,v)}V, W \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} V, W \right\rangle \quad (7.2)$$

ja nyt vastaavasti

$$II_{(u,v)}(V, W) = \langle h_{(u,v)}V, W \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} V, W \right\rangle, \quad (7.3)$$

kun $V, W \in T_{(u,v)}U$.

Olkoon $t_i = \xi_i\sigma_u + \eta_i\sigma_v \in T_pS$, $p \in \sigma(U)$. Tällöin

$$\begin{aligned} t_1 \cdot t_2 &= (\xi_1\sigma_u + \eta_1\sigma_v) \cdot (\xi_2\sigma_u + \eta_2\sigma_v) \\ &= \xi_1\xi_2 \underbrace{\sigma_u \cdot \sigma_u}_{=E} + \eta_1\eta_2 \underbrace{\sigma_v \cdot \sigma_v}_{=G} + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) \underbrace{\sigma_u \cdot \sigma_v}_{=F} \\ &= (\xi_1 \ \eta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

joten kirjoittamalla $T_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$ saadaan

$$t_1 \cdot t_2 = T_1^T g T_2.$$

Vektorille $\gamma' = u'\sigma_u + v'\sigma_v$ pätee $T = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$, ja lauseen 7.7 mukaan

$$\begin{aligned} \kappa_n &= L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 \\ &= (u' \ v') \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ &= T^T h T. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Toisin sanoen siis $II_{(u,v)}((u', v'), (u', v')) = \kappa_n$.

7.3 Pääkaarevuudet

Määritelmä 7.11. Pintaelementin (σ, U) *pääkaarevuudet* ovat yhtälön

$$\det(h - \kappa g) = \begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0 \quad (7.5)$$

ratkaisut.

Huom 7.12. Pian havaitaan, että muuttujan κ suhteen toisen asteen polynomilla (7.5) on kaksi reaalista nollakohtaa.

Esimerkki 7.13. Jos σ parametrisoi tason, niin siihen liittyvä 1. perusmuoto on

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jolloin (7.5) on ominaisarvoyhtälö toiselle perusmuodolle h . Koska h on symmetrinen, ovat sen ominaisarvot reaaliset (kts. kurssi L3).

Yleisesti g on vain kääntyvä, joten

$$\begin{aligned} 0 = \det(h - \kappa g) &= \det(g(g^{-1}h - \kappa I)) = \det g \det(g^{-1}h - \kappa I) \\ &\iff \det(g^{-1}h - \kappa I) = 0. \end{aligned}$$

Saatiin: pääkaarevuudet ovat matriisin $g^{-1}h$ ominaisarvot. Huom: matriisi $g^{-1}h$ ei yleensä ole symmetrinen.

Oletetaan, että κ on yhtälön (7.5) ratkaisu. Tällöin matriisi $h - \kappa g$ ei ole kääntyvä ja löytyy $T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, siten, että

$$(h - \kappa g)T = 0. \quad (7.6)$$

Määritelmä 7.14. Jos $T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ toteuttaa ehdon (7.6), niin vektori $t = \xi\sigma_u + \eta\sigma_v$ on pintaelementin σ pisteeseen $p = \sigma(u, v)$ liittyvä pääkaarevuuden κ pääkaarevuussuunta.

Lause 7.15. Jos κ_1 ja κ_2 ovat pisteeseen $p \in \sigma(U)$ liittyvät pääkaarevuudet, niin pätee:

1. $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$
2. Jos $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, niin $h = \kappa g$ ja jokainen $t \in T_p S$ on pääkaarevuussuunta.
3. Jos $\kappa_1 \neq \kappa_2$ niin pääkaarevuussuunnat $t_1, t_2 \neq 0$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Todistus. 1. Olkoon $t_1, t_2 \in T_p S$ siten, että $t_1 \cdot t_2 = 0$, $\|t_1\| = \|t_2\| = 1$.

Määritellään kertoimet ξ_i, η_i siten, että $t_i = \xi_i\sigma_u + \eta_i\sigma_v$ ja $T_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$. Merkitään

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
A^T g A &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E\xi_1 + F\eta_1 & E\xi_2 + F\eta_2 \\ F\xi_1 + G\eta_1 & F\xi_2 + G\eta_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \xi_1(E\xi_1 + F\eta_1) + \eta_1(F\xi_1 + G\eta_1) & \xi_1(E\xi_2 + F\eta_2) + \eta_1(F\xi_2 + G\eta_2) \\ \xi_2(E\xi_1 + F\eta_1) + \eta_2(F\xi_1 + G\eta_1) & \xi_2(E\xi_2 + F\eta_2) + \eta_2(F\xi_2 + G\eta_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T_1^T g T_1 & T_1^T g T_2 \\ T_2^T g T_1 & T_2^T g T_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t_1 \cdot t_1 & t_1 \cdot t_2 \\ t_1 \cdot t_2 & t_2 \cdot t_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Olkoon $H := A^T h A$. Tällöin

$$H^T = (A^T h A)^T = A^T h^T A = A^T h A = H,$$

eli H on reaalin ja symmetrinen. Näin ollen on olemassa ortogonaalinen matriisi B ($B^T B = I$) siten, että

$$B^T H B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (kts. L3). Olkoon $C = AB$. Tällöin

$$C^T g C = B^T \underbrace{A^T g A}_{=I} B = B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

ja

$$C^T h C = B^T \underbrace{A^T h A}_{=H} B = B^T H B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Matriisi C on kääntyvä, sillä A ja B ovat kääntyviä. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\det(h - \kappa g) = 0 &\iff \det(C^T) \det(h - \kappa g) \det(C) = 0 \\
&\iff \det(C^T (h - \kappa g) C) = 0
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
\det(C^T (h - \kappa g) C) &= \det \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \kappa & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \kappa \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

joten $\det(h - \kappa g) = 0 \iff \kappa = \lambda_1$ tai $\kappa = \lambda_2$.

2. Olkoon $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$. Tällöin pistettä p sanotaan *napapisteeeksi*. Yhtälöistä (7.7) ja (7.8) seuraa nyt, että $C^T g C = I$ ja $C^T h C = \kappa I$. Näin ollen $C^T(h - \kappa g)C = 0$, eli $h - \kappa g = 0$. Tästä seuraa, että kaikilla $T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ pätee $(h - \kappa g)T = 0$, joten jokainen $t = \xi\sigma_u + \eta\sigma_v \in T_p S$ on pääkaarevuussuunta.

3. Olkoon $t_i = \xi_i\sigma_u + \eta_i\sigma_v$, $T_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$. Kuten kohdassa (1), pätee nyt $t_1 \cdot t_2 = T_1^T g T_2$. Kun $T_i \neq 0$ on pääkaarevuuteen κ_i liittyvä pääkaarevuussuunta, pätee $h T_i = \kappa_i g T_i$, joten

$$T_2^T h T_1 = \kappa_1 T_2^T g T_1 = \kappa_1 t_1 \cdot t_2 \quad (7.9)$$

$$T_1^T h T_2 = \kappa_2 T_1^T g T_2 = \kappa_2 t_1 \cdot t_2. \quad (7.10)$$

Pätee $(T_1^T h T_2)^T = T_1^T h T_2$, sillä $T_1^T h T_2 \in \mathbb{R}$. Toisaalta $(T_1^T h T_2)^T = T_2^T h^T T_1 = T_2^T h T_1$, sillä $h = h^T$. Näin ollen yhtälöistä (7.9) ja (7.10) saadaan

$$\kappa_1 t_1 \cdot t_2 = \kappa_2 t_1 \cdot t_2,$$

ja koska $\kappa_1 \neq \kappa_2$, pätee $t_1 \cdot t_2 = 0$.

□

Esimerkki 7.16. 1. Aikaisemmin laskettiin yksikköpallolle

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix} = h,$$

joten pääkaarevuudet saadaan ehdosta

$$\begin{vmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta - \kappa \cos^2 \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Näin ollen $\kappa = 1$ ja kaikki suunnat ovat pääkaarevuussuuntia.

2. Ympyräsynterille $\sigma : (u, v) = (\cos v, \sin v, u)$ saatiin aiemmin

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joten pääkaarevuudet saadaan ehdosta

$$\begin{vmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{vmatrix} = 0,$$

mikä tarkoittaa, että $\kappa(1 - \kappa) = 0$ eli $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$.

Pääkaarevuusvektorit saadaan ehdosta $(h - \kappa_i g)T_i = 0$, missä $T = (\xi_i, \eta_i)^T$, $t_i = \xi_i \sigma_u + \eta_i \sigma_v$. Ehto saa muodon

$$\begin{pmatrix} L - \kappa_i E & M - \kappa_i F \\ M - \kappa_i F & N - \kappa_i G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = 0.$$

Sijoittamalla $\kappa_1 = 1$, saadaan

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = 0,$$

eli $\xi_1 = 0$. Näin ollen $T_1 = (0, 1)^T$ ja $t_1 = 0 \cdot \sigma_u + 1 \cdot \sigma_v = (-\sin v, \cos v, 0)$ (tai mikä tahansa sen monikerta).

Vastaavasti sijoittamalla $\kappa_2 = 0$ saadaan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0,$$

joten $\eta_2 = 0$ ja siten $T_2 = (1, 0)^T$, eli $t_2 = 1 \cdot \sigma_u + 0 \cdot \sigma_v = (0, 0, 1)$.

Lause 7.17 (Eulerin² lause). *Olkoon γ säännöllinen polku pintaelementillä (σ, U) , jonka pääkaarevuudet ovat κ_1 ja κ_2 ja t_1, t_2 niihin liittyvät pääkaarevuussuunnat. Tällöin polun γ normaalikaarevuudelle pätee*

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta,$$

kun $\theta = \angle(\gamma', t_1)$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\|\gamma'\| = 1$. Merkitään $t = \gamma' = \xi \sigma_u + \eta \sigma_v$ ja $T = (\xi, \eta)^T$.

Jos $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, niin lauseen 7.15 kohdan 2 mukaan

$$\begin{aligned} \kappa_n &\stackrel{(7.4)}{=} T^T h T = \kappa T^T g T = \kappa t \cdot t = \kappa \\ &= \kappa(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

missä θ on mielivaltainen.

²Leonhard Euler (1707-1783), sveitsiläinen matemaatikko ja fyysikko

Jos $\kappa_1 \neq \kappa_2$, niin lauseen 7.15 kohdan 3 mukaan $t_1 \cdot t_2 = 0$. Voidaan olettaa, että $\|t_1\| = \|t_2\| = 1$. Jos $t_i = \xi_i \sigma_u + \eta_i \sigma_v$ ja $T_i = (\xi_i, \eta_i)^T$, $i = 1, 2$, niin saadaan

$$\begin{aligned} \gamma' &= \cos \theta t_1 + \sin \theta t_2 \\ &= \cos \theta (\xi_1 \sigma_u + \eta_1 \sigma_v) + \sin \theta (\xi_2 \sigma_u + \eta_2 \sigma_v) \\ &= \underbrace{(\cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2)}_{=: \xi} \sigma_u + \underbrace{(\cos \theta \eta_1 + \sin \theta \eta_2)}_{=: \eta} \sigma_v. \end{aligned}$$

Kun $T = (\xi, \eta)^T$, saadaan

$$\begin{aligned} \kappa_n &\stackrel{(7.4)}{=} T^T h T \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2 \\ \cos \theta \eta_1 + \sin \theta \eta_2 \end{pmatrix}^T h \begin{pmatrix} \cos \theta \xi_1 + \sin \theta \xi_2 \\ \cos \theta \eta_1 + \sin \theta \eta_2 \end{pmatrix} \\ &= (\cos \theta T_1^T + \sin \theta T_2^T) h (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2) \\ &= \cos^2 \theta T_1^T h T_1 + \sin^2 \theta T_2^T h T_2 + \cos \theta \sin \theta (T_1^T h T_2 + T_2^T h T_1). \end{aligned}$$

Koska $(h - \kappa_i g)T_i = 0$, pätee

$$T_i^T h T_j = \kappa_j \underbrace{T_i^T g T_j}_{t_i \cdot t_j} = \begin{cases} \kappa_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

mikä todistaa väitteen. □

Seuraus 7.18. Jos (σ, U) on säännöllinen pintaelementti, $p \in \sigma(U)$, niin pääkaarevuudet $\kappa_1(p)$, $\kappa_2(p)$ vastaavat kaikkien pisteen p kautta kulkevien (säännöllisten) polkujen normaalikaarevuuksien suurinta ja pienintä mahdollista arvoa. Erityisesti pääkaarevuusvektorit ovat niiden käyrien tangenttivektoreita, jotka realisoivat suurimman ja pienimmän arvon.

