

Differentiaali- ja integraalilaskenta 3

Riikka Kangaslampi

March 20, 2018

Esipuhe

Tämä on Aalto-yliopiston Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksen kurssin Differentiaali- ja integraalilaskenta 3 luentomoniste.

Kurssi käsittelee avaruusintegraaleja ja vektorikenttiä. Esitietoina oletetaan, että opiskelija osaa laskea kaksiulotteisia integraaleja ja derivoi usean muuttujan funktioita.

Moniste perustuu osin aiemman kurssin Matematiikan peruskurssi S2 luentomonisteeseen, jota olivat koonneet lisäksi Matias Dahl ja Aapo Pulkkinen. Pallokoordinaatiston yksikkövektoreita käsittelevä alaluku on peräisin Pekka Alestalon luentomuistiinpanoista, kiitos siitä. Suurin osa materiaalista on kuitenkin uutta, tätä kurssia varten laatimaani. Kuvat ovat minun piirtämiäni, suurin osa käsin, loput Mathematicalla.

Moniste on tarkoitettu luentojen tueksi, ei itseopiskeluun, sillä se on paikoin hyvin lyhytsanainen. Luentomonisteen rinnalla on tarkoitus lukea kirjaa Adams-Essex: Calculus, A Complete Course, joka avaa asioita laajemmin. Tähdellä merkityt luvut ovat lisämateriaalia, joihin voi perehtyä, mikäli aikaa ja kiinnostusta on.

Tervetuloa avaruuksiin ja vektorikentille!

Otaniemessä, 20. maaliskuuta 2018,

Riikka Kangaslampi

Sisältö

Esipuhe	3
Sisältö	5
1. Usean muuttujan funktioiden integrointi	7
1.1 Avaruusintegraali	7
1.2 Sylinterikoordinaatisto	13
1.3 Pallokoordinaatisto	15
1.4 Pinnan ala *	19
1.5 Massat ja momentit *	21
2. Vektorikentät	25
2.1 Vektorikentät ja kenttäviivat	25
2.2 Vektorikenttä napakoordinaateissa	28
2.3 Konservatiiviset kentät	30
2.4 Tasapotentialipinnat ja -käyrät	32
2.5 Lähde, nielu ja dipoli	33
3. Viiva- ja pintaintegraalit	37
3.1 Käyrät	37
3.2 Funktion viivaintegraali	40
3.3 Vektorikentän viivaintegraali	42
3.4 Parametrisoidut pinnat	46
3.5 Funktion pintaintegraali	49
3.6 Suunnistetut pinnat	51
3.7 Vektorikentän pintaintegraali eli vuointegraali	54
4. Vektorianalyysi	59
4.1 Gradientti, divergenssi ja roottori	59
4.2 Laskusääntöjä gradientille, divergenssille ja roottorille	65

4.3	Gaussin lause	68
4.4	Greenin lause	72
4.5	Stokesin lause	77
4.6	Maxwellin yhtälöt *	79
4.7	Käyräviivaiset koordinaatistot	85
4.8	∇ , $\nabla \cdot$ ja $\nabla \times$ ortog. käyräviivaisissa koordinaatistoissa . . .	89
	Hakemisto	93

1. Usean muuttujan funktioiden integrointi

1.1 Avaruusintegraali

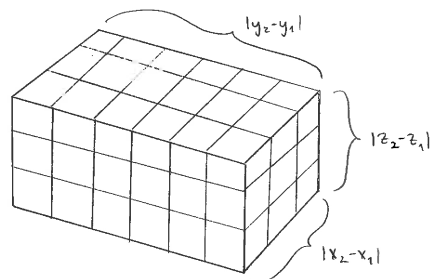
Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ kappale ja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Halutaan määrittellä

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \underline{\text{avaruusintegraali}} \text{ kappaleen } D \text{ yli.}$$

Idea: Tasointegraali osataan jo laskea, joten lisätään vain yksi dimensio mukaan samalla tavalla kuin edelliset.

Vaihe 1: Oletetaan, että D on suorakulmainen särmiö

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2], z \in [z_1, z_2]\} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2].$$



Jaetaan D :n kaikki särmät tasavälisesti n osaan, jolloin D jakautuu n^3 suorakulmaiseen särmiöön. Tällöin integraali saadaan raja-arvona

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n^3} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta V_i,$$

missä (x_i^*, y_i^*, z_i^*) on i :nnen suorakulmaisen särmiön keskipiste ja ΔV_i on i :nnen särmiön tilavuus.

Vaihe 2: Jos $D \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu (mutta ei suorakulmainen särmiö), niin määritellään

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_{\hat{D}} \hat{f}(x, y, z) dV,$$

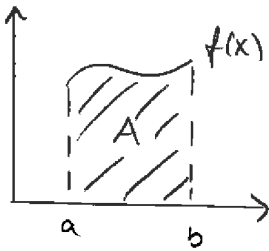
missä \widehat{D} on suorakulmainen särmiö ja $D \subset \widehat{D}$ ja

$$\widehat{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{kun } (x, y, z) \in D \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Huom. Vastaavasti kuin yksi- ja kaksiulotteisessa tapauksessa (kun $D \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu)

$$\iiint_D 1 \, dV = D\text{:n tilavuus.}$$

Huom. Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x) dx =$ käyrän $y = f(x)$ ja x -akselin rajoittama pinta-ala välillä $[a, b]$.



Jos $f(x, y) \geq 0$, niin $\iint_D f(x, y) dA$ on pinnan $z = f(x, y)$ ja (x, y) -tason alueen D rajoittama tilavuus.



Samoin $\iiint_D f(x, y, z) dV$ on sen nelikulotteisen kappaleen tilavuus, jota rajoittaa hyperpinta $w = f(x, y, z)$ ja kolmiulotteinen ”pohja” D . Käytännöllisempiä tulkintoja seuraa kuitenkin sovelluksista.

Esim. 1. Jos $f(x, y, z)$ on kappaleen massajakauma (paikallinen tiheys, yksikkönä kg/m^3) jossakin kappaleessa D , niin $\iiint_D f(x, y, z) dV$ on D :n kokonaismassa.

Huom. Avaruusintegraalille pätee samat laskukaavat kuin tasointegraalille, esim.

$$\iiint_D C f(x, y, z) dV = C \iiint_D f(x, y, z) dV,$$

kun C on vakio.

Huom. Avaruusintegraali voidaan laskea myös iteroituna integraalina!

Esim. 2. Olkoon $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$ ja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Tällöin

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x, y, z) dz dy dx = \int_0^c \int_0^a \int_0^b f(x, y, z) dy dx dz = \dots$$

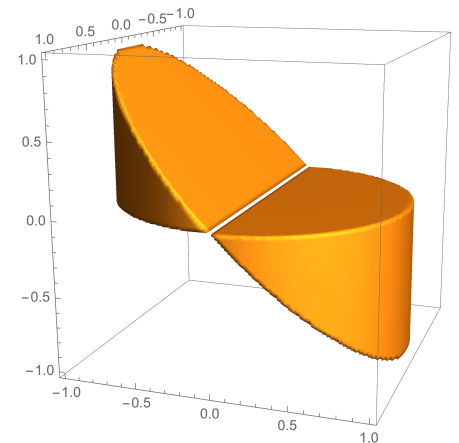
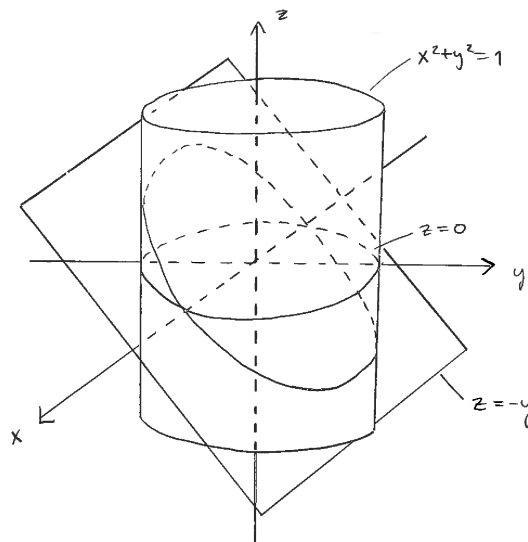
Integroinnin voi suorittaa $3! = 6$ eri järjestyksessä. Integroimisjärjestyksellä ei ole lopputuloksen kannalta väliä, mutta laskujen vaikeuteen se voi vaikuttaa ratkaisevasti.

Huom. Iteroituna integraalina voidaan laskea tätäkin korkeampiulotteiset integraalit

$$\iiint \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

vastaavalla tavalla, muuttuja kerrallaan edeten.

Esim. 3. Lasketaan pintojen $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ ja $z = -y$ rajoittaman kappaleen tilavuus.



Kappale koostuu kahdesta samanmuotoisesta kiilasta, joten riittää laskea näistä toisen tilavuus ja kertoa kahdella.

Toisen kiilan pohja on $z = 0$ tasossa alue

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [0, -\sqrt{1-x^2}]\}$$

ja ”katto” on pinta $z = -y$. Kiila on siis kappale

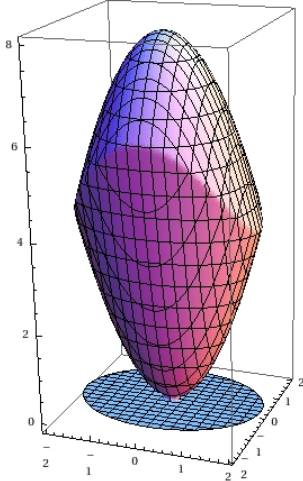
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-1, 1], y \in [0, -\sqrt{1-x^2}], z \in [0, -y]\}.$$

Koko kappaleen tilavuus on siten

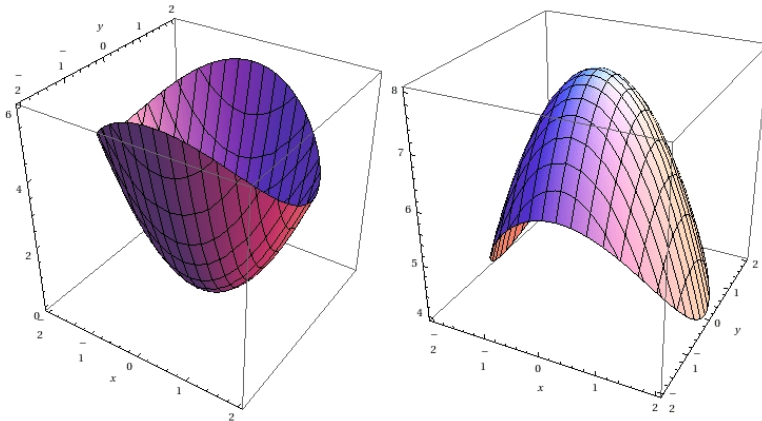
$$\begin{aligned} 2 \iiint_D 1 \, dV &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{-y} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 (-y) \, dy \, dx = 2 \int_{-1}^1 \left|_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \left(-\frac{1}{2}y^2\right) \, dx \right. \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-x^2) \, dx = 2 \left|_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \right. = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Esim. 4. Lasketaan sen kappaleen D tilavuus, jota rajaavat pinnat $z = x^2 + 3y^2$ ja $z = 8 - x^2 - y^2$.

Kappale näyttää tältä:



Sitä rajaavat ala- ja yläpinnat:



Etsitään ensin integrointirajat. Pinnat leikkaavat toisensa, kun

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Leikkauskäyrän projektio (x, y) -tasoon on siis ellipsi ja koko kappaleen D projektio (x, y) -tasoon on tämän ellipsin sisäpuoli

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2], y \in [-\sqrt{2-x^2/2}, \sqrt{2-x^2/2}]\}. \end{aligned}$$

Tämä R on siten alue, jonka yli integroidaan muuttujien x ja y suhteen.

Jokaisessa pisteessä $(x, y) \in R$ kappale ulottuu nyt siis pinnalta $z = x^2 + 3y^2$ pinnalle $z = 8 - x^2 - y^2$ ja siten kappaleen tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dz \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{2-x^2/2}}^{\sqrt{2-x^2/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{2-x^2/2}}^{\sqrt{2-x^2/2}} (8-2x^2-4y^2) \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \left| \int_{-\sqrt{2-x^2/2}}^{\sqrt{2-x^2/2}} (8y-2x^2y-\frac{4}{3}y^3) \, dy \right| \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(2(8-2x^2)\sqrt{2-x^2/2} - \frac{8}{3}(2-x^2/2)^{3/2} \right) \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(8(2-x^2/2)^{3/2} - \frac{8}{3}(2-x^2/2)^{3/2} \right) \, dx = \int_{-2}^2 \frac{4\sqrt{2}}{3}(4-x^2)^{3/2} \, dx. \end{aligned}$$

Tehdään nyt muuttujanvaihto $x = 2 \sin(u)$, jolloin $dx = 2 \cos(u) \, du$ ja integrointirajat muuttuvat $x = -2 \Rightarrow u = -\pi/2$ ja $x = 2 \Rightarrow u = \pi/2$. Tällöin

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4-4\sin^2(u))^{3/2} 2 \cos(u) \, du \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 4^{3/2} \cdot 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2(u))^{3/2} \cos(u) \, du = \frac{64\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(u) \, du. \end{aligned}$$

Nyt kaksinkertaisen kulman kaavalla saadaan

$$\begin{aligned} \cos^4(u) &= \frac{1}{2^2} (1 + \cos(2u))^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos(2u) + \cos^2(2u)) \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos(2u) + \frac{1}{2} (1 + \cos(4u))) = \frac{1}{8} (3 + 4 \cos(2u) + \cos(4u)) \end{aligned}$$

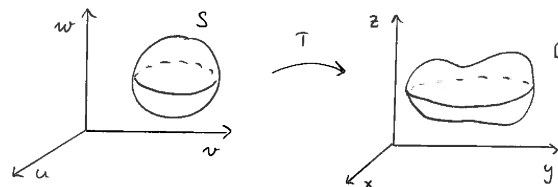
ja siten

$$V = \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 + 4 \cos(2u) + \cos(4u)) \, du = \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot 3 \cdot \pi = 8\sqrt{2}\pi.$$

Muuttujanvaihto avaruusintegraaleissa

Muuttujanvaihto yleistyy tasointegraaleista suoraan avaruusintegraaleihin ja vielä korkeampiulotteisiin integraaleihinkin.

Olkoon $S, D \subset \mathbb{R}^3$ kappaleita ja $T : S \rightarrow D$ bijektio.



Merkitään $T(u, v, w) = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}$. Jos f on funktio $D \rightarrow \mathbb{R}$, niin muuttujanvaihtokaava avaruusintegraalille on

$$\boxed{\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \iiint_S f \circ T(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw.}$$

Merkintä $f \circ T(u, v, w)$ tarkoittaa yksinkertaisesti funktiota kirjoitettuna uusilla muuttujilla, ja muunnoksen suurennussuhde $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$ saadaan Jacobin determinantin

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

avulla.

Esim. 5. Lasketaan integraali

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz.$$

Integraali voitaisiin toki laskea suoraankin, mutta muutetaan se harjoituksen vuoksi vielä yksinkertaisempaan muotoon: tehdään muuttujanvaihto $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ ja $w = \frac{z}{3}$. Nyt (x, y, z) -avaruuden integrointialue on

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [y/2, y/2 + 1], y \in [0, 4], z \in [0, 3]\}.$$

Uusi integrointialue saadaan tästä:

$$\begin{aligned} x = \frac{y}{2} &\Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ x = \frac{y}{2} + 1 &\Leftrightarrow \frac{2x - y}{2} = 1 \Leftrightarrow u = 1 \\ y = 0 &\Leftrightarrow v = 0 \\ y = 4 &\Leftrightarrow v = 2 \\ z = 0 &\Leftrightarrow w = 0 \\ z = 3 &\Leftrightarrow w = 1. \end{aligned}$$

ja siten uusi integrointialue on

$$S = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in [0, 1], v \in [0, 2], w \in [0, 1]\}.$$

Muuttujanvaihdon Jacobin determinantti on

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Siten haluttu integraali on

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w) 6 du dv dw \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w \right) dv dw = 6 \int_0^1 2 \left(\frac{1}{2} + w \right) dw = 12. \end{aligned}$$

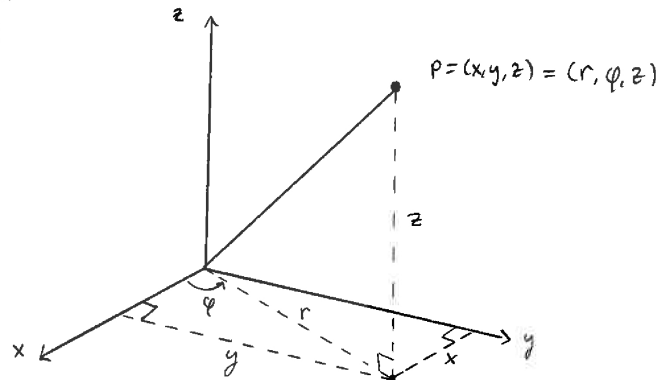
1.2 Sylinterikoordinaatisto

Kolmiulotteisessa sylinterikoordinaatistossa koordinaatit ovat

r = pisteen etäisyys z -akselista = (x, y) -tasoon projisoidun pisteen etäisyys origosta.

ϕ = (x, y) -tasoon projisoidun pisteen ja x -akselin välinen kulma.

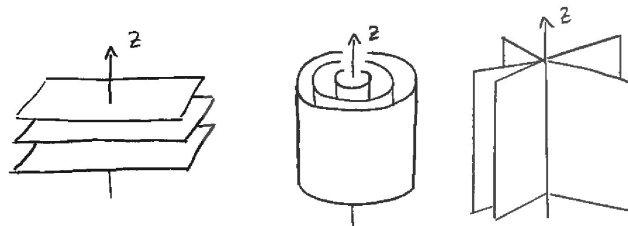
z = ”korkeus” = etäisyys (x, y) -tasosta.



Sylinterikoordinaattien ja karteesisten koordinaattien välinen yhteys:

$$\begin{cases} x = r \cos(\phi) \\ y = r \sin(\phi) \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, & r \in [0, \infty) \\ \phi = \arctan(y/x), & \phi \in [0, 2\pi) \\ z = z, & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

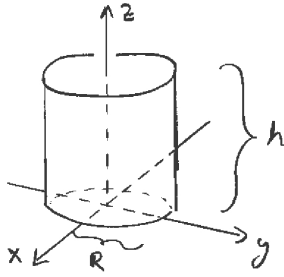
Huom. Pinnat $z = \text{vakio}$ ovat tasoja, jotka ovat (x, y) -tason suuntaisia tasoja. Pinnat $r = \text{vakio}$ ovat sylintereitä z -akselin ympärillä. Pinnat $\phi = \text{vakio}$ ovat (x, y) -tasoa vastaan kohtisuoria tasoja, jotka päättyvät z -akseliin.



Lasketaan Jacobin determinanti sylinterikoordinaateille:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) = r. \end{aligned}$$

Esim. 6. Lasketaan sylinterin D tilavuus.



Sylinterikoordinaateissa D :n esitys on $S = \{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, R], \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, h]\}$. Kappaleen D tilavuus on siten

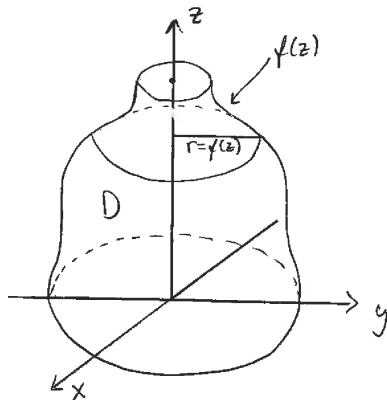
$$V = \iiint_D 1 \, dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R 1|r| \, dr \, d\phi \, dz = \pi h R^2.$$

Yhteenvedo: Integraali $\iiint_D f(x, y, z) \, dV$ muunnetaan sylinterikoordinaatteihin seuraavasti:

1. Esitä f ja D sylinterikoordinaateissa.
2. Korvaa $dx \, dy \, dz \rightarrow r \, dr \, d\phi \, dz$.
3. Aseta integroimisrajat (= D :n esitys sylinterikoordinaateissa).

Esim. 7. Pyörähdyskappale.

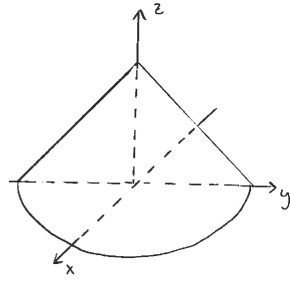
Olkoon $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ funktio ja $f(z) \geq 0$. Tällöin f määrää pyörähdyskappaleen, joka saadaan kun käyrä $y = f(z)$ pyörähtää z -akselin ympäri. Lasketaan seuraavaksi syntyvän kappaleen D tilavuus.



Kappaleen esitys sylinterikoordinaateissa on $\{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, f(z)], \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, h]\}$. Tilavuus on tällöin

$$V = \iiint_D 1 \, dV = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} r \, dr \, d\phi \, dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f(z)^2 \, d\phi \, dz = \pi \int_0^h f(z)^2 \, dz.$$

Esim. 8. Jos tarkastellaan pyörähdyskappaletta, kun $f(z) = 1-z$ ja $h = 1$, saadaan ympyräkartio.



Sen tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 (1 - z)^2 dz = \pi \Big|_0^1 \left(z - z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right) = \frac{\pi}{3}.$$

(Muistetaan, että ympyräkartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, joten oikein meni.)

Harjoitus 9. Paraabelin $y = 1 - z^2$ ja z -akselin rajoittama alue pyörähtää z -akselin ympäri. Mikä on näin syntyvän kappaleen tilavuus? (Vast. $\frac{16}{15}\pi$.)

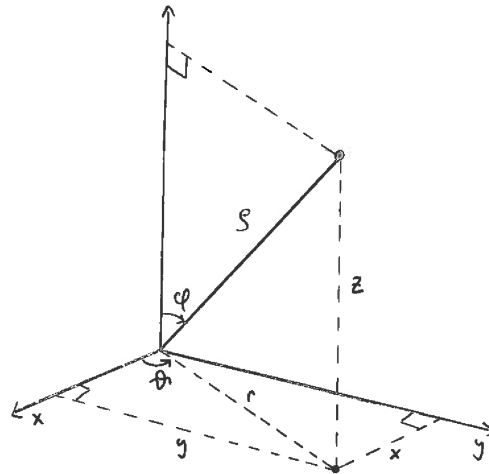
1.3 Pallokoordinaatisto

Pallokoordinaateissa koordinaatit ovat

ρ = etäisyys origosta. (ρ = rho)

ϕ = pisteen paikkavektorin ja positiivisen z -akselin välinen kulma. (ϕ = phi)

θ = (x, y) -tasoon projisoidun pisteen paikkavektorin ja positiivisen x -akselin välinen kulma. (θ = theta)



Pallokoordinaattien ja karteesisten koordinaattien välinen yhteys saadaan kahdesta kuvan suorakulmaisesta kolmiosta:

$$\begin{cases} \sin(\phi) = \frac{r}{\rho} \\ \cos(\phi) = \frac{z}{\rho} \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \sin(\theta) = \frac{y}{r} \\ \cos(\theta) = \frac{x}{r} \end{cases}.$$

Saadaan siis

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi), \end{cases}$$

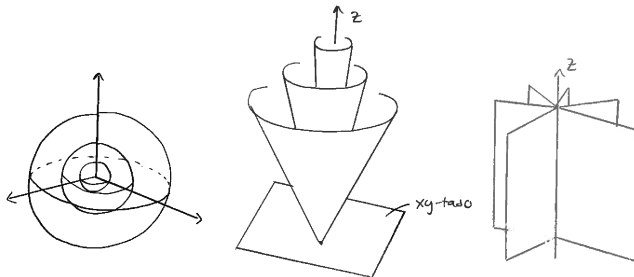
missä

$$\rho \in [0, \infty)$$

$$\phi \in [0, \pi)$$

$$\theta \in [0, 2\pi).$$

Huom. Pallokoordinaateissa pinnat $\rho = \text{vakio}$ ovat origokeskisiä pallokuoria. Pinnat $\phi = \text{vakio}$ ovat äärettömien kartioiden kuoria. Pinnat $\theta = \text{vakio}$ ovat (x, y) -tasoa vastaan kohtisuoria tasoja, jotka päättyvät z -akseliin:



Huom. Jacobin determinantti pallokoordinaateille on

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \rho \cos(\phi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \cos(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos(\phi) \begin{vmatrix} \rho \cos(\phi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \rho \cos(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \end{vmatrix} + \rho \sin(\phi) \begin{vmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \cos(\phi) (\rho^2 \sin(\phi) \cos(\phi)) + \rho \sin(\phi) (\rho \sin^2(\phi)) = \rho^2 \sin(\phi). \end{aligned}$$

Saatiin siten

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} \right| = \rho^2 \sin(\phi),$$

sillä $\phi \in [0, \pi)$ ja siten $\sin(\phi) \geq 0$.