Todistus. Jos $\kappa_1 = \kappa_2$, niin Eulerin lauseen 7.17 mukaan myös $\kappa_n = \kappa_1 = \kappa_2$ ja lauseen 7.15 kohdan 2 mukaan jokainen tangenttivektori on pääkaarevuussuunta.

Voidaan olettaa, että $\kappa_1 > \kappa_2$. Nyt Eulerin lauseen 7.17 mukaan

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta = \kappa_1 - \underbrace{(\kappa_1 - \kappa_2)}_{>0} \sin^2 \theta,$$

joten

$$\begin{aligned} \kappa_n &\leq \kappa_1 \text{ kaikilla } \theta = \angle(\gamma', t_1) \\ \kappa_n &= \kappa_1 \text{ kun } \theta = 0, \pi \text{ jolloin } \gamma' \parallel t_1. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 (1 - \cos^2 \theta) = \kappa_2 + \underbrace{(\kappa_1 - \kappa_2)}_{>0} \cos^2 \theta,$$

joten

$$\begin{aligned} \kappa_n &\geq \kappa_2 \text{ kaikilla } \theta = \angle(\gamma', t_1) \\ \kappa_n &= \kappa_2 \text{ kun } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Yhtäsuuruus toteutuu, kun $\gamma' \perp t_1$. Koska lisäksi pätee $t_1 \perp t_2$ (kts. lause 7.15 kohta 3) ja $\gamma', t_1 \in T_p(\sigma U) \approx \mathbb{R}^2$, niin täytyy tällöin olla $\gamma' \parallel t_2$. \square

Määritelmä 7.19. Säännöllisen pintaelementin $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ *Gaussin*³ *kuvau*s $N : U \rightarrow S^2$ määräytyy ehdosta

$$N(u, v) := N_\sigma(u, v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}(u, v).$$

(Merkinnässä piilee sekaannuksen vaara, sillä symboli N on jo käytössä toisen perusmuodon yhteydessä. Käytetään sitä silti merkintänä myös Gaussin kuvaukselle.)

Huom 7.20. 1. Gaussin kuvauksen tulkinta: pinnan normaalivektorin yhdensuuntaissiirto \mathbb{R}^3 :ssa origoon.

(KUVA)

2. N riippuu parametrisoinnin suunnistuksen valinnasta.

3. Jos sallitaan $\sigma \in C^k$, $k < \infty$, niin $N \in C^{k-1}$.

Lause 7.21. Jos $N : U \rightarrow S^2$ on säännöllisen pintaelementin $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ Gaussin kuvaus, niin lineaarikuvauksen

$$DN(u, v) : T_{(u,v)}U \rightarrow T_{N(u,v)}S^2 \subset T_{N(u,v)}\mathbb{R}^3$$

kuvajoukko on tangenttitason $T_p\sigma(U) \subset \mathbb{R}^3$ kanssa yhdensuuntainen taso tai suora, jos $DN(u, v) \neq 0$, $p = \sigma(u, v)$.

³Carl Friedrich Gauss (1777-1855), saksalainen matemaatikko ja fyysikko

Todistus. Koska $\langle N, N \rangle = 1$, niin derivoimalla saadaan

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle N, N \rangle = 2 \langle \frac{\partial N}{\partial u}, N \rangle \\ 0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle N, N \rangle = 2 \langle \frac{\partial N}{\partial v}, N \rangle \end{cases},$$

joten $\text{span}\{N_u, N_v\} \perp N \perp \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$, kun $N_u, N_v, N, \sigma_u, \sigma_v \in \mathbb{R}^3$. Näin ollen pätee

$$\text{span}\{N_u, N_v\} \subset \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\} = T_p\sigma(U).$$

Huomattakoon, että N_u , ja N_v voivat olla lineaarisesti riippuvat, jolloin $\text{span}\{N_u, N_v\}$ on suora, tai jos $DN = 0$, niin $\text{span}\{N_u, N_v\}$ on piste. \square

Määritelmä 7.22. Kuvauserpe $W : (u, v) \mapsto W_{(u,v)}$, missä

$$W := DN \circ (D\sigma)^{-1}$$

ja

$$W_{(u,v)} := (DN(u, v)) \circ (D\sigma(u, v))^{-1} : T_p\sigma(U) \rightarrow T_{N(u,v)}S^2$$

on pintaelementin σ Weingartenin kuvaus⁴ (=muoto-operaattori).

Huom 7.23. 1. Lauseen 7.21 mukaan $T_{N(u,v)}S^2$ voidaan samaistaa $T_p\sigma(U)$:n osajoukon kanssa, jolloin usein merkitään lyhyesti

$$W_{(u,v)} : T_p\sigma(U) \rightarrow T_p\sigma(U).$$

2. Kirjallisuudessa W määritellään usein vastakkaismerkkisenä.

(KUVA)

Huom 7.24. Kuvauksen $h \mapsto D\sigma(u, v)h$, $T_{(u,v)}U \rightarrow T_p\sigma(U)$, käänteiskuvaus $(D\sigma(u, v))^{-1} : T_p\sigma(U) \rightarrow T_{(u,v)}U$ on hyvin määritelty, sillä $D\sigma(u, v)$ on injektio kaikilla $(u, v) \in U$.

Seuraus 7.25. Olkoon $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ Weingartenin kuvauksen $W_{(u,v)}$ esitysmatriisi $T_p\sigma(U)$:n kannassa $\{\sigma_u, \sigma_v\}$, eli $N_u = a\sigma_u + b\sigma_v$ ja $N_v = c\sigma_u + d\sigma_v$. Tällöin pätee $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -g^{-1}h$. Matriisia $g^{-1}h$ sanotaan usein *Weingartenin matriisiksi*.

⁴Julius Weingarten (1836-1910), saksalainen matemaatikko

Todistus. Lauseen 7.21 mukaan $N_u, N_v \in \text{span}\{\sigma_u, \sigma_v\}$, joten a, b, c ja d ovat yksikäsitteiset.

Tiedetään, että $N_\sigma \cdot \sigma_u = 0$, joten osittaisderivoimalla u :n suhteen saadaan $N_u \cdot \sigma_u + N_\sigma \cdot \sigma_{uu} = 0$, joten

$$N_u \cdot \sigma_u = -N_\sigma \cdot \sigma_{uu} = -L.$$

Osittaisderivoimalla v :n suhteen saadaan $N_v \cdot \sigma_u + N_\sigma \cdot \sigma_{uv} = 0$, eli

$$N_v \cdot \sigma_u = -N_\sigma \cdot \sigma_{uv} = -M,$$

Vastaavasti yhtälöstä $N_\sigma \cdot \sigma_v = 0$ saadaan v :n suhteen osittaisderivoimalla $N_v \cdot \sigma_v + N_\sigma \cdot \sigma_{vv} = 0$, eli

$$N_v \cdot \sigma_v = -N_\sigma \cdot \sigma_{vv} = -N$$

(missä N on toiseen perusmuotoon liittyvä kerroin, ei Gaussin kuvaus) ja u :n suhteen osittaisderivoimalla $N_u \cdot \sigma_v + N_\sigma \cdot \sigma_{vu} = 0$, eli

$$N_u \cdot \sigma_v = -N_\sigma \cdot \sigma_{vu} = -M.$$

Näin ollen

$$\begin{cases} -L = N_u \cdot \sigma_u = a\sigma_u \cdot \sigma_u + b\sigma_v \cdot \sigma_u = aE + bF \\ -M = N_v \cdot \sigma_u = c\sigma_u \cdot \sigma_u + d\sigma_v \cdot \sigma_u = cE + dF \\ -N = N_v \cdot \sigma_v = c\sigma_u \cdot \sigma_v + d\sigma_v \cdot \sigma_v = cF + dG \\ -M = N_u \cdot \sigma_v = a\sigma_u \cdot \sigma_v + b\sigma_v \cdot \sigma_v = aF + bG \end{cases}$$

$$\iff -\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\iff -h = g \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -g^{-1}h$$

□

Huom 7.26. Yhteys 1. perusmuotoon:

Jos $X, Y \in T_p\sigma U$ on esitetty kannassa $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ ja \tilde{X}, \tilde{Y} ovat vastaavilla koordinaateilla varustetut tangenttiavaruuden $T_{(u,v)}U \cong \mathbb{R}^2$ vektorit, niin saadaan

$$\begin{aligned} I_{(u,v)} \left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tilde{X}, \tilde{Y} \right) &= \left\langle g \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle \\ &= -\langle gg^{-1}h\tilde{X}, \tilde{Y} \rangle \\ &= -\langle h\tilde{X}, \tilde{Y} \rangle \\ &=: -II_{(u,v)}(\tilde{X}, \tilde{Y}), \end{aligned}$$

missä II on kuten yhtälössä (7.3).

Saatiin siis Weingartenin kuvauksen välittämä yhteys ensimmäisen ja toisen perusmuodon välillä muodossa

$$I(WX, Y) = -II(X, Y). \quad (7.11)$$

Yllä miinusmerkki voitaisiin hävittää määrittelemällä Weingartenin kuvaus vastakkaismerkkisenä. Yhtälö (7.11) otetaan usein toisen perusmuodon määritelmäksi. Weingartenin kuvaukselle käytetään usein myös symboleja L ja S (shape).

7.4 Pääkaarevuuksien geometrinen tulkinta

Pinnan muoto pisteen $p \in \sigma(U)$ lähellä on pääteltävissä pääkaarevuuksista $\kappa_1(p)$, $\kappa_2(p)$:

Avaruuden jäykkää liikettä vaille voidaan olettaa, että

- (i) $p = (0, 0, 0) = \sigma(0, 0)$
- (ii) $T_p\sigma(U) \parallel xy$ -taso
- (iii) $t_1 = (1, 0, 0)$ ja $t_2 = (0, 1, 0)$ ovat pääkaarevuusvektorit.

Tällöin löytyy kertoimet ξ_i , η_i siten, että pätee $(1, 0, 0) = \xi_1\sigma_u + \eta_1\sigma_v$ ja $(0, 1, 0) = \xi_2\sigma_u + \eta_2\sigma_v$. Merkitään taas $T_i = (\xi_i \ \eta_i)^T \in T_{(0,0)}U$. Pisteen $(x, y, 0) \in T_p\sigma(U)$ koordinaatit kannassa (σ_u, σ_v) ovat nyt

$$x(\xi_1\sigma_u + \eta_1\sigma_v) + y(\xi_2\sigma_u + \eta_2\sigma_v) = \underbrace{(x\xi_1 + y\xi_2)}_{=:s} \sigma_u + \underbrace{(x\eta_1 + y\eta_2)}_{=:t} \sigma_v.$$

Kahden muuttujan Taylorin kehitelmällä saadaan

$$\begin{aligned} \sigma(s, t) &\approx \sigma(0, 0) + \sigma_u s + \sigma_v t + \frac{1}{2}(\sigma_{uu}s^2 + 2\sigma_{uv}st + \sigma_{vv}t^2) \\ &= (x, y, 0) + \frac{1}{2}(\sigma_{uu}s^2 + 2\sigma_{uv}st + \sigma_{vv}t^2), \end{aligned}$$

missä derivaattojen arvot lasketaan origossa. Näin saadaan

$$\begin{aligned} z &= \sigma(s, t) \cdot N_\sigma \\ &= \frac{1}{2}(Ls^2 + 2Mst + Nt^2) \\ &= \frac{1}{2}(s \ t) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\xi_1 + y\xi_2 \\ x\eta_1 + y\eta_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = xT_1 + yT_2,$$

joten

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(xT_1 + yT_2)^T h(xT_1 + yT_2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2T_1^T hT_1 + xy(T_1^T hT_2 + T_2^T hT_1) + y^2T_2^T hT_2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2\kappa_1 + y^2\kappa_2), \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus nähdään Eulerin lauseen 7.17 todistuksesta.

Saatiin: pintaelementtiä (σ, U) pisteessä $p \in \sigma(U)$ approksimoi pinta

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2), \quad (7.12)$$

missä $\kappa_1(p)$ ja $\kappa_2(p)$ ovat pinnan pääkaarevuudet pisteessä p ja vastaavat pääkaarevuusvektorit ovat x - ja y -koordinaattien suuntaiset yksikkövektorit.