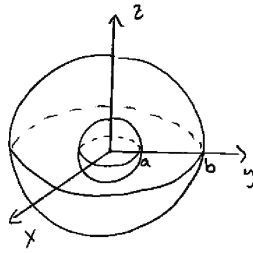
Tilavuuden muunnossuhteen voi toki selvittää myös geometrisesti tarkastelemalla, millaisen tilavuuden muutoksen muuttujien ρ , θ ja ϕ muutokset saavat aikaan.

Huom. Käytetään jatkossa säteelle ρ :n sijaan kirjainta r .

Esim. 10. Lasketaan onton kuulan

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq b\}$$

tilavuus.



Kappaleen D esitys pallokoordinaateissa on

$$S = \{(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [a, b], \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Kappaleen D tilavuus on siten

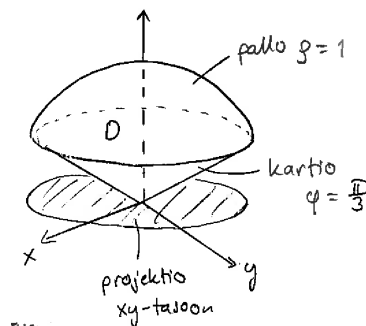
$$\begin{aligned} \iiint_D 1 \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b 1 \cdot r^2 \sin(\phi) \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \cdot \int_0^\pi \sin(\phi) \, d\phi \cdot \int_a^b r^2 \, dr = 2\pi \cdot \left(\int_0^\pi (-\cos(\phi)) \right) \cdot \left(\int_a^b \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3). \end{aligned}$$

Huomataan, että tulokseksi saadaan tietysti b säteisen pallon tilavuus $\frac{4}{3}\pi b^3$, josta on vähennetty a säteisen pallon tilavuus $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Yhteenvedo: Integraali $\iiint_D f(x, y, z) \, dV$ muunnetaan pallokoordinaatteihin seuraavasti:

1. Esitä f ja D pallokoordinaateilla.
2. Korvaa $dV = r^2 \sin(\phi) \, dr \, d\phi \, d\theta$.
3. Aseta integroimisrajat (= D :n esitys pallokoordinaateissa).

Esim. 11. Lasketaan jäätelötötterön D tilavuus. Tarkastellaan kappaletta D , jonka kartio $\varphi = \frac{\pi}{3}$ leikkaa pallosta $r = 1$.



Kappaleen D esitys pallokoordinaateissa on

$$S = \{(r, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1], \phi \in [0, \frac{\pi}{3}], \theta \in [0, 2\pi)\}$$

ja siten kappaleen tilavuus on

$$\begin{aligned} \iiint_D 1 \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin(\phi) \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} \Big|_0^{\pi/3} (-\cos(\phi)) = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Pallokoordinaatiston yksikkövektorit *

Pallokoordinaatiston yksikkövektoreiksi halutaan kussakin pisteessä kolme vektoria \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ ja \mathbf{e}_φ , jotka kukin osoittavat kyseisen muuttujan kasvusuuntaan. Projisoimalla xy -tasoon voidaan päätellä, että

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

Yksikkövektorin \mathbf{e}_r täytyy osoittaa suoraan pois päin origosta, joten

$$\mathbf{e}_r = \sin \varphi \cos \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \varphi \mathbf{k}.$$

Näiden vektoritulona saadaan kolmas yksikkövektori:

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_r = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{i} + \cos \varphi \sin \theta \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{k}.$$

Nyt $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$ on jokaisessa joukon $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ pisteessä ortonormaali kanta. Lisäksi tässä järjestyksessä lueteltuna kanta on oikeakätinen.

Esim. 12. Helsingin sijaitsee noin leveyspiirillä 60° ja pituuspiirillä 25° , joten jos origo sijoitetaan maan keskipisteeseen, z -akseli napojen välille ja $y = 0$ -taso Greenwichin läpi, saadaan Helsingin pallokoordinaattikulmiksi

$$\begin{cases} \varphi_0 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \\ \theta_0 = 25^\circ. \end{cases}$$

Jos nyt otetaan yksikkövektorin \mathbf{e}_{θ_0} suunta suoraan itään, milloin ollaan päiväntasaajalla?

Idea: Kuljetaan Maan pinnalla pitkin isoympyrää, jonka normaali on $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{\theta_0} = -\mathbf{e}_{\varphi_0}$. Muodostetaan tason yhtälö normaalin avulla ja lasketaan tason ja päiväntasaajan ($\varphi = \pi/2$) leikkauspisteen θ -koordinaatti.

Lasketaan siis ensin isoympyrän tason normaali

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{\theta_0} &= -\mathbf{e}_{\varphi_0} \\ &= \cos(30^\circ) \cos(25^\circ) \mathbf{i} + \cos(30^\circ) \sin(25^\circ) \mathbf{j} - \sin(30^\circ) \mathbf{k} \\ &= 0,785 \mathbf{i} + 0,366 \mathbf{j} - 0,5 \mathbf{k} \end{aligned}$$

Saadaan tasolle yhtälö

$$0,785x + 0,366y - 0,5z = 0.$$

Päiväntasaajalla $z = 0$, joten $y = -2,145x$, eli

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} + 180^\circ \approx 115^\circ.$$

Päiväntasaajalle saavutaan siis Borneossa.

(Vastauksen voi myös päätellä: Symmetrian nojalla $\theta = \theta_0 + 90^\circ = 115^\circ$, sillä Helsinki on isoympyrän korkein kohta, joten päiväntasaaja leikataan neljänneskierroksen päässä.)

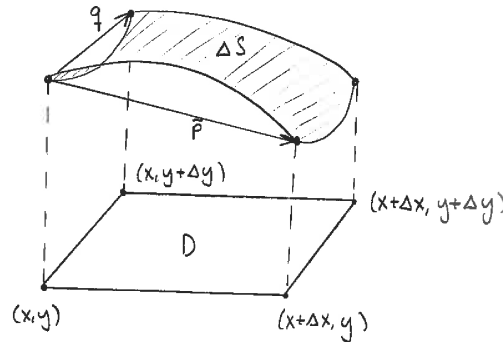
1.4 Pinnan ala *

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue ja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Tällöin f määrää pinnan

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Mikä on pinnan F ala?

Oletetaan ensin, että D on pieni suorakulmio.



Arvioidaan pinta-alaa vektorien \mathbf{p} ja \mathbf{q} avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= ((x + \Delta x)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x + \Delta x)\mathbf{k}) - (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}) \\ &= \Delta x\mathbf{i} + (f(x + \Delta x, y) - f(x, y))\mathbf{k} \approx \Delta x \left(\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{k} \right). \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\mathbf{q} \approx \Delta y \left(\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{k} \right).$$

Arvio pinta-alalle ΔS saadaan näiden vektorien virittämän suunnikkaan pinta-alana:

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \\ 0 & \Delta y & \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\Delta y \right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta x\Delta y \right)\mathbf{j} + \Delta x\Delta y\mathbf{k} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \Delta x\Delta y \end{aligned}$$

Jos siis D on pieni suorakulmio jonka pinta-ala on $\Delta x \Delta y$, niin pinnan $z = f(x, y)$ pinta-ala alueen D yläpuolella on

$$\Delta S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \Delta x \Delta y.$$

Arvio pinta-alalle yleisellä alueella D saadaan jakamalla D pieniin suorakulmioihin, soveltamalla y.o. kaavaa ja laskemalla nämä pienet pinta-alat yhteen, jolloin

$$S \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2} \Delta x \Delta y,$$

missä pisteet (x_i, y_i) ovat pienien suorakulmioiden kulmapisteitä ja summauksessa siis summataan kaikkia pieniä suorakulmioita vastaavat pinta-alat yhteen. Kun $\Delta x \rightarrow 0$ ja $\Delta y \rightarrow 0$, niin $\Delta x \Delta y \rightarrow dx dy$ ja summauksesta pinta-alaelementtien yli tulee integraali. Tällöin siis

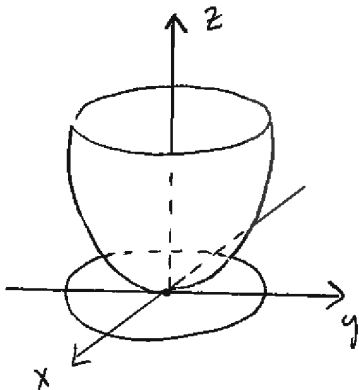
$$S = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} dx dy.$$

Pinta-alan differentiaali on siis $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} dx dy$, joka on infinitesimaalisen pinnan ala.

Esim. 13. Jos $f(x, y) = C = \text{vakio}$, niin pinnan ala on $\iint_D \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy = D$:n ala.

Esim. 14. Pinnoilla $Z = f(x, y)$ ja $z = f(x, y) + C$ on sama pinta-ala. (Eli sillä, millä korkeudelle pinta on, ei tietenkään ole merkitystä pinta-alaan.)

Esim. 15. Lasketaan pinnan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 + y^2\}$ pinta-ala.



Pohjana on siis kiekko $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ja pintana paraboloidi $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Pinta-ala on siten

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}} dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dA = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy.$$

Tehdään nyt muuttujanvaihto napakoordinaatteihin, jolloin $x^2 + y^2 = r^2$ ja integroitava alue on napakoordinaateissa $\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi)\}$ ja $dA = r dr d\phi$. Siten

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\phi = 2\pi \left| \frac{2}{24} (1 + 4r^2)^{3/2} \right|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1).$$

1.5 Massat ja momentit *

Olkoon kappaleen $D \subset \mathbb{R}^3$ paikallinen tiheys $\rho(x, y, z)$. Lasketaan kappaleen kokonaismassa.

Ajatellaan, että kappale koostuu n kappaleesta pieniä kuutioita, joiden massat ovat Δm_k . Tällöin $\Delta m_k \approx \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$, missä (x_k, y_k, z_k) on k :nnen kuution keskipiste ja ΔV_k sen tilavuus. Koko kappaleen massa on tällöin

$$M = \sum_{k=1}^n \Delta m_k = \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \rightarrow \iiint_D \rho(x, y, z) dV, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Momentit

Massaelementillä $\Delta m_k = \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$ on tasojen $x = x_0$, $y = y_0$ ja $z = z_0$ suhteen momentit $(x_k - x_0) \Delta m_k$, $(y_k - y_0) \Delta m_k$ ja $(z_k - z_0) \Delta m_k$. koko kappaleen momentit näiden tasojen suhteen ovat

$$\begin{aligned} M_{x=x_0} &= \iiint_D (x - x_0) \rho(x, y, z) dV = M_{x=0} - x_0 M \\ M_{y=y_0} &= \iiint_D (y - y_0) \rho(x, y, z) dV = M_{y=0} - y_0 M \\ M_{z=z_0} &= \iiint_D (z - z_0) \rho(x, y, z) dV = M_{z=0} - z_0 M, \end{aligned}$$

missä $M = \iiint_D \rho(x, y, z) dV$ on kappaleen kokonaismassa.

Kappaleen massakeskipiste on se piste $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, jossa kaikki momentit $M_{x=\bar{x}}$, $M_{y=\bar{y}}$ ja $M_{z=\bar{z}}$ ovat nollia. Massakeskipisteen koordinaatit ovat siten

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_{x=0}}{M} = \frac{1}{M} \iiint_D x \rho(x, y, z) dV \\ \bar{y} &= \frac{M_{y=0}}{M} = \frac{1}{M} \iiint_D y \rho(x, y, z) dV \\ \bar{z} &= \frac{M_{z=0}}{M} = \frac{1}{M} \iiint_D z \rho(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

Esim. 16. Etsitään massakeskipiste kuution muotoiselle kappaleelle, $0 \leq x, y, z \leq a$, jonka tiheysfunktio on $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Kappaleen kokonaismassa on

$$\begin{aligned} M &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^a \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^3 + y^2a + z^2a\right) dy dz \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{3}a^4 + z^2a^2\right) dz = \frac{1}{3}(a^5 + a^5 + a^5) = a^5. \end{aligned}$$

Momentti tason $x = 0$ suhteen on

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \iiint_D x\rho(x, y, z) dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2 + y^2 + z^2) dy dz dx \\ &= \int_0^a x \int_0^a (x^2a + \frac{1}{3}a^3 + z^2a) dz dx \\ &= \int_0^a x(x^2a^2 + \frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{3}a^4) dx = \frac{1}{4}a^6 + \frac{1}{6}a^6 + \frac{1}{6}a^6 = \frac{7}{12}a^6. \end{aligned}$$

Massakeskipisteen x -koordinaatti on siten

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{M} = \frac{7}{12}a.$$

Symmetrian nojalla saadaan myös $\bar{y} = \frac{7}{12}a$ ja $\bar{z} = \frac{7}{12}a$. Massakeskipiste on siis piste $(\frac{7}{12}a, \frac{7}{12}a, \frac{7}{12}a)$. (Huom. Jos massa olisi tasaisesti jakautunut, olisi massakeskipiste kuution keskipiste $(a/2, a/2, a/2)$. Nyt kappaleen tiheys on suurempi kauempana origosta, joten massakeskipiste on myös kauempana origosta.)

Hitausmomentti

Etäisyydellä r_k pyörimisakselista olevan pistemäisen massan Δm_k hitausmomentti on

$$J = \Delta m_k r_k^2.$$

Koko kappaleen hitausmomentti saadaan integroimalla kaikki massa-alkiot kappaleen yli

$$\begin{aligned} J &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta m_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n r_k^2 \rho(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \\ &= \iiint_D r(x, y, z)^2 \rho(x, y, z) dV, \end{aligned}$$

missä $r(x, y, z)$ on pisteen (x, y, z) etäisyys pyörimisakselista ja $\rho(x, y, z)$ kappaleen tiheys pisteessä (x, y, z) .

Esim. 17. Hitausmomentit koordinaattiakselien suhteen ovat

$$J_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$J_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$J_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV.$$

Huom. Mitä suurempi on kappaleen hitausmomentti, sitä suurempi momentti tarvitaan, jotta kappale saataisiin pyörimään halutulla kulmakiihtyvyydellä.

Esim. 18. Lasketaan vakiotiheyttä olevan $\rho = 1$ olevan kappaleen $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-a/2, a/2], y \in [-b/2, b/2], z \in [-c/2, c/2]\}$ hitausmomentit koordinaattiakselien suhteen:

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= 8 \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} (y^2 + z^2) dx dy dz = 4a \int_0^{c/2} \int_0^{b/2} (y^2 + z^2) dy dz \\ &= 4a \int_0^{c/2} \left(\frac{1}{3} \frac{b^3}{8} + z^2 \frac{b}{2} \right) dz = 4a \left(\frac{1}{48} b^3 c + \frac{1}{48} c^3 b \right) = \frac{abc}{12} (b^2 + c^2) = \frac{M}{12} (b^2 + c^2), \end{aligned}$$

missä $M = abc$ on kappaleen kokonaismassa.

$$\text{Vastaavasti saadaan } J_y = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \text{ ja } J_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

Esim. 19. Jos edellisen esimerkin kappaleelle halutaan antaa kulmakiihtyvyys ω' x -akselin ympäri, täytyy siihen kohdistaa momentti $M = J_x \omega'$. Tässä momentti $M = Fr$, jos kappaleeseen kohdistetaan voima F kohtisuorasti x -akselia vastaan etäisyydellä r akselista. Jos siis kappaletta pyöritetään x -akselin ympäri siitä päästä missä $y = 0$ ja $z = c/2$, on $r = c/2$, jolloin kulmakiihtyvyyden ω' aikaansaamiseksi x -akselin ympäri täytyy kappaletta pyörittää voimalla $F = \frac{2}{c} J_x \omega' = \frac{abc}{6} \frac{b^2 + c^2}{c} \omega' = \frac{ab}{6} (b^2 + c^2)$ kokoajan x -akselia vastaan kohtisuorasti.

Hitaussäde

Kappaleen hitaussäde on

$$r_g = \sqrt{\frac{J}{M}},$$

missä J on kappaleen hitausmomentti ja M on kappaleen massa. Hitaussäde kertoo millä etäisyydellä pyörimisakselista olevaa pistemäistä kappaletta kyseinen kappale vastaa.

Esim. 20. Lasketaan putken (tiheys = ρ = vakio) $\{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, z \in [0, c]\}$ hitausmomentti ja hitaussäde z -akselin suhteen.

kuva

Sylinterikoordinaateissa putki on $\{(r, \phi, z) \mid r \in [a, b], \phi \in [0, 2\pi), z \in [0, c]\}$. Hitausmomentti on siten

$$J_z = \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_a^b r^2 \rho r dr d\phi dz = \rho c 2\pi \frac{1}{4} (b^4 - a^4) = \frac{\pi \rho c}{2} (b^4 - a^4).$$

Kappaleen hitaussäde on siten

$$r_g = \sqrt{\frac{\pi \rho c (b^4 - a^4) / 2}{\rho c \pi (b^2 - a^2)}} = \sqrt{\frac{1}{2} (b^2 + a^2)}.$$

2. Vektorikentät

2.1 Vektorikentät ja kenttäviivat

Vektorikenttä on funktio, joka liittää määrittelyalueensa jokaiseen pisteeseen vektorin:

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$. Tällöin $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ on vektorikenttä D :ssä. Vastaavasti, jos $D \subset \mathbb{R}^2$, on tällöin $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä D :ssä.

Vertaa:

- 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yhden muuttujan funktio
- 2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ useamman muuttujan funktio (eli skalaarikenttä)
- 3) $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ käyrä
- 4) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorikenttä.

Jos $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ on vektorikenttä, niin merkitään

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k},$$

missä funktiot F_1 , F_2 ja F_3 ovat \mathbf{F} :n komponenttifunktiot. (Huom. Tässä alaindeksillä ei tarkoiteta derivaattaa!)

Esim. 1. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Tällöin sen gradientti

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

määrittää vektorikentän.

Esim. 2. (Gravitaatiokenttä) Tarkastellaan systeemiä, johon kuuluu origossa sijaitseva massa M ja massa m pisteessä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

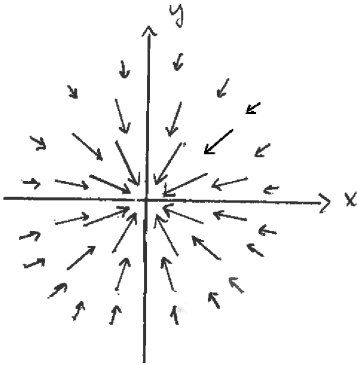
Tällöin massat vetävät toisiaan puoleensa voimalla, joka on verrannollinen massojen suuruuteen ja kääntäen verrannollinen niiden etäisyyden neliöön. Siten massa M vetää massaa m puoleensa voimalla, joka on

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -kmM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

missä $k > 0$ on gravitaatiovakio. Kyseessä on vektorikenttä $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. (Huom. $\mathbf{F}(0)$ ei ole määritelty, sillä m ja M eivät voi olla samassa pisteessä.)

Puhutaan myös kappaleen aiheuttamasta gravitaatiokentästä, jolla tarkoitetaan kappaleen aiheuttamaa putoamiskiihtyvyyttä. Massan M aiheuttama gravitaatiokenttä on siis

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -kM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$



Esim. 3. (Sähkökenttä) Coulombin lain mukaan kahden pistemäisen varauksen välillä vaikuttaa voima, joka on verrannollinen varauksien suuruuteen ja kääntäen verrannollinen niiden etäisyyden neliöön. Varaus Q vetää siten varausta q puoleensa voimalla, joka on

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Varauksen Q aiheuttama sähkökenttä on taas

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Esim. 4. (Pyörivä levy) Tarkastellaan levyä D , joka pyörii kulmanopeudella Ω (yksikkönä rad/s) vastapäivään.

Olkoon $(x, y) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$ piste levyllä. Tällöin pisteen rata on

$$\mathbf{r}(t) = r \cos(\Omega t + \phi)\mathbf{i} + r \sin(\Omega t + \phi)\mathbf{j},$$

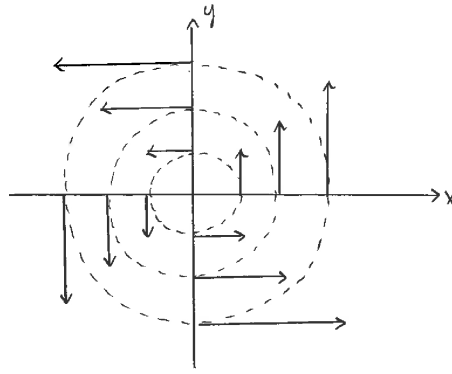
josta saadaan

$$\mathbf{r}'(t) = -\Omega r \sin(\Omega t + \phi)\mathbf{i} + \Omega r \cos(\Omega t + \phi)\mathbf{j}.$$

Siten pisteen (x, y) nopeusvektori on

$$\mathbf{r}'(0) = -\Omega r \sin(\phi)\mathbf{i} + \Omega r \cos(\phi)\mathbf{j} = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}.$$

Funktio $\mathbf{F}(x, y) = \Omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}$ määrää siten vektorikentän $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka kuvaa pisteessä (x, y) olevan pisteen nopeusvektoria.



Esim. 5. Muita vektorikenttiä ovat mm. magneettikenttä, nesteen/kaasun nopeuskenttä.

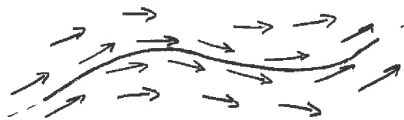
Vektorikentän kenttäviivat

Olkoon $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä, missä $D \subset \mathbb{R}^3$. Tällöin käyrä $\mathbf{r} : (a, b) \rightarrow D$ on kenttäviiva, jos

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \quad \text{kun } t \in (a, b),$$

jollain funktiolla $\lambda : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $\lambda(t) > 0$, kun $t \in (a, b)$.

Huom. Tämä siis tarkoittaa sitä, että jokaisessa käyrän $\mathbf{r}(t)$ pisteessä sen tangentti \mathbf{r}' on samansuuntainen kuin vektorikenttä \mathbf{F} siinä samassa pisteessä. Kenttäviivat siis kuvaavat vektorikentän mukaisesti ”kulkevien” pisteiden ratoja.



Esim. 6.

Jos vektorikenttä tässä on esimerkiksi nesteen nopeuskenttä, niin kenttäviiva $\mathbf{r}(t)$ kuvaa pienen hiukkasen rataa nesteessä.

Kysymys: Miten lasketaan kenttäviivat vektorikentälle?

Merkitään $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Jos $\mathbf{r}(t)$ tällöin kenttäviiva, niin $\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ ja siten

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = \lambda(t)F_1(x(t), y(t), z(t)), \\ \frac{dy}{dt}(t) = \lambda(t)F_2(x(t), y(t), z(t)), \\ \frac{dz}{dt}(t) = \lambda(t)F_3(x(t), y(t), z(t)). \end{cases}$$

Saadaan siis kolme kappaletta ensimmäisen kertaluvun (epälineaarisia) differentiaaliyhtälöitä

$$\frac{\frac{dx}{dt}(t)}{F_1(x(t), y(t), z(t))} = \frac{\frac{dy}{dt}(t)}{F_2(x(t), y(t), z(t))} = \frac{\frac{dz}{dt}(t)}{F_3(x(t), y(t), z(t))}.$$

Yhtälöt voidaan formaalisti kertoa puolittain termillä dt , jolloin saadaan Adamsin käyttämä muoto

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}.$$

Tämä muoto on kätevä, jos yhtälöt voidaan separoida (kts. Adams 7.9), missä tapauksessa yhtälöt saadaan sopivalla funktiolla kertomalla muotoon

$$P(x)dx = Q(y)dy = R(z)dz.$$

Tällöin yhtälöt voidaan ratkaista yksinkertaisesti integroimalla. Tämä on mahdollista seuraavassa esimerkissä.

Esim. 7. (Pyörivä levy) Lasketaan vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ kenttäviivat, $\Omega > 0$.

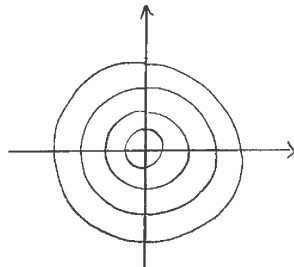
Yhtälö kenttäviivojen komponenteille on

$$\frac{dx}{-\Omega y} = \frac{dy}{\Omega x} \Rightarrow -x dx = y dy \Rightarrow \int (-x) dx = \int y dy,$$

joten saadaan

$$-\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 - C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2C,$$

jollakin $C > 0$. Kenttäviivat ovat siis ympyröitä.



Harjoitus 8. Etsi kentän $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \cos(x)\mathbf{j}$ kenttäviivat.

(Vast. $y = \sin(x) + C$)

2.2 Vektorikenttä napakoordinaateissa

Tason vektorikenttä $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ voidaan esittää napakoordinaateissa

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, \phi) = F_r(r, \phi)\hat{\mathbf{r}} + F_\phi(r, \phi)\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Tässä

$F_r(r, \phi) =$ radiaalinen komponentti.

$F_\phi(r, \phi) =$ kohtisuora komponentti.