Eri tapaukset voidaan erotella seuraavasti:

- (i) p on *elliptinen piste* jos ja vain jos $\kappa_1(p)\kappa_2(p) > 0$, jolloin (7.12) on elliptisen paraboloidin yhtälö.
- (ii) p on *hyperbolinen piste* jos ja vain jos $\kappa_1(p)\kappa_2(p) < 0$, jolloin (7.12) on hyperbolisen paraboloidin yhtälö.
- (iii) p on *parabolinen piste* jos ja vain jos $\kappa_1(p)\kappa_2(p) = 0$, mutta $\kappa_1(p) \neq 0$ tai $\kappa_2(p) \neq 0$. Tällöin (7.12) on parabolisen sylinterin yhtälö.
- (iv) p on *tasopiste* jos ja vain jos $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$. (Huom: Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että p :n ympäristö olisi välttämättä taso.)

Esimerkki 7.27 (“Apinan satula”). Parametrisaatio $\sigma(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$ antaa

$$\begin{aligned} \sigma_u &= (1, 0, 3u^2 - 3v^2) \\ \sigma_v &= (0, 1, -6vu), \end{aligned}$$

joten pisteessä $(u, v) = (0, 0)$ saadaan

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Edelleen derivoimalla

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= (0, 0, 6u) \\ \sigma_{vv} &= (0, 0, -6v) \\ \sigma_{uv} &= (0, 0, -6v),\end{aligned}$$

ja pisteessä $(u, v) = (0, 0)$ pätee

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen $\kappa_1(0, 0) = \kappa_2(0, 0) = 0$, mutta siitä huolimatta pisteen $(0, 0)$ ympäristössä pintaa on molemmilla puolilla xy -tasoa.

(KUVA)

Esimerkki 7.28. 1. Yksikköpallolle $\kappa_1 \equiv \kappa_2 \equiv \pm 1$ (suunnistuksesta riippuen), joten jokainen piste on elliptinen napapiste.

2. Ympyräsynterille $\kappa_1 \equiv \pm 1$, $\kappa_2 = 0$, joten jokainen piste on parabolinen piste, napapisteitä ei ole.

Esimerkki 7.29 (Torus). Tason $T \subset \mathbb{R}^3$ ympyrän C pyörähtäessä suoran $L \subset T$ ympäri (oletetaan $L \cap C = \emptyset$) saadaan torus. Jos oletetaan, että $T = xz$ -taso, $L = z$ -akseli ja

$$C = \{(x, 0, z) \mid (x - a)^2 + z^2 = b^2\}, \quad a > b > 0,$$

niin toruksella on säännöllinen parametrisointi

$$\sigma(\theta, \varphi) = ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta),$$

kun valitaan $U_1 = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, $U_2 = (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$, $U_3 = (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi)$, $U_4 = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= (-b \sin \theta \cos \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, b \cos \theta) \\ \sigma_\varphi &= (-(a + b \cos \theta) \sin \varphi, (a + b \cos \theta) \cos \varphi, 0),\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} E &= \sigma_\theta \cdot \sigma_\theta = b^2 \\ F &= \sigma_\theta \cdot \sigma_\varphi = 0 \\ G &= \sigma_\varphi \cdot \sigma_\varphi = (a + b \cos \theta)^2, \end{aligned}$$

eli

$$g = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b \cos \theta)^2 \end{pmatrix}.$$

Normaali

$$N_\sigma = \frac{\sigma_\theta \times \sigma_\varphi}{\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\|} = (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

osoittaa sisään torukseen!

Toisen perusmuodon kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned} L &= \sigma_{\theta\theta} \cdot N_\sigma = b \\ M &= \sigma_{\theta\varphi} \cdot N_\sigma = 0 \\ N &= \sigma_{\varphi\varphi} \cdot N_\sigma = (a + b \cos \theta) \cos \theta, \end{aligned}$$

joten

$$h = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a + b \cos \theta) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Lasketaan sitten pääkaarevuudet:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(h - \kappa g) \\ &= \begin{vmatrix} b - \kappa b^2 & 0 \\ 0 & (a + b \cos \theta) \cos \theta - \kappa (a + b \cos \theta)^2 \end{vmatrix} \\ &= b(a + b \cos \theta)(1 - \kappa b)(\cos \theta - \kappa(a + b \cos \theta)), \end{aligned}$$

joten

$$\kappa_1 \equiv \frac{1}{b}, \quad \kappa_2 = \frac{\cos \theta}{a + b \cos \theta}.$$

Koska $\kappa_1 > 0$, niin toruksen piste p on

- parabolinen, jos $\kappa_2 = 0$, eli kun $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,
- hyperbolinen, jos $\kappa_2 < 0$, eli kun $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$,
- elliptinen, jos $\kappa_2 > 0$, eli kun $\theta \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ tai $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Toisin sanoen: Paraboliset pisteet ovat ympyröillä $\sigma(\pi/2, \varphi) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, b)$ ja $\sigma(3\pi/2, \varphi) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, -b)$.

Hyperboliset pisteet:

(KUVA)

Elliptiset pisteet:

(KUVA)

Lause 7.30. *Jos S on sileä pinta, jonka jokainen piste on napapiste, niin S on osa palloa tai tasoa.*

Todistus. Olkoon $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ pinnan S parametrisointi ja $p \mapsto \kappa(p) = \kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ pääkaarevuus. Lauseen 7.15 kohdan 2 mukaan nyt $h = \kappa g$, joten Weingartenin matriisi saa muodon

$$g^{-1}h = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}.$$

Seuraus 7.25 kertoo, että nyt $N_u = -\kappa\sigma_u$ ja $N_v = -\kappa\sigma_v$, joten

$$\begin{aligned} \kappa_v\sigma_u + \kappa\sigma_{uv} &= (\kappa\sigma_u)_v \\ &= -N_{uv} \\ &\underbrace{=}_{\text{sileyks}} -N_{vu} \\ &= (\kappa\sigma_v)_u \\ &= \kappa_u\sigma_v + \kappa\sigma_{vu}, \end{aligned}$$

eli $\kappa_u\sigma_v = \kappa_v\sigma_u$. Koska σ on säännöllinen, ovat σ_u ja σ_v lineaarisesti riippumattomat, ja näin ollen täytyy päteä $\kappa_u \equiv 0 \equiv \kappa_v$, joten $\kappa \equiv$ vakio.

Jos $\kappa \equiv 0$, niin $N_u \equiv 0 \equiv N_v$, eli $N \equiv$ vakio. Tällöin $(N \cdot \sigma)_u = N \cdot \sigma_u = 0$ ja $(N \cdot \sigma)_v = N \cdot \sigma_v = 0$, joten $N \cdot \sigma \equiv$ vakio, ja siten $\sigma(U)$ on osa tasoa, joka on kohtisuorassa vektoria N vastaan.

Jos $\kappa \neq 0$, niin saadaan $N = -\kappa\sigma + a$, missä a on vakiovektori, joten

$$\left\| \sigma - \frac{a}{\kappa} \right\|^2 = \left\| -\frac{N}{\kappa} \right\|^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

Näin ollen $\sigma(U)$ on osa palloa, joka keskipiste on a/κ ja säde $1/|\kappa|$.

Koska parametrisointi σ oli mielivaltainen, seuraa tästä väite. \square

Luku 8

Gaussin kaarevuus ja Gaussin lause

8.1 Pinnan Gaussin kaarevuus

Edellä todettiin, että pääkaarevuudet κ_1 ja κ_2 eivät säily edes isometrioissa (esim. taso ja sylinteri). Halutaankin tarkastella näiden johdannaisia, joilla on suurempi itsenäinen merkitys.

Määritelmä 8.1. Säännöllisen pintaelementin (σ, U) Gaussin kaarevuus pisteessä $p \in \sigma(U)$ on pääkaarevuuksien κ_1 ja κ_2 tulo

$$K(p) := \kappa_1(p)\kappa_2(p).$$

Vastaavasti keskikaarevuus

$$H(p) := \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p))$$

on pääkaarevuuksien keskiarvo.

Huom 8.2. $K(p)$ on riippumaton parametrisoinnista, $H(p)$ on merkkiä vaille yksikäsitteinen. (HT)

Lause 8.3. Olkoon (σ, U) säännöllinen parametrisointi ja $g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

sen ensimmäinen ja $h = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ sen toinen perusmuoto. Tällöin

(i)

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

(ii)

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)},$$

(iii) κ_1 ja κ_2 saadaan lausekkeesta $H \pm \sqrt{H^2 - K}$.*Todistus.* Pääkaarevuudet määräytyvät ehdosta

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{vmatrix} = 0 \\ & \iff (L - \kappa E)(N - \kappa G) - (M - \kappa F)^2 = 0 \\ & \iff LN - LG\kappa - EN\kappa + \kappa^2 EG - (M^2 - 2MF\kappa + F^2\kappa^2) = 0 \\ & \iff (EG - F^2)\kappa^2 + (2MF - LG - EN)\kappa + LN - M^2 = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

Toisen asteen yhtälölle $a\kappa^2 + b\kappa + c = 0$ pätee

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ \kappa_1 + \kappa_2 &= -\frac{b}{a}, \\ \kappa_1\kappa_2 &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{cases} K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{LG + EN - 2MF}{2(EG - F^2)}. \end{cases}$$

Yhtälö (8.1) voidaan Gaussin kaarevuuden ja keskikaarevuuden avulla kirjoittaa muodossa

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0,$$

jolloin nähdään, että

$$\kappa = \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

□

Esimerkki 8.4. 1. R -säteiselle pallolle $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/R$, joten $K = 1/R^2$ ja $H = 1/R$.2. R -säteiselle ympyräsylinterille $\kappa_1 = 1/R$, $\kappa_2 = 0$, joten $K = 0$ ja $H = 1/(2R)$.

3. Pyörähdyspinnalle $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ pätee (kts. esimerkki 7.2)

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} \text{ ja } h = \begin{pmatrix} g''f' - g'f'' & 0 \\ 0 & fg' \end{pmatrix},$$

joten

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{fg'(g''f' - g'f'')}{f^2}.$$

Pyörähdyspinnan profiilikäyrä on $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$, joten $1 = \|\gamma'\|^2 = (f')^2 + (g')^2$. Tämä derivoimalla todetaan, että $2f'f'' + 2g'g'' = 0$, eli $f'f'' = -g'g''$. Näin ollen

$$(f'g'' - g'f'')g' = -(f')^2f'' - (g')^2f'' = -f'',$$

joten Gaussin kaarevuus sievenee muotoon

$$K = -\frac{f''}{f}.$$

4. Viivoitinpinnalle $\sigma(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$ (kts. esimerkki 5.23) pätee

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \gamma' + v\delta', \\ \sigma_v &= \delta, \\ \sigma_{uu} &= \gamma'' + v\delta'', \\ \sigma_{uv} &= \delta', \\ \sigma_{vv} &= 0. \end{aligned}$$

Koska $N_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$, niin $M = \sigma_{uv} \cdot N_\sigma = \delta' \cdot N_\sigma$ ja $N = \sigma_{vv} \cdot N_\sigma = 0$, joten

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-(\delta' \cdot N_\sigma)^2}{EG - F^2} \leq 0,$$

sillä $EG - F^2 = \det g > 0$ (kts. huomautus 6.20).

8.2 Gaussin kaarevuuden geometrinen tulkinta

Tasokäyriä tarkasteltaessa havaittiin yhteys $\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$, missä φ oli käyrän tangenttivektorin ja jonkin kiinnitetyn suunnan välinen kulma. Kaarevuus siis mittasi tangenttivektorin suunnan muutosta pituusyksikköä kohti.

Tarkastellaan tälle tulokselle analogiaa pintojen tapauksessa. Tarkastellaan Gaussin kuvausta (määr. 7.19) $N : U \rightarrow S^2$,

$$N(u, v) = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}(u, v),$$

säännöllisellä pintaelementillä $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Merkitään symbolilla G induoituvaa kuvausta $\sigma(U) \rightarrow S^2$. (Myös tätä kutsutaan usein Gaussin kuvaukseksi.) Suure

$$\frac{\mathcal{A}_N(R)}{\mathcal{A}_\sigma(R)},$$

missä

$$\mathcal{A}_\sigma(R) = \iint_R \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv$$

ja

$$\mathcal{A}_N(R) = \iint_R \|N_u \times N_v\| dudv$$

(määritelmän 6.18 merkinnät) kuvaa normaalin N muutosta pinta-alayksikköä kohti.

(KUVA)

Saadaan:

Lause 8.5. Jos $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on säännöllinen pintaelementti, $(u_0, v_0) \in U$ ja $\delta > 0$ siten, että $R_\delta := \overline{\mathbb{B}}((u_0, v_0), \delta) \subset U$, niin

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}_N(R_\delta)}{\mathcal{A}_\sigma(R_\delta)} = |K|,$$

missä K on $\sigma(U)$:n Gaussin kaarevuus pisteessä $\sigma(u_0, v_0)$.

Todistus. Seurauksen 7.25 mukaan

$$\begin{aligned}
N_u \times N_v &= (a\sigma_u + b\sigma_v) \times (c\sigma_u + d\sigma_v) \\
&= (ad - bc)\sigma_u \times \sigma_v \\
&= \det(-g^{-1}h)\sigma_u \times \sigma_v \\
&= \frac{\det h}{\det g}\sigma_u \times \sigma_v \\
&= \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}\sigma_u \times \sigma_v \\
&= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\sigma_u \times \sigma_v \\
&\stackrel{\underbrace{\hspace{1cm}}}{=} K\sigma_u \times \sigma_v,
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Lause 8.3

joten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{A}_N(R_\delta)}{\mathcal{A}_\sigma(R_\delta)} &= \frac{\iint_{R_\delta} \|N_u \times N_v\| dudv}{\iint_{R_\delta} \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv} \\
&= \frac{\iint_{R_\delta} |K| \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv}{\iint_{R_\delta} \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Koska kuvaus $(u, v) \mapsto K(u, v)$ on jatkuva (HT), niin voidaan valita $\delta > 0$ siten, että $|K(u, v) - K(u_0, v_0)| < \epsilon$ kaikilla $(u, v) \in R_\delta$. Epäyhtälöstä

$$|K(u_0, v_0)| - \epsilon \leq |K(u, v)| \leq |K(u_0, v_0)| + \epsilon$$

saadaan

$$\begin{aligned}
(|K(u_0, v_0)| - \epsilon) \iint_{R_\delta} \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv &\leq \iint_{R_\delta} |K(u, v)| \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv \\
&\leq (|K(u_0, v_0)| + \epsilon) \iint_{R_\delta} \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv
\end{aligned}$$

ja näin ollen

$$|K(u_0, v_0)| - \epsilon \leq \frac{\mathcal{A}_N(R_\delta)}{\mathcal{A}_\sigma(R_\delta)} \leq |K(u_0, v_0)| + \epsilon,$$

mikä todistaa väitteen. □

- Huom 8.6.** 1. Lause antaa kaarevuuden itseisarvon. Etumerkki saadaan määrittelemällä *suunnistettu pinta-ala* $s\mathcal{A}_N(R) = \pm\mathcal{A}_N(R)$, + kun N on yhdensuuntainen vektorin $N_u \times N_v$ kanssa, – kun vektorit ovat vastakkaisuuntaiset. Ehdon (8.2) mukaan etumerkki tulee tällöin oikein.
2. Edellistä tulkintaa voidaan joskus käyttää myös kaarevuuden K määrittämiseen. Esim. taso, ympyräsylinteri, pallo. (HT)

8.3 Geodeesit

Määritelmä 8.7. Olkoon S sileä pinta. Säännöllinen polku $\gamma : I \rightarrow S$ on *geodeesi* jos $\gamma'' \perp T_{\gamma(t)}S$ eli $\gamma''(t) \parallel N_{\gamma(t)}$ kaikilla $t \in I$.

- Huom 8.8.** 1. Määritelmä on riippumaton normaalin suunnan valinnasta.
2. Tulkinta: kappale, joka liikkuu pinnalla siten, että siihen ei kohdistu muita voimia kuin pintaa vastaan kohtisuora voima, joka pitää kappaleen pinnalla, kulkee pitkin geodeesia. (Newtonin toinen laki: $F \parallel \gamma''$.)
3. Geodeesille pätee $\|\gamma'\| = \text{vakio}$, sillä

$$\frac{d}{dt}\|\gamma'\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \gamma', \gamma' \rangle = 2\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0,$$

koska $\gamma' \in T_{\gamma(t)}S$. Voidaan siis olettaa, että $\|\gamma'\| = 1$.

Lause 8.9 (Geodeesien karakterisointi). *Pinnan S säännöllinen polku on geodeesi, jos ja vain jos sen geodeettinen kaarevuus häviää, eli $\kappa_g = 0$.*

Todistus. Riittää tarkastella pintaelementillä $\sigma(U)$ olevaa polkua, joka on annettu muodossa $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$.

" \Rightarrow " Määritelmän mukaan $\kappa_g = \gamma'' \cdot N_\sigma \times \gamma'$. Jos $\gamma'' \parallel N_\sigma$, niin $\kappa_g = 0$.

" \Leftarrow " Jos $\kappa_g = 0$, niin $\gamma'' \perp N_\sigma \times \gamma'$. Lisäksi tiedetään, että $\gamma'' \perp \gamma'$.

Koska $\{\gamma', N_\sigma, N_\sigma \times \gamma'\}$ on ortonormaalinen kanta, on siis oltava $\gamma'' \parallel N_\sigma$. \square

Esimerkki 8.10. 1. Pinnalla kulkeva suora (\mathbb{R}^3 :n mielessä suora) on aina geodeesi, sillä suora voidaan parametrisoida muodossa $\gamma(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, jolloin $\gamma'' \equiv 0$ ja siis $\kappa_g = \gamma'' \cdot (N_\sigma \times \gamma') \equiv 0$.

2. Pinnan normaalisektiot ovat geodeeseja, sillä niille pätee $\kappa_g = 0$ (kts. Huom 7.6). Näin ollen esimerkiksi pallolla kaikki isoympyrät ovat geodeeseja, sillä ne ovat normaalisektioita.

Tarkastellaan seuraavaksi geodeettisen kaarevuuden häviämistä fysiikaalisen esimerkin valossa:

Esimerkki 8.11. Tutkitaan pintaa $\sigma = \sigma(\varphi, s)$, jota pitkin kulkeva lanka kiristetään kulkemaan pisteestä $A = \gamma(a)$ pisteeseen $B = \gamma(b)$ yksikkönopeuspolkuna $\gamma : [a, b] \rightarrow \sigma$, jolle $\gamma(t) = \sigma(\varphi(t), s(t))$. Oletetaan, että painovoiman vaikutus on langan jännitysvoimaan verrattuna pieni ja että lanka pääsee liikkumaan kitkattomasti pitkin pintaa kiristyessään.

Kun kirjoitetaan langan osan $t \in (a, x)$, $x < b$ liikeyhtälö sen kiristyttyä, täytyy vallita voimatasapaino. Langassa on tasainen jännitysvoima $\pm c\dot{\gamma}(t)$ ja pinta vaikuttaa siihen voimatiheydellä $\mathbf{f}(t)$, jolloin pätee

$$-c\dot{\gamma}(a) + c\dot{\gamma}(x) + \int_a^x \mathbf{f}(t)\|\dot{\gamma}(t)\|dt = 0.$$

Käyttämällä tietoa $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, derivoimalla ja käyttämällä analyysin peruslausetta saadaan

$$c\ddot{\gamma}(x) + \mathbf{f}(x) = 0.$$

Tässä kitkattomuuden vuoksi $\mathbf{f} \parallel \mathbf{N}$ kaikilla x , joten pätee $\ddot{\gamma} \parallel \mathbf{N}$ ja $\kappa_g \equiv 0$.

Lause 8.12 (Geodeettiset yhtälöt). *Käyrä γ pinnalla S on geodeesi jos ja vain jos kaikilla yhteen pintaelementtiin σ kuuluvilla käyrän osilla $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ seuraavat kaksi yhtälöä ovat voimassa:*

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2), \quad (8.3)$$

$$\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v(u')^2 + 2F_v u'v' + G_v(v')^2), \quad (8.4)$$

missä $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ on σ :n ensimmäinen perusmuoto.

Todistus. Koska $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ on σ :n tangenttiavaruuden kanta, on käyrä γ geodeesi jos ja vain jos $\gamma'' \perp \sigma_u$ ja $\gamma'' \perp \sigma_v$. Koska $\gamma' = u'\sigma_u + v'\sigma_v$, saadaan näistä

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right) \cdot \sigma_u = 0, \quad (8.5)$$

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right) \cdot \sigma_v = 0, \quad (8.6)$$

Osoitetaan, yhtälöt (8.5) ja (8.6) ovat ekvivalentit geodeettisille yhtälöille (8.3) ja (8.4):

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v) \right) \cdot \sigma_u \\
&= \frac{d}{dt}((u'\sigma_u + v'\sigma_v) \cdot \sigma_u) - (u'\sigma_u + v'\sigma_v) \cdot \frac{d\sigma_u}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - (u'\sigma_u + v'\sigma_v) \cdot (u'\sigma_{uu} + v'\sigma_{uv}) \\
&= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - ((u')^2 \underbrace{(\sigma_u \cdot \sigma_{uu})}_{=\frac{1}{2}E_u} + u'v' \underbrace{(\sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_v \cdot \sigma_{uu})}_{=F_u} + (v')^2 \underbrace{(\sigma_v \cdot \sigma_{uv})}_{=\frac{1}{2}G_u}) \\
&= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{1}{2}(E_u(u')^2 + 2F_u u'v' + G_u(v')^2),
\end{aligned}$$

sillä

$$\begin{aligned}
E_u &= (\sigma_u \cdot \sigma_u)_u = \sigma_{uu} \cdot \sigma_u + \sigma_u \cdot \sigma_{uu} = 2\sigma_u \cdot \sigma_{uu} \\
G_u &= (\sigma_v \cdot \sigma_v)_u = \sigma_{vu} \cdot \sigma_v + \sigma_v \cdot \sigma_{vu} = 2\sigma_v \cdot \sigma_{uv} \\
F_u &= (\sigma_u \cdot \sigma_v)_u = \sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_v \cdot \sigma_{uu}.
\end{aligned}$$

Yhtälö (8.5) on siis ekvivalentti yhtälön (8.3) kanssa. Vastaavasti saadaan yhtälöille (8.6) ja (8.4). \square

Huom 8.13. Geodeettiset yhtälöt ovat epälineaarisia differentiaaliyhtälöitä, joten ne ovat yleensä hankalia tai mahdottomia ratkaista eksplisiittisesti. Yksikköpallon tapauksessa se kuitenkin onnistuu (HT).

Seuraus 8.14. Olkoon P pinnan S piste ja olkoon \mathbf{t} pinnan S yksikkötangenttivektori pisteessä P . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kaarenpituuden suhteen parametrisoitu pinnan S geodeesi γ , joka kulkee pisteen P kautta ja jonka tangentti pisteessä P on \mathbf{t} .

Seurauksen 8.14 todistus perustuu siihen, että geodeettiset yhtälöt ovat toisen asteen differentiaaliyhtälöitä u :n ja v :n suhteen. Kiinnittämällä alkuarvot (käyrä kulkee pisteen P kautta ja sen tangentti pisteessä P on \mathbf{t}) nämä antavat yksikäsitteisen ratkaisun $(u(t), v(t))$ ja siten yksikäsitteisen geodeesin $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$.

Esimerkki 8.15. 1. Tiedetään jo, että tasolla suorat ovat geodeeseja. Nyt nähdään lisäksi, että nämä ovat ainoat geodeesit, sillä joka pisteessä joka suuntaan on olemassa suora, ja seurauksen 8.14 mukaan kaikki geodeesit on näin saatu.

2. Vastaavasti pallolla isoympyrät ovat ainoat geodeesit, sillä joka pisteessä on olemassa isoympyrä mihin tahansa valittuun suuntaan.