$\hat{\mathbf{r}}$ = paikkavektorin suuntainen yksikkövektori, eli

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos(\phi)\mathbf{i} + \sin(\phi)\mathbf{j}.$$

$\hat{\phi}$ = on ”kulman suuntainen yksikkövektori”, eli paikkavektoria kohtisuorassa oleva yksikkövektori, eli

$$\hat{\phi} = -\sin(\phi)\mathbf{i} + \cos(\phi)\mathbf{j}.$$

(Huom. Nyt pätee $\hat{\phi} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$.)

Huom. Nyt kummatkin kantavektorit $\hat{\mathbf{r}}$ ja $\hat{\phi}$ riippuvat kulmasta ϕ ja pätee

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\phi} = \hat{\phi}.$$

Jos on annettu käyrä napakoordinaattimuodossa $r = r(\phi)$, se voidaan esittää vektorimuodossa

$$\mathbf{r}(\phi) = r(\phi)\hat{\mathbf{r}} = r(\phi)\cos(\phi)\mathbf{i} + r(\phi)\sin(\phi)\mathbf{j}.$$

Tämä käyrä on vektorikentän \mathbf{F} kenttäviiva, mikäli sen tangenttivektori

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\phi}(\phi) = \frac{dr}{d\phi}(\phi)\hat{\mathbf{r}} + r(\phi)\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\phi} = \frac{dr}{d\phi}(\phi)\hat{\mathbf{r}} + r(\phi)\hat{\phi}$$

on yhdensuuntainen kenttävektorin $\mathbf{F}(r, \phi)$ kanssa jokaisessa käyrän pisteessä. Tästä saadaan

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\phi}(\phi) = \lambda(\phi)F_r(r, \phi), \\ r(\phi) = \lambda(\phi)F_\phi(r, \phi), \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{dr}{d\phi}(\phi)}{F_r(r, \phi)} = \frac{r(\phi)}{F_\phi(r, \phi)} \Rightarrow \frac{\frac{dr}{d\phi}(\phi)}{r(\phi)} = \frac{F_r(r, \phi)}{F_\phi(r, \phi)}.$$

Myös tämä yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{dr}{F_r(r, \phi)} = \frac{rd\phi}{F_\phi(r, \phi)},$$

joka on hyödyllinen muoto jos yhtälöt voidaan separoida.

Sillä $\frac{d}{dx} \ln(x) = 1/x$, saadaan tästä käyttämällä ketjusääntöä differentiaaliryhtälö myös muotoon

$$\frac{d}{d\phi} \ln(r(\phi)) = \frac{F_r(r, \phi)}{F_\phi(r, \phi)}.$$

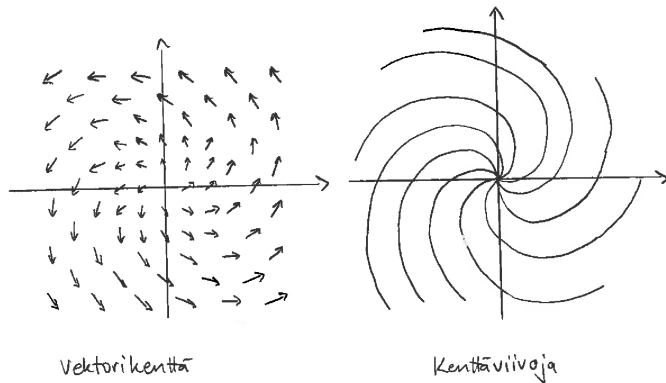
Esim. 9. Tarkastellaan vektorikenttää $\mathbf{F}(r, \phi) = \hat{\mathbf{r}} + r\hat{\phi}$. Tällöin siis $F_r = 1$ ja $F_\phi = r$, josta saadaan kenttäviivoille yhtälö

$$\frac{\frac{dr(\phi)}{d\phi}}{r(\phi)} = \frac{1}{r(\phi)}.$$

Tästä nähdään, että

$$\frac{dr(\phi)}{d\phi} = 1 \Rightarrow r(\phi) = \phi + C.$$

Kenttäviivat ovat siis spiraaleita, jotka voidaan esittää napakoordinaattimuodossa yhtälöllä $r = \phi + C$.



2.3 Konservatiiviset kentät

Nyt siis tiedetään, että jos $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ on funktio ja $D \subset \mathbb{R}^3$, niin ∇f on vektorikenttä $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Päteekö tämä toisin päin? Jos $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ on annettu vektorikenttä, niin voidaanko \mathbf{F} esittää muodossa

$$\mathbf{F} = \nabla\Phi,$$

jollakin funktiolla $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$?

Jos \mathbf{F} voidaan esittää muodossa $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, niin \mathbf{F} on konservatiivinen vektorikenttä ja Φ on \mathbf{F} :n skalaaripotentiali.

Esim. 10. Kenttä $\mathbf{F}(x, y) = 2xi + 2e^{2y}j$ on konservatiivinen, sillä $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, kun $\Phi(x, y) = x^2 + e^{2y}$.

Esim. 11. (Gravitaatiokenttä) Origossa oleva massa M aiheuttaa gravitaatiokentän (putoamiskiihtyvyyden), joka on

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -kM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Kenttä on konservatiivinen, sillä asettamalla $\Phi(\mathbf{r}) = kM \frac{1}{|\mathbf{r}|}$, pätee

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -kM \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \nabla|\mathbf{r}| = -kM \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{g}(\mathbf{r}).$$

Huom. Gradienttia laskettaessa voidaan käyttää ketjusääntöä niinkuin muissakin derivaatoissa. Eli jos $g(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)$, niin $\nabla g = f'(|\mathbf{r}|)\nabla|\mathbf{r}|$, missä

$$\begin{aligned} \nabla|\mathbf{r}| &= \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{j} + \frac{1}{2} \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned}$$

Huom. Jos funktio Φ on vektorikentän \mathbf{F} skalaaripotentialiaali, niin funktio $C\Phi$ on vektorikentän $C\mathbf{F}$ skalaaripotentialiaali.

Huom. Edellisen esimerkin fysikaalinen potentialiaali on

$$V(\mathbf{r}) = -\Phi(\mathbf{r}) = -kM \frac{1}{|\mathbf{r}|},$$

joka siis kasvaa kun loitetaan origosta. Laskettaessa kappaleen potentialiaalienergiaa (voiman tekemä työ siirryttäessä jostakin referenssipisteestä toisaalle) maan pinnan tuntumassa, on putoamiskiikkyvyys suunnilleen vakio $\mathbf{g}(\mathbf{r}) \approx -g\hat{\mathbf{r}}$ (missä $g \approx 9.81\text{m/s}^2$) ja tällöin kappaleeseen (massa m) vaikuttava voima $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \approx -m\mathbf{g}\hat{\mathbf{r}}$. Kappaleen (massa m) potentialiaalienergia korkeudella h maan pinnasta on siten

$$E(h) = \int_R^{R+h} |\mathbf{F}(s\hat{\mathbf{r}})| ds \approx mg \int_R^{R+h} ds = mgh.$$

Esim. 12. Vektorikenttä $\mathbf{F} = \Omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega > 0$, ei ole konservatiivinen.

Mikäli olisi olemassa $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, niin

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\Omega y, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Omega x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} = -\Omega, \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \Omega. \end{cases}$$

Koska \mathbf{F} on sileä vektorikenttä, myös sen potentialifunktion pitää olla sileä. Erityisesti siis Φ on kahdesti derivoituva. Tästä kuitenkin seuraa, että ristiderivaattojen pitää olla samat, eli $-\Omega = \Omega$, jolloin $\Omega = 0$. Tämä on ristiriidassa oletuksemme kanssa ja siten potentialifunktiota Φ ei voi olla olemassa, eli \mathbf{F} ei ole konservatiivinen.

Yleisesti pätee: Olkoon $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Jos \mathbf{F} on konservatiivinen, niin

$$\mathbf{F} = \nabla\Phi,$$

jollakin $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_1$ ja $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2$ ja $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_3$, jolloin

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}. \end{cases}$$

Saatiin siis: Jos vektorikenttä $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ on konservatiivinen, niin

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

Vastaavasti tasossa: Jos $D \subset \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ on konservatiivinen, niin

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Esim. 13. Tutkitaan, onko $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + \sin(x)\mathbf{j}$ konservatiivinen. Koska

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \neq \cos(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ei kenttä ole konservatiivinen.

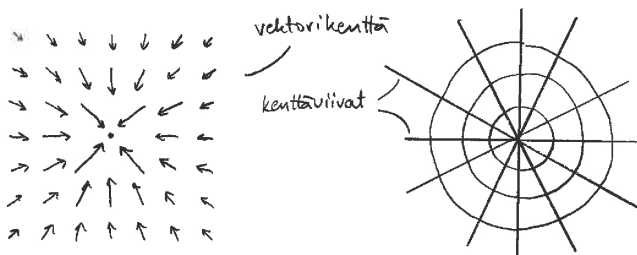
Huom. Derivaattaehdot $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ ovat siis välttämättömät, mutta eivät riittävät ehdot konservatiivisuudelle. Seuraava pätee yleisesti: Jos ehdot $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ toteutuvat yhdesti yhtenäisessä alueessa $D \subset \mathbb{R}^n$, niin vektorikentällä \mathbf{F} on olemassa skalaaripotentiali $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$. (Alue D on yhdesti yhtenäinen, jos jokainen silmukka D :ssä voidaan jatkuvalla tavalla kutistaa D :n sisällä pisteeksi.)

2.4 Tasapotentialipinnat ja -käyrät

Jos $\Phi(x, y, z)$ on vektorikentän $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ skalaaripotentiali, niin pinnat $\Phi(x, y, z) = C = \text{vakio}$ ovat \mathbf{F} :n tasapotentialipintoja. Koska $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ on kohtisuorassa näitä pintoja vastaan, tasapotentialipinnat ja kenttäviivat leikkaavat aina suorassa kulmassa.

Kaksiulotteisessa tapauksessa $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ yhtälö $\Phi(x, y) = C = \text{vakio}$ määrää tasapotentialikäyrän.

Esim. 14. Edellä todettiin gravitaatiokenttä $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -kM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ konservatiiviseksi ja sen kenttäviivat ovat origon kautta kulkevia suoria. Tasapotentialikäyrät ovat tällöin origokeskisiä ympyröitä.



Esim. 15. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ ja vektorikenttä $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ annettu muodossa

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2},$$

jolloin $F_1 = x/(x^2 + y^2)$ ja $F_2 = y/(x^2 + y^2)$. Tällöin

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

joten vektorikenttä \mathbf{F} voi olla konservatiivinen.

Jos nyt $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, niin

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Tästä saadaan, että

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C_1(y)$$

ja siten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + C_1'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Siten $C_1'(y) = 0$ ja saadaan $C_1(y) = C = \text{vakio}$. Tämä vakio ei millään tavalla vaikuta siihen, onko Φ skalaaripotentiali ja voidaan valita $C = 0$, jolloin

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Löydettiin siis koko alueessa D määritelty skalaaripotentiali, joten \mathbf{F} todella on konservatiivinen. Tasapotentialikäyrät ovat nyt käyriä

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = C \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = e^{2C},$$

eli ympyröiden neljänneksiä, onhan tarkastelualue vain D eikä koko taso. (Origo olisikin tuottanut ongelman: vektorikenttä itse sen paremmin kuin potentiaalifunktiokaan eivät ole määriteltyjä origossa.)

2.5 Lähde, nielu ja dipoli

Lähde

Ajatellaan seuraavaa tilannetta:

- Koko avaruus \mathbb{R}^3 on täytetty kokoonpuristumattomalla nesteellä.
- Origosta ilmestyy nestettä nopeudella

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi m,$$

missä $m > 0$ on lähteen voimakkuus. (Nestettä siis ilmestyy esim. $4\pi m$ kuutiota sekunnissa.)

- Neste leviää symmetrisesti ja tasaisesti ulospäin origosta.

Nyt haluttaisiin tietää millä nopeudella neste liikkuu etäisyydellä r origosta?

Olkoon $r(t)$ pienen nestehiukkasen etäisyys origosta ajan funktiona. Nesteen tilavuus $r(t)$ säteisen pallon sisäpuolella on

$$V(t) = \frac{4\pi r(t)^3}{3}$$

ja koska neste leviää tasaisesti eikä puristu kokoon, on tämän $r(t)$ säteisen pallon sisäpuolelle jäävän nestemäärän muutosnopeus $4\pi m$. Siten

$$\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r(t)^2 r'(t) = 4\pi m \quad \Rightarrow \quad r'(t) = \frac{m}{r(t)^2}.$$

Nesteen nopeuskenttä on siten

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{m}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = m \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Huom. Näin saatu kenttä on samaa muotoa kuin gravitaatiokenttä, joten nähdään, että myös lähteen nopeuskenttä on konservatiivinen: $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\Phi(\mathbf{r})$, kun $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{m}{r}$.