Lause 8.16. *Pintojen välinen isometria vie geodeesit geodeeseiksi.*

Todistus. Olkoon $f : S_1 \rightarrow S_2$ pintojen S_1 ja S_2 välinen isometria, ja olkoon γ geodeesi S_1 :llä. Tarkastellaan pintaelementtiä $\sigma(U)$, jolla $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$. Tällöin u ja v toteuttavat geodeettiset yhtälöt (8.3) ja (8.4), missä E , F ja G ovat σ :n ensimmäisen perusmuodon kertoimet. Lauseen 6.9 mukaan $f \circ \sigma(U)$ on pintaelementti pinnalla S_2 ja sillä on sama ensimmäinen perusmuoto kuin σ :lla. Näin ollen $t \mapsto f(\sigma(u(t), v(t)))$ on lauseen 8.12 mukaan geodeesi pinnalla S_2 . \square

8.4 Gaussin lause (Theorema egregium)

Lause 8.17 (Gaussin lause). *Sileän pinnan Gaussin kaarevuus säilyy isometrioissa: Jos S_1 ja S_2 ovat sileitä pintoja ja $f: S_1 \rightarrow S_2$ on isometria, niin $K(p) = K(f(p))$ kaikilla $p \in S_1$.*

Tämä tarkoittaa, että Gaussin kaarevuus on pintojen sisäinen suure!

Gaussin lauseen todistamiseksi riittää osoittaa, että jos kaikilla pinnan S_1 parametrisoinneilla σ_1 ja kaikilla pinnan S_2 muotoa $f \circ \sigma_1$ olevilla parametrisoinneilla on sama ensimmäinen perusmuoto, niin $K(p) = K(f(p))$ kaikilla $p \in \sigma(U)$.

Huom: Edellä saatiin, että $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, joten $LN - M^2$ täytyy voida lausua suureiden E, F, G avulla!

Muodostetaan pintaelementin $\sigma(U)$ pisteisiin $p \in \sigma(U)$ tangenttiavaruudelle $T_p\sigma(U)$ ortonormaali kanta $\{V(p), W(p)\}$ (\mathbb{R}^3 :n tavallisen sisätulon suhteen) siten, että funktiot

$$(u, v) \mapsto V(u, v) := V(\sigma(u, v))$$

ja

$$(u, v) \mapsto W(u, v) := W(\sigma(u, v))$$

ovat sileitä. Tällöin $\{V, W, N_\sigma\}$ on \mathbb{R}^3 :n ortonormaali kanta pisteessä $p = \sigma(u, v)$. Oletetaan, että $\{V, W, N_\sigma\}$ on oikeakätinen, eli että $N_\sigma = V \times W$ (tarvittaessa vaihdetaan V ja W keskenään).

Esitetään V_u, V_v, W_u ja W_v tässä kannassa:

$$\langle V, V \rangle = 1 \Rightarrow \langle V_u, V \rangle + \langle V, V_u \rangle = 0 \Rightarrow \langle V_u, V \rangle = 0.$$

Vastaavasti $\langle V_v, V \rangle = 0$ ja

$$\langle W, W \rangle = 1 \Rightarrow \langle W_u, W \rangle = 0, \langle W_v, W \rangle = 0.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} V_u &= \alpha W + \lambda N_\sigma \\ V_v &= \beta W + \mu N_\sigma \\ W_u &= \alpha' V + \lambda' N_\sigma \\ W_v &= \beta' V + \mu' N_\sigma \end{aligned}$$

joillakin $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$, $\lambda = \lambda(u, v)$, $\mu = \mu(u, v)$, $\alpha' = \alpha'(u, v)$, $\beta' = \beta'(u, v)$, $\lambda' = \lambda'(u, v)$, $\mu' = \mu'(u, v) \in \mathbb{R}$. Ehdosta $\langle V, W \rangle = 0$ saadaan lisäksi $\langle V_u, W \rangle + \langle V, W_u \rangle = 0$ ja $\langle V_v, W \rangle + \langle V, W_v \rangle = 0$, joten

$$\alpha = \langle V_u, W \rangle = -\langle V, W_u \rangle = -\alpha'$$

ja

$$\beta = \langle V_v, W \rangle = -\langle V, W_v \rangle = -\beta'.$$

Osoitetaan sitten yhteys ensimmäiseen perusmuotoon:

Lemma 8.18. *Edellä määritellylle sileälle ortonormaalille kannalle $\{V, W, N = N_\sigma\}$ pätee*

$$\begin{aligned} V_u \cdot W_v - W_u \cdot V_v &\stackrel{(a)}{=} \lambda\mu' - \lambda'\mu \\ &\stackrel{(b)}{=} \alpha_v - \beta_u \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Todistus. (a) Kun muistetaan, että $\alpha = -\alpha'$ ja $\beta = -\beta'$ ja että $\{V, W, N\}$ on ortonormaalikanta, saadaan

$$\begin{aligned} V_u \cdot W_v - W_u \cdot V_v &= (\alpha W + \lambda N) \cdot (-\beta V + \mu' N) - (-\alpha V + \lambda' N) \cdot (\beta W + \mu N) \\ &= \lambda\mu' - \lambda'\mu. \end{aligned}$$

(b) Käyttämällä tietoa $\alpha = -\langle V, W_u \rangle$ ja $\beta = -\langle V, W_v \rangle$ saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_v - \beta_u &= -\frac{\partial}{\partial v} \langle V, W_u \rangle + \frac{\partial}{\partial u} \langle V, W_v \rangle \\ &= -V_v \cdot W_u - V \cdot W_{uv} + V_u \cdot W_v + V \cdot W_{uv} \\ &= -V_v \cdot W_u + V_u \cdot W_v. \end{aligned}$$

(c) Edellä saatiin: $N_u \times N_v = K\sigma_u \times \sigma_v$, missä $N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ (yhtälö (8.2)), $\|\sigma_u \times \sigma_v\| = (EG - F^2)^{1/2}$ (Lause 6.19) ja $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ (Lause 8.3). Näin ollen

$$\begin{aligned} N_u \times N_v &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \sigma_u \times \sigma_v \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \|\sigma_u \times \sigma_v\| N \\ &= \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} N, \end{aligned}$$

joten

$$(N_u \times N_v) \cdot N = \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}}.$$

Vaativuksesta $N = V \times W$ saadaan toisaalta

$$\begin{aligned} (N_u \times N_v) \cdot N &= (N_u \times N_v) \cdot (V \times W) \\ &= V \cdot (W \times (N_u \times N_v)) \\ &= V \cdot ((W \cdot N_v)N_u - (W \cdot N_u)N_v) \\ &= (N_u \cdot V)(N_v \cdot W) - (N_v \cdot W)(N_u \cdot V). \end{aligned}$$

Koska $\langle N, V \rangle = 0$, niin derivoimalla u :n suhteen saadaan $\langle N_u, V \rangle + \langle N, V_u \rangle = 0$ eli $\langle N_u, V \rangle = -\langle N, V_u \rangle$. Derivoimalla v :n suhteen saadaan $\langle N_v, V \rangle = -\langle N, V_v \rangle$. Vastaavasti yhtälöstä $\langle N, W \rangle = 0$ saadaan $\langle N_u, W \rangle = -\langle N, W_u \rangle$ ja $\langle N_v, W \rangle = -\langle N, W_v \rangle$. Näin ollen

$$\begin{aligned} (N_u \times N_v) \cdot N &= (N_u \cdot V)(N_v \cdot W) - (N_v \cdot W)(N_u \cdot V) \\ &= (N \cdot V_u)(N \cdot W_u) - (N \cdot W_u)(N \cdot V_u) \\ &= \lambda\mu' - \lambda'\mu, \end{aligned}$$

mikä jo todistetun kohdan (a) avulla todistaa väitteen (c). □

Lauseen 8.17 todistus. Lemman 8.18 mukaan

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\alpha_v - \beta_u}{(EG - F^2)^{1/2}}.$$

Riittää siis osoittaa, että sopivalla vektoreiden $\{V, W\}$ valinnalla skalaarit $\alpha = \alpha(u, v)$ ja $\beta = \beta(u, v)$ riippuvat vain funktioista E, G ja F . Muodostetaan $\{V, W\}$ soveltamalla Gram–Schmidt-ortonormeerausta kantaan $\{\sigma_u, \sigma_v\}$:

Asetetaan $V := \frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|} = \epsilon\sigma_u$, missä $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{E}}$.

Etsitään $W = \delta_1\sigma_u + \delta_2\sigma_v$ joillakin δ_1, δ_2 siten, että $W \cdot V = 0$ ja $\|W\| = 1$. Täytyy siis päteä

$$\begin{aligned} 0 &= W \cdot V = \frac{1}{\sqrt{E}}(\delta_1\sigma_u \cdot \sigma_u + \delta_2\sigma_u \cdot \sigma_v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\delta_1E + \delta_2F) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} 1 &= W \cdot W = \delta_1^2\sigma_u \cdot \sigma_u + \delta_2\sigma_v \cdot \sigma_v + 2\delta_1\delta_2\sigma_u \cdot \sigma_v \\ &= \delta_1^2E + \delta_2^2G + 2\delta_1\delta_2F. \end{aligned}$$

Näin ollen pätee $\delta_1 = -\delta_2\frac{F}{E}$. Sijoitetaan se jälkimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$1 = \delta_2^2\frac{F^2}{E} + \delta_2^2G - 2\delta_2^2\frac{F^2}{E} = \delta_2^2\frac{GE - F^2}{E},$$

joten

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \frac{\sqrt{E}}{(EG - F^2)^{1/2}} \\ \delta_1 &= \frac{-F}{\sqrt{E}(EG - F^2)^{1/2}} \\ \epsilon &= \frac{1}{\sqrt{E}}.\end{aligned}$$

Saatiin siis $V = \epsilon\sigma_u$ ja $W = \delta_1\sigma_u + \delta_2\sigma_v$, missä $V = V(E, F, G)$ ja $W = W(E, F, G)$.

Lasketaan sitten α ja β :

$$\begin{aligned}\alpha &= V_u \cdot W = (\epsilon_u\sigma_u + \epsilon\sigma_{uu}) \cdot (\delta_1\sigma_u + \delta_2\sigma_v) \\ &= \frac{\epsilon_u}{\epsilon}(\epsilon\sigma_u) \cdot (\delta_1\sigma_u + \delta_2\sigma_v) + \epsilon\delta_1\sigma_{uu} \cdot \sigma_u + \epsilon\delta_2\sigma_{uv} \cdot \sigma_v \\ &= \frac{\epsilon_u}{\epsilon} \underbrace{V \cdot W}_{=0} + \frac{\epsilon\delta_1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \underbrace{(\sigma_u \cdot \sigma_u)}_{=E} + \epsilon\delta_2 \left(\frac{\partial}{\partial u} \underbrace{(\sigma_u \cdot \sigma_v)}_{=F} - \underbrace{\sigma_u \cdot \sigma_{uv}}_{=\frac{1}{2}E_v} \right) \\ &= \frac{\epsilon\delta_1}{2} E_u + \epsilon\delta_2 \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right)\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}\beta &= V_v \cdot W = (\epsilon_v\sigma_u + \epsilon\sigma_{uv}) \cdot (\delta_1\sigma_u + \delta_2\sigma_v) \\ &= \frac{\epsilon_v}{\epsilon}(\epsilon\sigma_u) \cdot (\delta_1\sigma_u + \delta_2\sigma_v) + \epsilon\delta_1\sigma_{uv} \cdot \sigma_u + \epsilon\delta_2\sigma_{vv} \cdot \sigma_v \\ &= \frac{\epsilon_v}{\epsilon} \underbrace{V \cdot W}_{=0} + \frac{\epsilon\delta_1}{2} \underbrace{(\sigma_u \cdot \sigma_u)}_{=E} + \frac{\epsilon\delta_2}{2} \frac{\partial}{\partial u} \underbrace{(\sigma_v \cdot \sigma_v)}_{=G} \\ &= \frac{\epsilon\delta_1}{2} E_v + \frac{\epsilon\delta_2}{2} G_u.\end{aligned}$$

Näin ollen α ja β riippuvat vain funktioista E , F ja G , joten Gaussin kaarevuus määräytyy pelkästään ensimmäisen perusmuodon avulla.

□

Esimerkki 8.19. Kaikki maapallosta piirretyt kartat vääristävät mittasuhteita. Jos nimittäin olisi olemassa mittasuhteita vääristämätön kuvaus $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pallolta tasoon, se saisi korkeintaan muuttaa pituuksia tietyllä vakiokertoimella C . Tällöin yhdistetty kuvaus, jossa kuvaukseen f yhdistetään tasossa skaalaus tyyppiä $\mathbf{r} \mapsto C^{-1}\mathbf{r}$, olisi isometria. Gaussin lauseen mukaan tällaista ei ole olemassa, sillä pallolle Gaussin kaarevuus on $1/R^2$ ja tasolle 0.