Nielu

Nyt käsitellään samaa tilannetta, mutta origossa on pumppu, joka imee nestettä nopeudella

$$\frac{dV}{dt} = -4\pi m,$$

missä m on nielun voimakkuus.

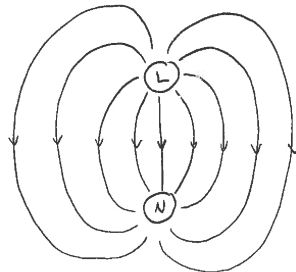
Nielun nopeuskenttä on tällöin

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -m \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

ja se on konservatiivinen.

Dipoli

Dipoli koostuu lähteestä ja nielusta, joiden kummankin voimakkuus on $m > 0$. Esim. magneetin vuoviivat:



Kun lähteen ja nielun välinen etäisyys on l , dipolimomentti on $\mu = ml$. Ideaalidipolissa lähteen ja nielun voimakkuus kasvaa $m \rightarrow \infty$ ja etäisyys pienenee $l \rightarrow 0$ siten, että dipolimomentti μ pysyy vakiona.

Esim. 16. Olkoon dipolin dipolimomentti μ , akseli z -akseli (eli nielu ja lähde ovat molemmat z -akselilla) ja olkoon sen keskipiste origossa. Lasjetaan dipolin aiheuttama nopeuskenttä $\mathbf{v}(x, y, z)$.

Kun lähde, jonka voimakkuus on m , sijaitsee pisteessä $(0, 0, l/2)$ ja nielu, voimakkuus $-m$, pisteessä $(0, 0, -l/2)$, saadaan potentiaaliksi

$$\Phi(\mathbf{r}) = -m \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}l\mathbf{k}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}l\mathbf{k}|} \right).$$

Kun $l \rightarrow 0$ ja $ml = \mu$, saadaan tästä raja-arvona ideaalidipolille $\Phi_{id}(\mathbf{r}) = \dots = -\frac{\mu z}{|\mathbf{r}|^3}$. Nopeuskenttä saadaan gradienttina

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\Phi_{id}(\mathbf{r}) = \dots = \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^5}(3xz\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + (2z^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}).$$

3. Viiva- ja pintaintegraalit

Tavoitteena on integroida funktio/vektorikenttä annetun käyrän/pinnan yli.

Olkoon $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ käyrän c parametrisointi ja $S \subset \mathbb{R}^3$ pinta. Jos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, niin laskettavia integraaleja on tällöin:

1.) $I = \int_c f \, ds =$ funktion viivaintegraali c :n yli.

2.) $I = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$ vektorikentän viivaintegraali c :n yli.

3.) $I = \iint_S f \, dS =$ funktion pintaintegraali pinnan S yli.

4.) $I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} =$ vektorikentän pintaintegraali pinnan S yli.

Esim. 1. Esimerkkejä edellisistä: 1.) $f = \rho =$ langan tiheys, jolloin $I =$ langan kokonaismassa. 2.) $\mathbf{F} =$ kappaleeseen kohdistuva voima, jolloin $I =$ voiman tekemä työ. 3.) $f = \rho =$ pinnan tiheys, jolloin $I =$ pinnan kokonaismassa. 4.) $\mathbf{F} =$ nesteen nopeuskenttä, jolloin $I =$ nesteen vuo pinnan S läpi (= pinnan läpi virtaavan nesteen määrä/aikayksikkö).

3.1 Käyrät

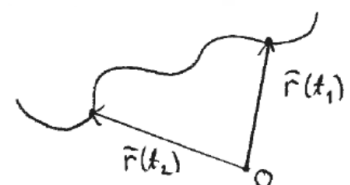
- Avaruuskäyrän määrittelevät koordinaattifunktiot

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

missä parametri $t \in [a, b]$ tai $t \in \mathbb{R}$.

- Käyrän paikkavektori on

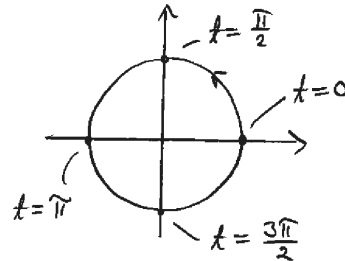
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$



- Sanotaan: funktio $\mathbf{r}(t)$ on vektoriarvoinen funktio.
- Jos $z(t) = 0$, niin käyrä on tasokäyrä.

Esim. 2. Tarkastellaan tasokäyrää

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Tiedetään, että $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, joten käyrän pisteiden koordinaateille pätee $x^2 + y^2 = 1$. Kyseessä on siis (x, y) -tason yksikköympyrä. Kun t kasvaa, pyöritään yksikköympyrällä vastapäivään.

Esim. 3. Tarkastellaan käyrää

$$\begin{cases} x = 2 + t^2 \\ y = 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminoidaan parametri t : ratkaistaan $t = y/3$ ja sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, jolloin

$$x = 2 + t^2 = 2 + y^2/9.$$

Kyseessä on siis oikealle aukeava paraabeli.

- Olkoon

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

käyrän paikkavektori. Tällöin \mathbf{r} :n derivaatta on

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

- Sanotaan, että $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ on käyrän nopeusvektori. Vauhti on $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|$.

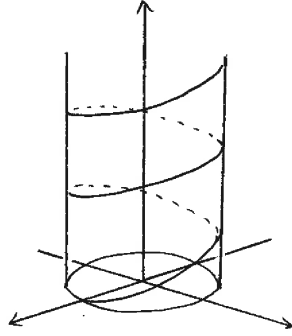
Harjoitus 4. Taso $x + y + z = 1$ leikkaa pinnan $z = x^2$ pitkin erästä avaruuden paraabelia. Parametrisoi tämä paraabeli.

(Vast. esim. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t - t^2)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$)

Esim. 5. Tarkastellaan nousevaa spiraalia

$$\begin{cases} x = \cos(\omega t) \\ y = \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = ct, \end{cases}$$

missä $\omega > 0$ on kulmanopeus ja $c > 0$ on nousunopeus.



Käyrän paikkavektori on

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

ja nopeusvektori on

$$\mathbf{v}(t) = -\omega \sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega \cos(\omega t)\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Vauhti on

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\omega^2 \sin^2(\omega t) + \omega^2 \cos^2(\omega t) + c^2} = \sqrt{\omega^2 + c^2} \quad (= \text{vakio})$$

ja kiihtyvyyys on

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = -\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{i} - \omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega^2(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}).$$

Jos kappaleen massa on m ja se liikkuu edellä mainitulla spiraaliradalla sen paikkavektorin ollessa $\mathbf{r}(t)$, niin Newtonin II lain mukaan siihen kohdistuu voima

$$\overline{\mathbf{F}}(t) = m\mathbf{a}(t) = -\omega^2 m(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}) \quad (= \text{keskeisvoima}).$$

Huom. Olkoon $\mathbf{u}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v}(t) = X(t)\mathbf{i} + Y(t)\mathbf{j} + Z(t)\mathbf{k}$ vektoriarvoisia funktioita ja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio. Tällöin pätee

- 1.) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
- 2.) $\frac{d}{dt}(f\mathbf{u}) = f'\mathbf{u} + f\frac{d\mathbf{u}}{dt}$
- 3.) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
- 4.) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$

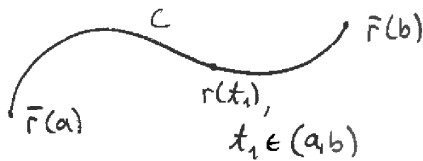
Yllä siis esimerkiksi funktio $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v}$ pisteessä t on

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v}\right)(t) &= \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}) \cdot (X(t)\mathbf{i} + Y(t)\mathbf{j} + Z(t)\mathbf{k}) \\ &= x'(t)X(t) + y'(t)Y(t) + z'(t)Z(t). \end{aligned}$$

3.2 Funktion viivaintegraali

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ (tai $D \subset \mathbb{R}^2$) ja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Olkoon $c \subset D$ käyrä ja $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ käyrän c parametrus siten, että

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0, \quad \text{kaikilla } t \in [a, b].$$



Tällöin funktion f viivaintegraali käyrän c yli on

$$\int_c f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt.$$

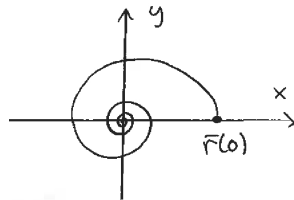
Esim. 6. Olkoon c käyrä $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tällöin

$$\int_c 1 ds = \int_a^b 1 \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| dt = \text{käyrän } c \text{ pituus.}$$

Esim. 7. Lasketaan tasokäyrän

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos(t), & t \in [0, \tau], \\ y = e^{-t} \sin(t), & t \in [0, \tau], \end{cases}$$

kaarenpituus.



Käyrän paikkavektori on

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos(t)\mathbf{i} + e^{-t} \sin(t)\mathbf{j}$$

ja nopeusvektori on siten

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= (-e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t))\mathbf{i} + (-e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t))\mathbf{j} \\ &= -e^{-t}(\sin(t) + \cos(t))\mathbf{i} + e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Täten

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right|^2 = e^{-2t}(\sin^2(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)) + e^{-2t}(\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t)) = 2e^{-2t}.$$

Näin ollen kaarenpituus on

$$s = \int_0^\tau \sqrt{2}e^{-t} dt = \sqrt{2} \left| -e^{-t} \right|_0^\tau = \sqrt{2}(1 - e^{-\tau}).$$

Huomataan myös, että $s \rightarrow \sqrt{2}$, kun $\tau \rightarrow \infty$.

Esim. 8. Jos c on ohut lanka \mathbb{R}^3 :ssa, joka voidaan parametrisoida funktiolla $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, ja $f(\mathbf{r}(t))$ on langan massatiheys (kg/m) pisteessä $\mathbf{r}(t)$, niin $\int_c f \, ds$ on langan kokonaismassa.

Perustellaan tämä seuraavaksi. Jos f on vakio, niin $\int_c f \, ds = f \int_c ds = f \times$ langan kokonaispituus = langan kokonaismassa.

Jos f ei ole vakio, niin jaetaan c pieniin pätkiin c_1, c_2, \dots, c_n . Kussakin näistä lyhyistä pätkistä f on likimain vakio $f \approx f_i$. Tällöin

$$\int_c f \, ds = \sum_{i=1}^n \int_{c_i} f \, ds \approx \sum_{i=1}^n f_i \int_{c_i} ds = c\text{:n kokonaismassa,}$$

sillä $f_i \int_{c_i} ds$ on i :nnen pätkän kokonaismassa. Kun langan jakovälien pituus lähestyy nollaa, niin \approx tilalle saadaan = merkki.

Esim. 9. Lasketaan $I = \int_c f \, ds$, kun käyrä c on yksikköympyrä, jonka parametrisoinniksi voidaan ottaa

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ja

$$f(x, y, z) = x^2.$$

Tällöin $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = -\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}$ ja siten $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| = 1$. Nyt $f(\mathbf{r}(t)) = (\cos(t))^2$ ja siten määritelmän mukaan

$$I = \int_0^{2\pi} f(\mathbf{r}(t)) \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt = \pi.$$

Esim. 10. Lasketaan funktion

$$f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$$

viivaintegraali yli janan, jonka päätepisteet ovat origo ja $(2, 1, 2)$. Janan parametrisoinniksi voidaan ottaa

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t \in [0, 1].$$

Tällöin $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, joten $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$, ja $f(\mathbf{r}(t)) = 2t - 3t^2 + 2t = 4t - 3t^2$. Siten

$$\int_c f \, ds = \int_0^1 (4t - 3t^2) \cdot 3 dt = 3 \Big|_0^1 (2t^2 - t^3) = 3(2 - 1) = 3.$$

Esim. 11. Lasketaan saman funktion viivaintegraali yli murtojanan, joka koostuu janasta $c_1 = OP_1$ ja $c_2 = P_1P_2$, missä $P_1 = (2, 1, 0)$ ja $P_2 = (2, 1, 2)$. Murtoviivalla on siis sama alkupiste (origo) ja sama päätepiste (piste $(2, 1, 2)$) kuin edellisessä tehtävässä.

Janan c_1 parametrisoinniksi voidaan ottaa

$$\mathbf{r}_1(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t \in [0, 1]$$

ja janan c_2 parametrisoinniksi

$$\mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t \in [0, 1].$$

Tällöin $\left|\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right| = |2\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{5}$ ja $\left|\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right| = |2\mathbf{k}| = 2$ ja siten

$$\begin{aligned} \int_c f \, ds &= \int_{c_1} f \, ds + \int_{c_2} f \, ds = \int_0^1 f(2t, t, 0) \cdot \sqrt{5} \, dt + \int_0^1 f(2, 1, 2t) \cdot 2 \, dt \\ &= \sqrt{5} \int_0^1 (2t - 3t^2) \, dt + 2 \int_0^1 (2 - 3 + 2t) \, dt = \sqrt{5} \left[t^2 - t^3 \right]_0^1 + 2 \left[-t + t^2 \right]_0^1 \\ &= \sqrt{5}(1 - 1) + 2(-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Saatiin siis eri tulos kuin edellisessä esimerkissä.

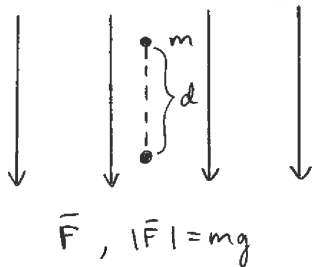
Huom. Vaikka funktio olisi sama ja integroimispolun päätepisteet samat, voi integraalin tulos riippua käytetystä polusta.

3.3 Vektorikentän viivaintegraali

Esim. 12. (Gravitaatiokenttä) Kun massa m putoaa matkan h lähellä maan pintaa, niin maapallon aiheuttama putoamiskiihtyvyys on likimain vakio ja siten kappaleeseen kohdistuva voima on $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$. Gravitaatiokentän tekemä työ on siten

$$W = hmg = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r},$$

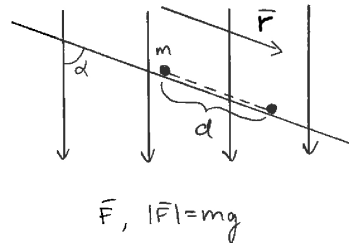
missä $\mathbf{r} = -h\mathbf{k}$ on massan siirtymää vastaava vektori.



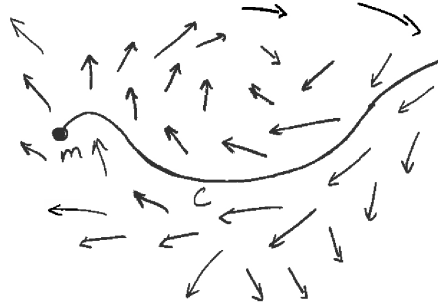
Jos massa m ei putoakaan suoraan alas vaan liukuu matkan h kaltevaa tasoa pitkin, niin gravitaatiokentän tekemä työ on

$$W = \cos(\alpha) \cdot h \cdot mg = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r},$$

missä \mathbf{r} on massan siirtymää vastaava vektori.

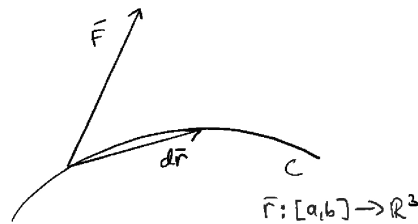


Mikä on yleisesti vektorikentän \mathbf{F} tekemä työ, kun massa m liikkuu käyrää c pitkin?



Tarkastellaan tilannetta pienessä mittakaavassa. Olkoon $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ käyrän c parametrisointi, jolloin voiman \mathbf{F} tekemä työ matkalla $d\mathbf{r}$ on

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$



Integroimalla välin $[a, b]$ yli saadaan kokonaistyöksi

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt$$

Otetaan tämä vektorikentän viivaintegraalin määritelmäksi: Olkoon $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä, $D \subset \mathbb{R}^3$, ja c käyrä $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$, jolle

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0, \quad \text{kaikilla } t \in [a, b].$$

Tällöin

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt$$

Huom. Jos c on suljettu, eli $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, niin merkitään myös

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Esim. 13. (Gravitaatiokenttä) Jos kappaletta liikutetaan gravitaatiokentässä siten, että etäisyys maan pinnasta kasvaa huomattavasti, ei maapallon aiheuttama gravitaatiokenttä enää ole vakio vaan vektorikenttä

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -kM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Tällöin massan m liikkuessa pitkin käyrää c , jonka parametrisointi on $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, gravitaatiokenttä tekee työn

$$W = \int_c \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = m \int_c \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -kMm \int_a^b \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|^3} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt.$$

Harjoitus 14. Integroi $\mathbf{F}(x, y) = \cos(x)\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ origosta pisteeseen $(\pi, 0)$ pitkin käyrää $y = \sin(x)$.

(Vast. 0)

Esim. 15. Lasketaan vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$$

tekemä työ yli käyrän

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad t \in [0, 1].$$

Nyt

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

ja vektorikenttä käyrällä on

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2, t^3) = (t^2 - t^2)\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k} = (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k},$$

joten

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = 2t(t^3 - t^4) + 3t^2(t - t^6) = 3t^3 + 2t^4 - 2t^5 - 3t^8.$$

Kentän tekemä työ on siten

$$W = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt = \int_0^1 (3t^3 + 2t^4 - 2t^5 - 3t^8) dt = \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 - \frac{3}{9}t^9 \right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{29}{60}.$$

Huom. Tarkastellaan konservatiivista vektorikenttää $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tällöin siis $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, jollakin funktiolla $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Jos $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ on käyrä

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

niin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}(t)) &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\mathbf{r}(t))z'(t) \\ &= (\nabla\Phi)(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t).\end{aligned}$$

Integroimalla välin $[a, b]$ yli saadaan

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}(t))dt = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)).$$

Saatiin siis: Jos $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ on konservatiivinen vektorikenttä $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja c on käyrä $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$, jolle

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \neq 0, \quad \text{kaikilla } t \in [a, b],$$

niin

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)).$$

Huom. Vertaa yksiulotteiseen tapaukseen: Jos $f = F'$, missä $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, niin

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Huom. 1. seuraus: Jos \mathbf{F} on konservatiivinen vektorikenttä, niin $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ riippuu ainoastaan käyrän c päätepisteistä.

Huom. 2. seuraus: Jos \mathbf{F} on konservatiivinen ja c on suljettu, niin

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

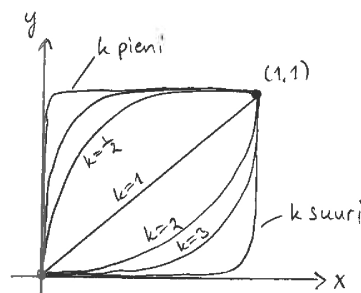
Esim. 16. Olkoon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funktio

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Lasketaan $I = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun c on käyrä

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^k\mathbf{j}, \quad t \in [0, 1],$$

missä parametri $k \in (0, \infty)$ määrää käyrän muodon.



Tapa 1. Huomataan, että $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, kun $\Phi(x, y) = xy$. Tällöin

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(1)) - \Phi(\mathbf{r}(0)) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

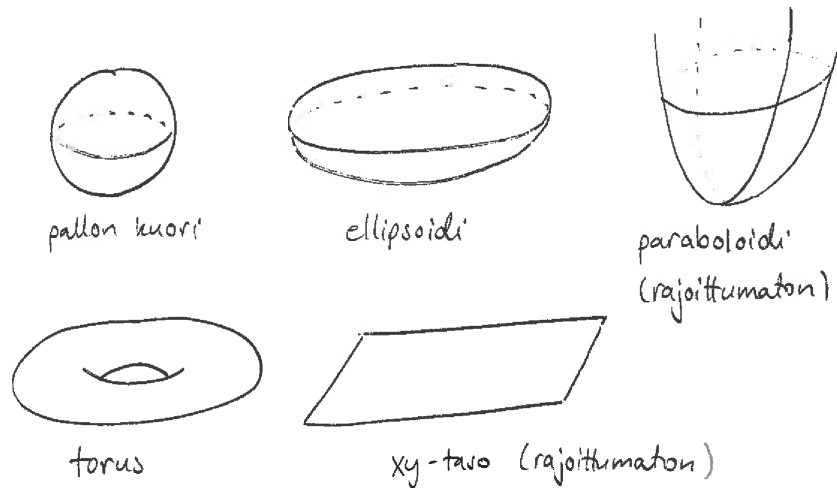
Tapa 2. Koska $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^k \mathbf{i} + t \mathbf{j}$ ja $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + kt^{k-1} \mathbf{j}$, saadaan määritelmän mukaan

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt = \int_0^1 t^k + t \cdot kt^{k-1} dt = \int_0^1 (1+k)t^k dt = 1.$$

Huomataan, että integraalin arvo ei riipu parametrilla k , koska \mathbf{F} on konservatiivinen.

3.4 Parametrisoidut pinnat

Mikä on pinta?

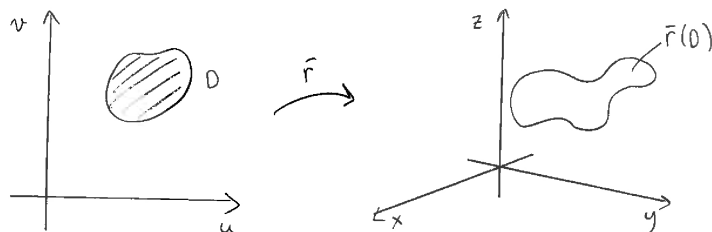


Esim. 17.

Pinta on kaksiulottainen objekti, ja pinnalla olevat pisteet voidaan paikantaa kahden koordinaatin avulla. (Vrt. Käyrän pisteet voidaan esittää yhdellä koordinaatilla eli parametrilla.)

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue ja $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ kuvaus

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D.$$



Tällöin joukko $\mathbf{r}(D) = \{\mathbf{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in D\}$ on parametrisoitu pinta, mikäli vektorit

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$$

ovat lineaarisesti riippumattomat kaikilla $(u, v) \in D$. (Tähän ehtoon palataan kohta.)

Esim. 18. Pinta on $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + u \cos(v)\mathbf{j} + u \sin(v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on x -akselin suuntaan avautuva kartio. Tämä nähdään vaikkapa siitä, että parametrisointi $x = u$, $y = u \sin(v)$, $z = u \cos(v)$ toteuttaa kartion yhtälön $y^2 + z^2 = x^2$.

Esim. 19. Olkoon $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kuvaus $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin $\mathbf{r}(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^3$ eli koko taso \mathbb{R}^2 kuvataan origoon. Tällöin $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{0}$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{0}$ ovat lineaarisesti riippuvia ja $\mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ ei täten ole parametrisoitu pinta.

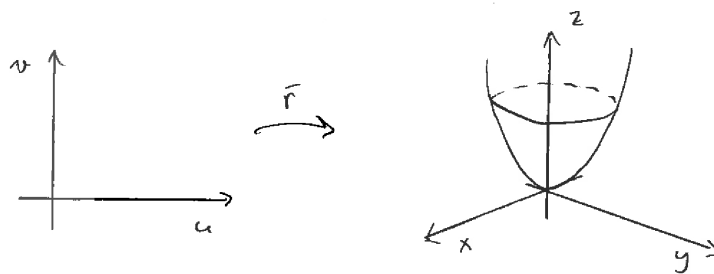
Esim. 20. Olkoon $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kuvaus $\mathbf{r}(u, v) = v\mathbf{k}$. Tällöin

$$\mathbf{r}(\mathbb{R}^2) = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\} = \{v\mathbf{k} \mid v \in \mathbb{R}\} = z\text{-akseli.}$$

Vektorit $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{0}$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{k}$ ovat lineaarisesti riippuvia, joten $\mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ ei ole parametrisoitu pinta.

Esim. 21. Olkoon $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kuvaus

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}.$$

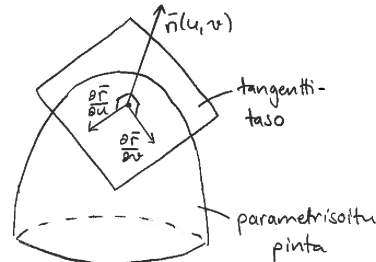


Nyt $\mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ on parametrisoitu pinta, sillä vektorit

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k},$$

ovat lineaarisesti riippumattomia kaikilla $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Huom. Vektorit $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ ovat parametrisoidun pinnan tangenttivektorit pisteessä $\mathbf{r}(u, v)$ (kts. Adams 12.3). Siten ehto vektoreille $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ takaa, että parametrisoidulla pinnalla on joka pisteessä 2-ulotteinen tangenttitaso.



Huom. Oletetaan, että $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

määrää parametrisoidun pinnan.