Luku 9

Gauss–Bonnet’n lause

9.1 Gauss-Bonnet’n lause käyrille

Määritelmä 9.1. Olkoon $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen parametrisoitu pintaelementti. Polku $\gamma : \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ on a -jaksoinen yksinkertainen suljettu käyrä jos $\pi := \pi(t) = (u(t), v(t))$ on \mathbb{R}^2 :n a -jaksoinen yksinkertainen suljettu käyrä s.e. $|\pi|$:n rajaamalle alueelle pätee $\text{int}(\pi) \subset U$. Polku γ on *positiivisesti suunnistettu*, jos π on positiivisesti suunnistettu, eli n_s osoittaa joukkoon $\text{int}(\pi)$.

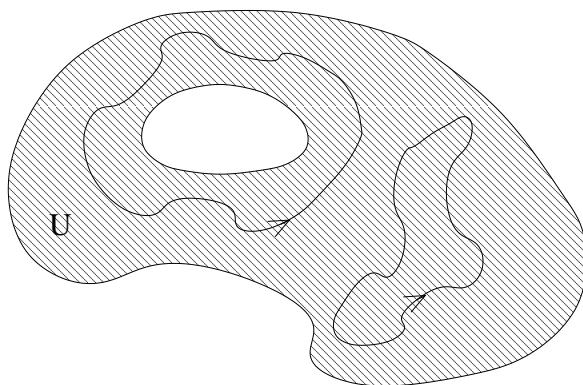


Figure 9.1: Positiivisesti suunnistetut yksinkertainen ja ei-yksinkertainen suljettu käyrä

Lause 9.2 (Gauss–Bonnet’n lause käyrille). *Olkoon γ kaarenpituuden suhteen parametrisoitu yksinkertainen suljettu käyrä pintaelementillä σ . Olkoon $l(\gamma)$ polun pituus ja olkoon se positiivisesti suunnistettu. Tällöin pätee*

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds = 2\pi - \iint_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma,$$

missä κ_g on geodeettinen kaarevuus, K on σ :n Gaussin kaarevuus ja $d\mathcal{A}_\sigma = (EG - F^2)^{1/2}dudv$ on σ :n infinitesimaalinen pinta-alaelementti.

Esimerkki 9.3. Tarkastellaan yksikköpallon isoympyrää γ . Tiedetään, että γ on geodeesi, joten sillä $\kappa_g = 0$. Lisäksi tiedetään, että yksikköpallolla $K = 1$. Lause 9.2 pätee ainakin tässä tapauksessa, sillä nyt

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds = \int_0^{l(\gamma)} 0 ds = 0$$

ja

$$\iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma = \iint_{\text{int}(\gamma)} d\mathcal{A}_\sigma = 2\pi,$$

sillä se on puolipallon pinta-ala.

Lauseen 9.2 todistus. Olkoon $\{e_1, e_2\}$ pintaelementin σ tangenttiavaruuden sileä ortonormaali kanta s.e. $\{e_1, e_2, N = e_1 \times e_2\}$ on \mathbb{R}^3 :n oikeakätinen ortonormaali kanta. Tarkastellaan integraalia

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{l(\gamma)} e_1 \cdot e_2' ds \quad \underbrace{=}_{e_2(s) := e_2(u(s), v(s))} \int_0^{l(\gamma)} e_1 \cdot (e_{2u}u' + e_{2v}v') ds \\ &= \int_\pi \underbrace{(e_1 \cdot e_{2u})}_{=: F_1} du + \int_\pi \underbrace{(e_1 \cdot e_{2v})}_{=: F_2} dv. \end{aligned}$$

Greenin kaava (Stokesin lause tasossa) antaa

$$\iint_{\text{int}(\pi)} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dudv = \int_\pi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\pi F_1 du + \int_\pi F_2 dv,$$

missä

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & 0 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial v} \right) \mathbf{k}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\text{int}(\pi)} ((e_1 \cdot e_{2v})_u - (e_1 \cdot e_{2u})_v) dudv \\
&= \iint_{\text{int}(\pi)} (e_{1u} \cdot e_{2v} + e_1 \cdot e_{2vu} - e_{1v} \cdot e_{2u} - e_1 \cdot e_{2uv}) dudv \\
&\stackrel{\text{e}_2 \text{ sileä}}{=} \iint_{\text{int}(\pi)} (e_{1u} \cdot e_{2v} - e_{1v} \cdot e_{2u}) dudv \\
&\stackrel{\text{Lemma 8.18}}{=} \iint_{\text{int}(\pi)} \frac{LN - M^2}{(EG - F^2)^{1/2}} dudv \\
&= \iint_{\text{int}(\pi)} \underbrace{\frac{LN - M^2}{EG - F^2}}_{=K(\text{Lause 8.3})} \underbrace{(EG - F^2)^{1/2} dudv}_{=d\mathcal{A}_\sigma} \\
&= \iint_{\text{int}(\pi)} K d\mathcal{A}_\sigma.
\end{aligned}$$

Olkoon $\theta(s)$ pisteeseen $\gamma(s)$ liittyvän tangenttivektorin $\gamma'(s)$ ja yksikkövektorin $e_1(s)$ välinen kulma: $\theta \pmod{2\pi}$ määräytyy yksikäsitteisesti ehdosta

$$\gamma' = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2. \quad (9.1)$$

Nyt pätee

$$\begin{aligned}
N \times \gamma' &= \cos \theta N \times e_1 + \sin \theta N \times e_2 \\
&= \cos \theta e_2 - \sin \theta e_1.
\end{aligned}$$

Yhtälöstä (9.1) saadaan

$$\gamma'' = -(\sin \theta)\theta' e_1 + \cos \theta e_1' + (\cos \theta)\theta' e_2 + \sin \theta e_2'.$$

Käyrän γ geodeettiselle kaarevuudelle saadaan nyt

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= (N \times \gamma') \cdot \gamma'' \\
&= (\cos \theta e_2 - \sin \theta e_1) \cdot (\theta'(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) + \cos \theta e_1' + \sin \theta e_2') \\
&= \theta'(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \theta e_2 \cdot e_1' + \cos \theta \sin \theta e_2 \cdot e_2' - \sin \theta \cos \theta e_1 \cdot e_1' \\
&\quad - \sin^2 \theta e_1 \cdot e_2' \\
&= \theta' + \cos^2 \theta e_2 \cdot e_1' - \sin^2 \theta e_1 \cdot e_2' + \cos \theta \sin \theta (e_2 \cdot e_2' - e_1 \cdot e_1'),
\end{aligned}$$

missä kolmas yhtäsuuruus seuraa tiedoista $e_1 \cdot e_2 = 0$ ja $|e_1| = |e_2| = 1$. Yhtälöstä $e_1 \cdot e_2 = 0$ seuraa lisäksi $e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' = 0$ ja yhtälöstä $e_i \cdot e_i = 1$ seuraa

$e'_i \cdot e_i = 0$, joten geodeettisen kaarevuuden lauseke saadaan sievennettyä muotoon

$$\kappa_g = \theta' - e_1 \cdot e'_2.$$

Integraali saa siis toisaalta muodon

$$I = \int_0^{l(\gamma)} (\theta' - \kappa_g) ds.$$

Lauseen todistamiseksi riittää siis näyttää, että $\int_0^{l(\gamma)} \theta' ds = 2\pi$. Tämä tulos tunnetaan kääntyvien tangenttien lauseen ja Hopfin¹ rotaatiolauseen nimellä.

Lause 9.4 (Hopfin rotaatiolause). *Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ yksinkertainen, suljettu, säännöllinen C^2 -polku. Tällöin pätee*

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) \|\gamma'(t)\| dt = \pm 1.$$

Hopfin rotaatiolause on todistettu esimerkiksi kirjan W.Kühnel: Differential Geometry luvussa 2F. Sen todistus vaatii jonkin verran tietoja napakulmafunktioista ja pintojen topologiasta, joten emme voi tässä yhteydessä tarkkaa todistusta käydä läpi.

Tarkastellaan kuitenkin lyhyesti yhtälön $\int_0^{l(\gamma)} \theta' ds = 2\pi$ todistuksen ideaa:

Olkoon $\tilde{\gamma}$ yksinkertainen suljettu käyrä joukossa $\text{int}\gamma$. Tällöin on olemassa perhe sileitä suljettuja käyriä γ^τ , missä $0 \leq \tau \leq 1$, joille pätee $\gamma^0 = \gamma$ ja $\gamma^1 = \tilde{\gamma}$. Tässä oleellista on, että $\text{int}(\pi) \subset U$; muutoin käyräperhettä ei välttämättä ole.

(KUVA)

Integraalin $\int_0^{l(\gamma^\tau)} \theta' ds$ tulisi riippua jatkuvasti parametrasta τ . Lisäksi selvästi γ^τ ja e_1 palaavat alkuperäisiin arvoihinsa kun käyrä γ^τ on kertaalleen kierretty ympäri. Näin ollen integraalin arvo täytyy olla jokin 2π :n monikerta. Näistä kahdesta tiedosta seuraa, että integraalin täytyy itse asiassa olla riippumaton parametrasta τ , sillä väliarvolauseen mukaan jatkuva muuttuja ei voi muuttua yhdestä kokonaisluvusta toiseksi kulkematta välillä

¹Heinz Hopf (1894-1971), saksalainen matemaatikko. Hopf esitti rotaatiolauseen (“Umlaufsatz”) artikkelissa *Über die Rehnung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*, *Compositio Math.* 2, 50-62 (1935).

ei-kokonaislukuarvon kautta. Integraalin $\int_0^{l(\gamma)} \theta' ds$ arvo saadaan siis lasket-
tua korvaamalla käyrä γ jollakin muulla yksinkertaiselle suljetulla käyrällä $\tilde{\gamma}$
sen rajaaman alueen sisällä.

Valitaan käyräksi $\tilde{\gamma}$ parametrisoinnin σ pinnalle välittämä pienen ympyrän
kuva siten, että ympyrä kuuluu alueeseen $\text{int}\pi$. On intuitiivisesti selvää, että

$$\int_0^{\tilde{\gamma}} \theta' ds = 2\pi,$$

sillä

1. e_1 on olennaisesti vakio kaikissa käyrän $\tilde{\gamma}$ pisteissä, sillä ympyrä on
pieni, ja
2. käyrän $\tilde{\gamma}$ tangenttivektori pyörii kulman 2π verran kierrettäessä käyrä
 $\tilde{\gamma}$ kertaalleen ympäri, sillä $\text{int}\tilde{\gamma}$:n voidaan ajatella olevan olennaisesti
osa tasoa, ja tasossa yksinkertaisen suljetun käyrän tangentti pyörii
kulman 2π kun käyrä kierretään kerran.

□

9.2 Gauss–Bonnet’*n* lause monikulmioille

Määritelmä 9.5. Tason \mathbb{R}^2 *käyräviivainen monikulmio* on jatkuva kuvaus
 $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ siten, että jollakin $a > 0$ ja jaolla $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = a$
pätee

- (i) $\pi(t) = \pi(t') \iff t' - t = ka, k \in \mathbb{Z}$
- (ii) $\pi|_{(t_{i-1}, t_i)}$ on sileä kaikilla $i = 1, \dots, n$
- (iii) päätepisteissä t_i on olemassa toispuoleiset derivaatat

$$0 \neq \pi'^-(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{\pi(t) - \pi(t_i)}{t - t_i},$$

$$0 \neq \pi'^+(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{\pi(t) - \pi(t_i)}{t - t_i}$$

ja $\pi'^-(t_i) \nparallel \pi'^+(t_i)$ kaikilla $i = 0, 1, \dots, n$.

Pisteet $\pi(t_i)$ ovat käyräviivaisen monikulmion $|\pi|$ *kärkipisteet* ja kaaret $\pi((t_{i-1}, t_i))$
sen *sivut*.

Sanotaan, että käyräviivainen monikulmio on *positiivisesti suunnistettu*, jos kaikilla t , joille $\pi(t)$ ei ole kärkipiste, pätee: vektori n_s , joka saadaan kiertämällä vektoria $\pi'(s)$ negatiiviseen kiertosuuntaan kulman $\pi/2$ verran, osoittaa alueeseen $\text{int}(\pi)$.

(KUVA)

Olkoon $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllinen sileä pintaelementti ja $\pi : R \rightarrow U$ tason käyräviivainen monikulmio. Tällöin $\gamma = \sigma \circ \pi$ on *pintaelementin σ käyräviivainen monikulmio*. Nyt $\text{int}(\gamma) = \sigma(\text{int}(\pi))$, pisteet $\gamma(t_i)$ ovat kärkipisteet ja $\gamma((t_{i-1}, t_i)) = \sigma(\pi(t_{i-1}, t_i))$ sivut. Koska σ on säännöllinen ja sielä, ovat toispuoleiset derivaatat $\gamma'^-(t_i)$ ja $\gamma'^+(t_i)$ olemassa, ne ovat nollostapoikkeavat ja erisuuntaiset.

Olkoon θ_i^\pm vektoreiden $\gamma'^\pm(t_i)$ ja e_1 välinen kulma ja $\delta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-$ kärkipisteeseen $\gamma(t_i)$ liittyvä *ulkokulma*. Olkoon $\alpha_i = \pi - \delta_i$ vastaava *sisäkulma*. Koska $\gamma'^+ \nparallel \gamma'^-$, niin $\delta_i \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Valitaan lisäksi α_i siten, että $0 \neq \alpha_i \neq 2\pi$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

(KUVA)

Käyräviivainen monikulmio on *parametrisoitu kaarenpituuden suhteen* kun pätee $\|\gamma'\| = 1$ aina kun se on määritelty, eli aina kun $\gamma(t)$ ei ole kärkipiste.

Lause 9.6. *Olkoon γ säännöllisen pintaelementin σ positiivisesti suunnistettu käyräviivainen monikulmio, jolla on n kärkipistettä. Olkoot $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vastaavat sisäkulmat. Tällöin pätee*

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma.$$

Todistus. Vastaavasti kuin lauseen 9.2 todistuksessa saadaan nytkin

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds = \int_0^{l(\gamma)} \theta' ds - \iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma.$$

Riittää siis osoittaa, että

$$\int_0^{l(\gamma)} \theta' ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad (9.2)$$

sillä tällöin

$$\begin{aligned} \int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds &= 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i - \iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma \\ &= 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) - \iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma. \end{aligned}$$

Yhtälö (9.2) nähdään approksimoimalla monikulmiota γ sisältäpäin sileällä käyrällä $\tilde{\gamma}$. Tällöin vastaavaan pisteeseen $\tilde{\gamma}(s)$ liittyvän tangenttivektorin $\tilde{\gamma}'(s)$ ja yksikkövektorin $e_1(s)$ väliselle kulmalle $\tilde{\theta}$ pätee

$$\int_0^{l(\tilde{\gamma})} \tilde{\theta}'(s) ds = 2\pi. \quad (9.3)$$

Koska γ ja $\tilde{\gamma}$ poikkeavat toisistaan vain γ :n kärkipisteiden läheisyydessä, erotus

$$\int_0^{l(\tilde{\gamma})} \tilde{\theta}' ds - \int_0^{l(\gamma)} \theta' ds$$

on n :stä termistä koostuva summa, jossa kukin termi riippuu yhdestä monikulmion kulmasta.

Oletetaan, että pisteen s_i lähellä

$$\gamma(s) \neq \tilde{\gamma}(s) \iff s \in (s_i^a, s_i^b).$$

(KUVVA)

Tällöin kärkipisteeseen $\gamma(s_i)$ liittyvä termi on

$$\int_{s_i^a}^{s_i^b} \tilde{\theta}' ds - \int_{s_i^a}^{s_i} \theta' ds - \int_{s_i}^{s_i^b} \theta' ds.$$

Integraaleista ensimmäinen on vektoreiden $\gamma'(s_i^b)$ ja $\gamma'(s_i^a)$ välinen kulma. Kun $s_i^a, s_i^b \rightarrow s_i$, niin

$$\int_{s_i^a}^{s_i^b} \tilde{\theta}' ds \rightarrow \delta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-.$$

Toisaalta γ on sileä väleillä (s_i^a, s_i) ja (s_i, s_i^b) , joten

$$\int_{s_i^a}^{s_i} \theta' ds, \int_{s_i}^{s_i^b} \theta' ds \rightarrow 0,$$

kun $s_i^a, s_i^b \rightarrow s_i$. Summaamalla yli kaikkien kulmien saadaan

$$\int_0^{l(\tilde{\gamma})} \tilde{\theta}' ds - \int_0^{l(\gamma)} \theta' ds = \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

Sijoittamalla tähän yhtälö (9.3) saadaan haluttu tulos

$$\int_0^{l(\gamma)} \theta' ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \delta_i,$$

mikä todistaa lauseen. □

Koska geodeeseilla $\kappa_g \equiv 0$, saamme seurauksena Gauss–Bonnet’n lauseen käyräviivaisille monikulmioille:

Seuraus 9.7 (Gauss–Bonnet’n lause käyräviivaisille monikulmioille). Olkoon γ käyräviivainen monikulmio, jonka sivut ovat geodeesien kaaria. Tällöin sisäkulmat $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ toteuttavat yhtälön

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi + \iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma.$$

Esimerkki 9.8. 1. Tason kolmion kulmien summa on π , sillä sille pätee $K \equiv 0$ ja $n = 3$, joten Gauss–Bonnet’n lauseesta saadaan

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi.$$

2. Yksikköpallolle $K \equiv 1$. Näin ollen

$$\iint_{\text{int}(\gamma)} K d\mathcal{A}_\sigma = \iint_{\text{int}(\gamma)} d\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}(\text{int}(\gamma)).$$

Gauss–Bonnet’n lause antaa yksikköpallon pinnalla olevalle käyräviivaiselle kolmiolle ABC , jonka kaaret ovat isoympyröiden osia, yhtälön

$$\mathcal{A}(ABC) = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi,$$

eli täsmälleen saman tuloksen kuin lause 6.27.

3. Profilikäyrän $z = \sqrt{1-x^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ pyörähtaessä z -akselin ympäri syntyy pinta, jota kutsutaan *pseudopalloksi*. Sille Gaussin kaarevuus on vakio $K \equiv -1$. Pseudopallon geodeettiselle kolmiolle ABC kolmion kulmien summa on alle π , sillä Gauss–Bonnet’n lause antaa

$$\mathcal{A}(ABC) = \pi - \sphericalangle A - \sphericalangle B - \sphericalangle C.$$

9.3 Gauss-Bonnet'n lause kompakteille pinnoille

Kompaktit pinnat voidaan luokitella seuraavasti:

Lause 9.9. *g -reikäinen torus T_g , $g \in \mathbb{N}$, voidaan varustaa sileän pinnan rakenteella. Vastaavasti jokainen avaruuden \mathbb{R}^3 kompakti pinta on diffeomorfinen jonkin pinnan T_g kanssa.*

Luku g on pinnan *genus*, joka siis tarkoittaa ”reikien lukumäärää“:

T_0 : $g = 0$, pinta on pallo S^2

T_1 : $g = 1$, pinta on torus

T_2 : $g = 2$, pinta on kaksireikäinen torus, $T_2 \hat{=} T_1 \# T_1$

T_3 : $g = 3$, pinta on kolmireikäinen torus, $T_3 \hat{=} T_1 \# T_1 \# T_1$

Määritelmä 9.10. Olkoon S sileä pinta ja $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ sen säännöllinen parametrisointi. Pinnan S *triangulaatio* on kokoelma pinnan käyräviivaisia monikulmioita $\Delta_j = \text{int}\Delta_j \cup \partial\Delta_j \subset \sigma_i(U_i)$ jollakin i siten, että

- (i) $S \subset \cup_j \Delta_j$,
- (ii) $\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset$, kärkipiste tai yhteinen sivu,
- (iii) jokainen sivu on täsmälleen kahden monikulmion yhteinen sivu.

Huom 9.11. Yleensä triangulaatiolla tarkoitetaan yo. ehdot toteuttavaa kokoelmaa kolmikulmioita, kuten nimestäkin jo voi päätellä. Koska tämän luvun tulokset pätevät kuitenkin mistä tahansa monikulmioista muodostetuille jaoille, emme tässä yhteydessä vaadi niiden olevan kolmikulmioita. Huomattakoon, että monikulmiojaosta saadaan aina ehdot toteuttava kolmiojako lisäämällä jokaisen monikulmion keskelle yksi piste ja siitä sivut monikulmion kärkiin (barysentrisen alijako).

Lause 9.12. *Jokaisella kompaktilla pinnalla on triangulaatio, jossa on äärellinen määrä monikulmioita.*

Esimerkki 9.13. Esimerkiksi yksikköpallolle saadaan triangulaatio kahdeksalla käyräviivaisella kolmiolla, kun se jaetaan xy -, yz - ja xz -tasoilla. Toinen triangulaatio, tällä kertaa kuudella käyräviivaisella kolmiolla, saadaan ajatteleamalla pallo ”pullistuneeksi” tetraedriksi. (Kuva 9.2).

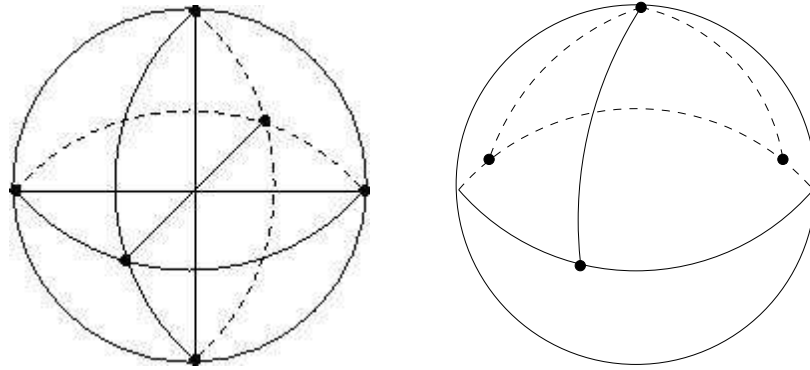


Figure 9.2: Yksikköpallon kaksi triangulaatiota

Määritelmä 9.14. Kompaktin pinnan *Eulerin karakteristika* on luku $\chi = V - E + F$, missä

- V = kärkipisteiden lukumäärä (vertices)
- E = sivujen lukumäärä (edges)
- F = tahkojen lukumäärä (faces)

Esimerkki 9.15. Edellisen esimerkin triangulaatioille saadaan: yksikköpallon triangulaatio kahdeksalla kolmiolla antaa $\chi = V - E + F = 6 - 12 + 8 = 2$ ja kuudella $\chi = V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$.

Lause 9.16 (Gauss-Bonnet'n lause kompakteille pinnoille). *Olkoon $S \mathbb{R}^3:n$ kompakti pinta. Tällöin kaikilla triangulaatioilla pätee*

$$\iint_S K d\mathcal{A} = 2\pi\chi,$$

missä χ on triangulaation Eulerin karakteristika.

Huom 9.17. Integraali $\iint_S K d\mathcal{A}$ tulkitaan seuraavasti: Olkoon $\{P_i\}$ pinnan S triangulaatio. Tällöin $P_i = \sigma_i(R_i)$ jollakin $R_i \in U_i$, kun (σ_i, U_i) on osa pinnan S kartastoa. Määritellään

$$\iint_S K d\mathcal{A} = \sum_i \iint_{R_i} K d\mathcal{A}_{\sigma_i}. \quad (9.4)$$

Osoitetaan, että määritelmä on järkevä, eli että yhtälö (9.4) on riippumaton triangulaation ja parametrisointien (σ_i, U_i) valinnasta:

Olkoon $\tilde{\sigma}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisaation σ_i uudelleenparametrisointi. Jos $P_i = \tilde{\sigma}_i(\tilde{R}_i)$, missä $\tilde{R}_i \subset \tilde{U}_i$, niin

$$\iint_{R_i} K d\mathcal{A}_{\sigma_i} = \iint_{\tilde{R}_i} K d\mathcal{A}_{\tilde{\sigma}_i},$$

sillä sekä pinta-alaelementti $d\mathcal{A}_\sigma$ että Gaussin kaarevuus K ovat riippumattomia parametrisoinnista.

Olkoon $\{P_i\}$ ja $\{P'_i\}$ kaksi pinnan S triangulaatioita. Tällöin voidaan löytää pinnalle S kolmas triangulaatio $\{P''_i\}$ siten, että jokainen P_i on yhdiste joistakin monikulmioista P''_k , samoin jokainen P'_i .

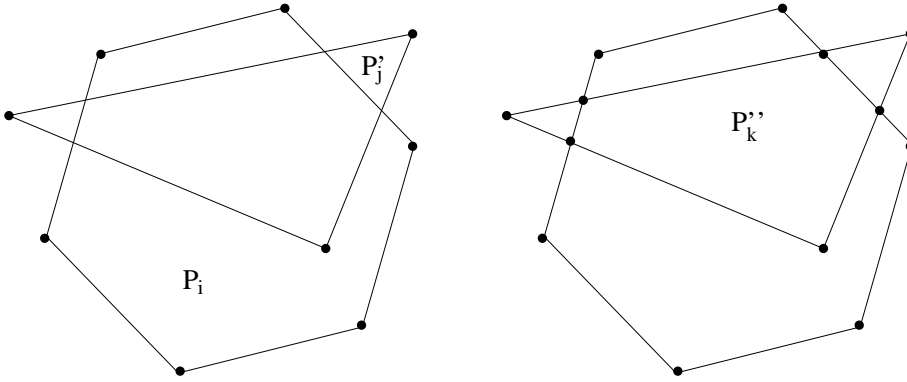


Figure 9.3: Kolmannen triangulaation muodostaminen kahdesta edellisestä

Selvästi

$$\sum_i \iint_{R_i} K d\mathcal{A}_{\sigma_i} = \sum_k \iint_{R''_k} K d\mathcal{A}_{\sigma''_k} = \sum_j \iint_{R'_j} K d\mathcal{A}_{\sigma'_j},$$

sillä keskimääräinen lauseke on K :n integraali yli äärellisen monen monikulmion, joista jokainen kuuluu yhteen pintaelementtiin. Kaksi monikulmiota kohtaa joko yhteisellä sivulla tai yhteisessä kärjessä tai ei lainkaan. Näin ollen integraali on riippumaton parametrisaatiosta.

Seuraus 9.18. Eulerin karakteristika on riippumaton pinnan triangulaatiosta; se riippuu vain pinnasta itsestään.

Lauseen 9.16 todistus. Olkoon $\{P_i\}$ pinnan S triangulaatio siten, että $P_i = \sigma_i(R_i)$, $R_i \subset U_i$, kaikilla i , kun $\{(\sigma_i, U_i)\}$ on pinnan S kartasto. Lauseen 9.6 mukaan

$$\iint_{R_i} K d\mathcal{A}_{\sigma_i} = \angle_i - (n_i - 2)\pi + \int_0^{l(\gamma_i)} \kappa_g ds,$$

missä n_i on monikulmion P_i kärkipisteiden lukumäärä, $\gamma_i = \partial P_i$ (pos. kiertosuuntaan) ja \angle_i on monikulmion P_i sisäkulmien summa. Näin ollen

$$\begin{aligned} \iint_S K d\mathcal{A} &= \sum_i \iint_{R_i} K d\mathcal{A}_{\sigma_i} \\ &= \sum_i \angle_i - \sum_i (n_i - 2)\pi + \sum_i \int_0^{l(\gamma_i)} \kappa_g ds. \end{aligned}$$

Termeistä ensimmäinen, $\sum_i \angle_i$, on kaikkien monikulmioiden sisäkulmien yhteenlaskettu summa. Jokaisessa kärkipisteessä kohtaa useita monikulmioita, mutta joka tapauksessa yhteen kärkipisteeseen liittyvien sisäkulmien summa on aina 2π . Näin ollen

$$\sum_i \angle_i = 2\pi V,$$

missä V on kärkipisteiden lukumäärä. Toiselle termille pätee

$$\sum_i (n_i - 2)\pi = \left(\sum_i n_i \right) \pi - 2\pi F = 2\pi E - 2\pi F,$$

sillä monikulmiossa kärkipisteiden lukumäärä n_i on sama kuin sivujen lukumäärä, ja summassa $\sum_i n_i$ jokainen triangulaation sivu tulee laskettua kahdesti, koska yksi sivu on kuuluu aina täsmälleen kahteen monikulmioon. Lisäksi

$$\sum_i \int_0^{l(\gamma_i)} \kappa_g ds = 0,$$

sillä tässä integroidaan kahdesti jokaisen triangulaation sivun yli, kerran kumpaakin suuntaan, ja κ_g vaihtaa etumerkkiä polun kulkusuunnan vaihtuessa. Olemme siis saaneet

$$\begin{aligned} \iint_S K d\mathcal{A} &= \sum_i \iint_{R_i} K d\mathcal{A}_{\sigma_i} \\ &= \sum_i \angle_i - \sum_i (n_i - 2)\pi + \sum_i \int_0^{l(\gamma_i)} \kappa_g ds \\ &= 2\pi V - (2\pi E - 2\pi F) + 0 \\ &= 2\pi\chi. \end{aligned}$$

□

Esimerkki 9.19. Yksikköpallolle $\chi = 2$, joten Gauss–Bonnet'n lauseen mukaan

$$\iint_{S^2} K d\mathcal{A} = 4\pi.$$

Tämä ei tietenkään ole yllätys, sillä tiedämme, että $K \equiv 1$ ja pallon pinta-ala on 4π . Mutta mitä tapahtuu, kun palloa venytellään?

Olkoon yksikköpallolla triangulaatio, jossa kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärät ovat V , E ja F . Jos palloa nyt venytellään miten tahansa, sitä kuitenkin repimättä, triangulaation monikulmiot venyvät mukana. Lukumäärät V , E ja F kuitenkin säilyvät, joten Eulerin karakteristika säilyy. Venytettäessä pinnan Gaussin kaarevuus muuttuu, ja se voi tulla hyvinkin hankalaksi laskea. Yhtälö

$$\iint_S K d\mathcal{A} = 4\pi$$

kuitenkin pätee edelleen!

Lause 9.20. g -reikäisen toruksen T_g Eulerin karakteristika on $2 - 2g$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Kun $g = 0$, kyseessä on pallo, ja sille pätee $\chi = 2$.

Kun $g = 1$, kyseessä on tavallinen torus. Se voidaan muodostaa tason neliöstä identifioimalla vastakkaiset sivut. Jakamalla neliön 3×3 pikkuneliöksi ja jakamalla nämä pikkuneliöt lävistäjensä suunnassa kahtia, saamme torukselle triangulaation kolmioilla (kuva 9.4). Triangulaatiolle pätee $V = 9$, $E = 27$ ja $F = 18$. Näin ollen

$$\chi(T_1) = 9 - 27 + 18 = 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2g.$$

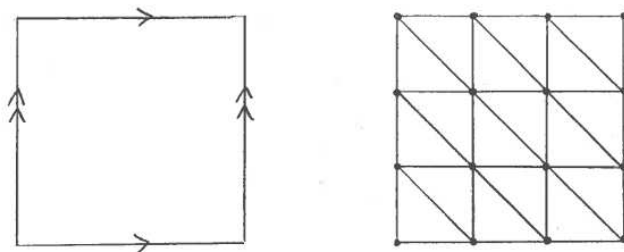
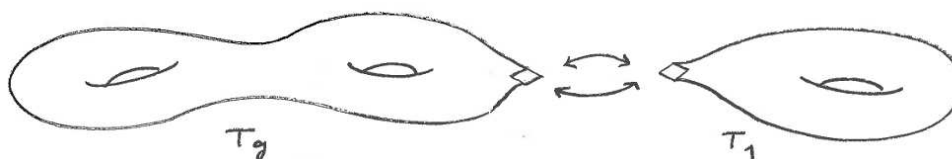


Figure 9.4: Torus ja sen eräs triangulaatio

Oletetaan, että väite pätee torukselle T_g .

Figure 9.5: $T_{g+1} = T_g \# T_1$

Torus T_{g+1} saadaan liimaamalla torukseen T_g kopio toruksesta T_1 : leikataan kummastakin pois käyräviivainen n -kulmio ja liimataan leikatut sivut yhteen (kuva 9.5).

Olkoon kärkien, sivujen ja tahkojen lukumäärät toruksen T_1 triangulaatiossa V' , E' ja F' ja toruksen T_g triangulaatiossa V'' , E'' ja F'' . Yhteenliimatussa toruksella T_{g+1} on nyt triangulaatio, jolle

$$\begin{aligned} V &= V' + V'' - n \\ E &= E' + E'' - n \\ F &= F' + F'' - 2. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \chi(T_{g+1}) &= V - E + F \\ &= (V' + V'' - n) - (E' + E'' - n) + (F' + F'' - 2) \\ &= \chi(T_g) + \chi(T_1) - 2 \\ &= 2 - 2g + 0 - 2 \\ &= 2 - 2(g + 1), \end{aligned}$$

missä toiseksi viimeinen yhtäsuuruus seurasi induktio-oletuksesta $\chi(T_g) = 2 - 2g$.

□

Seuraus 9.21. Torukselle T_g pätee

$$\iint_{T_g} K \, d\mathcal{A} = 4\pi(1 - g).$$

Hakemisto

- apinan satula, 90
- Darbouxin yhtälöt, 35
- elliptinen piste, 90
- ensimmäinen perusmuoto, 61
- Eulerin karakteristika, 118
- Eulerin lause, 84
- Frenet-käyrä, 21, 35
- Frenet-kaarevuus, 36
- Frenet-kehys, 21, 35, 36
- Frenet-yhtälöt, 22, 36
- Gauss–Bonnet’n lause
 - käyräviivaisille monikulmioille, 116
 - käyrille, 109
 - kompakteille pinnoille, 118
- Gaussin kaarevuus, 95
- Gaussin kuvaus, 86
- geodeesi, 100
- geodeettinen kaarevuus, 32, 77
- geodeettiset yhtälöt, 101
- Hopfin rotaatiolause, 112
- hyperbolinen piste, 90
- isometria, 64
- isoperimetrinen epäyhtälö, 39
- jäykkä liike, 15
- Jordanin käyrälause, 37
- käänteiskuvauslause, 58
- kääntyvien tangenttien lause, 112
- käyrä, 9
 - käyrän parametrisointi, 10
 - yksinkertainen suljettu käyrä, 38
- käyräviivainen monikulmio, 113
- kaarenpituuselementti, 61
- kaarevuus, 13
 - geodeettinen kaarevuus, 32
 - suunnattu kaarevuus, 14
- kaltevuussuora, 33
- kartasto, 48
- karttakuvaus, 48
- keskikaarevuus, 95
- konformikuvaus, 67
- konvekssi käyrä, 42
- koskettavan pallon lause, 29
- kosketustaso, 28
- kulmanopeus, 35
- liittospiraali, 35
- lokaali esitys, 52
- lokaali kanoninen muoto, 28
- Möbiuksen nauha, 54
- metriikka, 62
- metrinen tensori, 63
- muoto-operaattori, 87
- napapiste, 83
- neljän kärkipisteen lause, 44
- normaalikaarevuus, 77
- normaalisektio, 78
- normaalitaso, 28
- pääkaarevuus, 80
- pääkaarevuussuunta, 81
- pallokäyrä, 30

- parabolinen piste, 90
- pinta, 47
 - sileä pinta, 50
 - suunnistuva pinta, 54
- pituus, 10
- polku, 9
 - säännöllinen polku, 9
 - yksinkertainen suljettu polku, 37
- projektiokäyrä, 28
- pseudopallo, 116
- pyörähdyspinta, 57

- säännöllinen parametrisointi, 50
- sileä kuvaus, 52
- sileä pinta, 50
- standardi yksikkönormaali, 54
- stereografinen projektio, 70
- suoristava taso, 28
- suunnistettu pinta-ala, 100
- suunnistus, 109
- suunnistuva pinta, 54

- tangenttiavaruus, 53
- tasopiste, 90
- toinen perusmuoto, 76
- torsio, 22
- transitiokuvaus, 49
- triangulaatio, 117

- viivoitinpinta, 56

- Weingartenin kuvaus, 87
- Wirtingerin epäyhtälö, 39

- yksinkertainen suljettu käyrä, 38, 109
- yksinkertainen suljettu polku, 37
- yleistetty kartio, 56, 64
- yleistetty sylinteri, 64