Asetetaan $\mathbf{n} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v).$$

Tällöin $\mathbf{n}(u, v)$ on kohtisuorassa vektoreihin $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ nähden, joten se on kohtisuorassa pisteessä $\mathbf{r}(u, v)$ olevaa tangenttitasoa vastaan.

Vektori $\mathbf{n}(u, v)$ on siis pinnan normaalivektori.

Lauseke normaalivektorille \mathbf{n}

Koska

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k},$$

saadaan

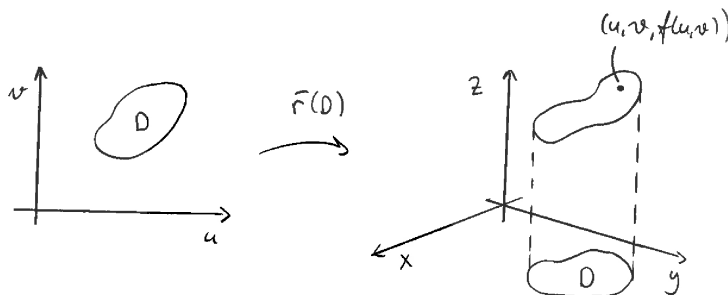
$$\begin{aligned} \mathbf{n}(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{i} - \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Funktion kuvaaja parametrisoituna pintana

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue ja $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ kuvaus muotoa

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}$$

jollain funktiolla $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.



Tällöin $\mathbf{r}(D)$ on aina parametrisoitu pinta:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{k}$$

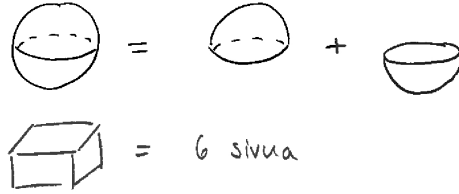
ovat lineaarisesti riippumattomat. Pinnan normaalivektori on

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \dots = -\frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Yleinen pinta

Yleinen pinta saadaan liimaamalla yhteen äärellisen monta parametrisoitua pintaa.

Esim. 22. Pallo ja kuutio ovat yleisiä pintoja:



Huom. Pinnalla voi olla myös reuna. Jos pinnalla ei ole reunaa, niin pinta on suljettu. Edellisen esimerkin pallo ja kuutio ovat suljettuja pintoja.

3.5 Funktion pintaintegraali

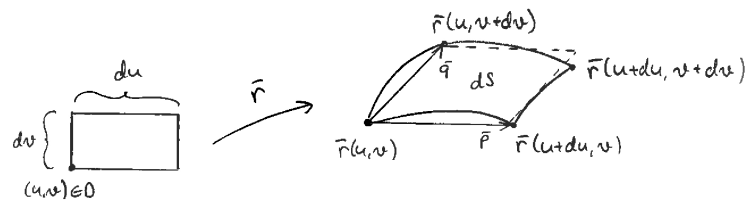
Oletetaan, että $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

määrittää parametrisoidun pinnan $S = \mathbf{r}(D)$.

Oletetaan, että $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ on pinnan massatiheys (yksikkönä kg/m^2).

Otetaan tehtäväksi laskea pinnan massa.



Määritellään

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}(u + du, v) - \mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}(u, v + dv) - \mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$$

$$dS = |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = |\mathbf{n}| du dv.$$

Kaarevan suorakulmion massa on tällöin noin

$$g(\mathbf{r}(u, v))dS = g(\mathbf{r}(u, v))|\mathbf{n}(u, v)|du dv,$$

joten pinnan S kokonaisuudessa saadaan integroimalla

$$\begin{aligned} & \iint_D g(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{n}(u, v)| du dv \\ &= \iint_D g(\mathbf{r}(u, v)) \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} dA =: \iint_S g dS. \end{aligned}$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus tarkoittaa määritelmää/merkintätapaa integraalille $\iint_S g dS$.

Sanotaan, että

$$\iint_S g dS$$

on funktion g pintaintegraali pinnan S yli.

Huom. (Funktion kuvaaja) Jos $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ on muotoa

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k},$$

jollain funktiolla $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, niin pinnan normaalivektori on

$$\mathbf{n}(u, v) = -\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \iint_S g dS &= \iint_D g(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{n}(u, v)| dA \\ &= \iint_D g(\mathbf{r}(u, v)) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1} dA. \end{aligned}$$

Huom. Jos $g \equiv 1$, niin

$$\iint_S 1 dS = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1} dA = S:\text{n ala.}$$

Tulos pätee myös yleisesti pinnoille, eli

$$\iint_S 1 dS = S:\text{n ala.}$$

Esim. 23. Lasketaan kokonaisvaraus pinnalla

$$\mathbf{r}(u, v) = e^u \cos(v)\mathbf{i} + e^u \sin(v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \quad u \in [0, 1], v \in [0, \pi],$$

kun varaustiheys on

$$\delta(u, v) = \sqrt{1 + e^{2u}}.$$

Nyt siis $x(u, v) = e^u \cos(v)$, $y(u, v) = e^u \sin(v)$ ja $z(u, v) = u$, joten

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} e^u \sin(v) & e^u \cos(v) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -e^u \cos(v) \\ \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} e^u \cos(v) & -e^u \sin(v) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = e^u \sin(v) \\ \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} e^u \cos(v) & -e^u \sin(v) \\ e^u \sin(v) & e^u \cos(v) \end{vmatrix} = e^{2u}.\end{aligned}$$

Pintaelementti dS saa siis muodon

$$\begin{aligned}dS &= \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} dA \\ &= \sqrt{e^{2u} \cos^2(u) + e^{2u} \sin^2(u) + e^{4u}} dA = e^u \sqrt{1 + e^{2u}} dA.\end{aligned}$$

Kokonaisvaraus on tällöin

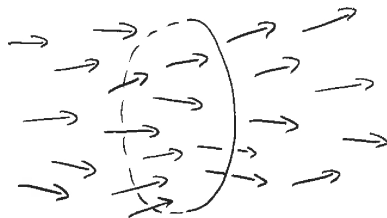
$$\begin{aligned}\iint_S \delta dS &= \int_0^\pi \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2u}} e^u \sqrt{1 + e^{2u}} du dv = \int_0^\pi \int_0^1 (e^u + e^{3u}) du dv \\ &= \int_0^\pi \left(e - 1 + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\right) dv = \pi \left(e + \frac{1}{3}e^3 - \frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

Huom. Esimerkin normaalivektori voidaan laskea myös suoraan määritelmästä

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^u \cos(v) & e^u \sin(v) & 1 \\ -e^u \sin(v) & e^u \cos(v) & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

jollon $dS = |\mathbf{n}(u, v)|dA$. Riippuu siis täysin omasta mielihalusta kumpaa lauseketta haluaa käyttää.

3.6 Suunnistetut pinnat



Mikä on nesteen vuo pinnan läpi? Miten kiinnitetään positiivinen kulkuuunta pinnan läpi?

Määritelmä 3.6.1. Pinta $S \subset \mathbb{R}^3$ on *suunnistuva* jos löytyy jatkuva vektorikenttä $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ siten, että kaikilla $\mathbf{r} \in S$ pätee

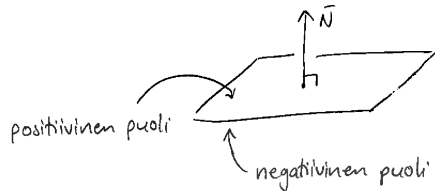
1.) $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ on pinnan S normaali pisteessä \mathbf{r} ,

2.) $|\mathbf{N}(\mathbf{r})| = 1$.

Tällöin \mathbf{N} on suunnistus pinnalle S .

Huom. Jos \mathbf{N} on suunnistus, niin myös $-\mathbf{N}$ on suunnistus. Muita suunnistuksia ei ole.

Huom. Suunnistuvalla pinnalla on kaksi puolta.



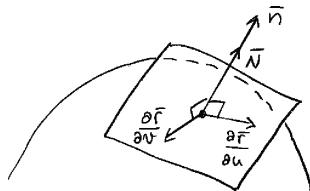
Parametrisoidun pinnan suunnistukset

Olkoon $S = \mathbf{r}(D)$ parametrisoitu pinta, $D \subset \mathbb{R}^2$, ja $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Tällöin

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \text{pinnan } S \text{ normaali ja } |\mathbf{n}| \neq 0,$$

joten pinnan S mahdolliset suunnistukset ovat

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}.$$



Funktion kuvaajan suunnistukset

Olkoon S pinta

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\},$$

missä $D \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ on funktio.

Aiemmin laskettiin pinnan S normaalivektoriksi

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

joten pinnan mahdolliset suunnistukset ovat

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Esim. 24. (Möbiuksen nauha)

1.) Leikkaa paperiliuska:

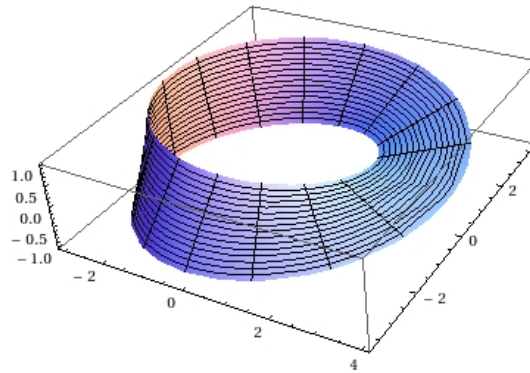


2.) Käännä liuskaa puoli kierrosta:



3.) Liimaa liuskan päädyt yhteen (nuolet vastakkain).

Näin syntyy pinta, jolla on vain yksi puoli ja pinta ei täten ole suunnistuva.



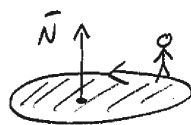
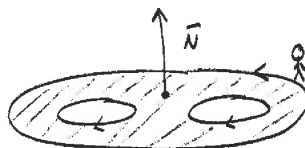
Piirretty Mathematicalla:

```
ParametricPlot3D[{Cos[t](3+r Cos[t/2]), Sin[t](3+r Cos[t/2]),
r Sin[t/2]}, {r, -1, 1}, {t, 0, 2 Pi}]
```

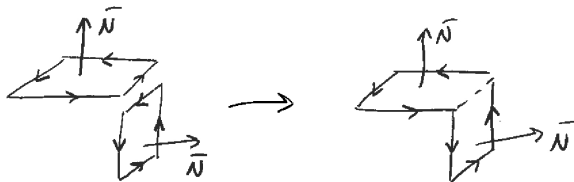
Reunan suunnistus

Olkoon S pinta, jolla on suunnistus N . Jos c on suljettu reunakäyrä pinnalle S , niin c suunnistetaan (eli kiinnitetään c :n positiivinen kiertosuunta) säännöllä:

Pinnan S reunakäyrän c positiivinen kiertosuunta on kiertosuunta, jossa S jää vasemmalle puolelle, kun ollaan pinnan positiivisella puolella.

**Esim. 25.****Esim. 26.**

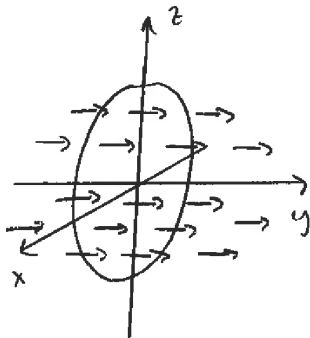
Huom. Suunnistettuja reunallisia pintoja voi liimata yhteen, kunhan liittymäkohdan suunnistukset menevät kohdakkain.



3.7 Vektorikentän pintaintegraali eli vuointegraali

Esim. 27. Olkoon $\mathbf{v} = C\mathbf{j}$ nesteen nopeuskenttä, missä $C > 0$ (yksikkönä m/s) on nesteen nopeus.

Olkoon S R -säteinen kiekko (x, z) -tasossa.



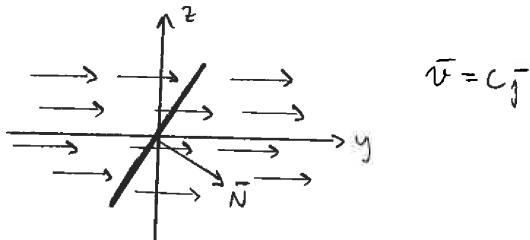
Lasketaan nesteen virtausnopeus kiekon S läpi (= nesteen vuo S :n läpi).

Yhden sekunnin aikana kiekon läpi virtaa tilavuus

$$\Delta V = \pi R^2 \cdot C \cdot 1 \quad (\text{yksikkönä } \text{m}^2 \cdot \text{m/s} \cdot \text{s} = \text{m}^3).$$

Vuo on siten $\pi R^2 C$.

Esim. 28. Lasketaan vuo kiekon läpi, kun kiekon normaalivektori on \mathbf{N} (eli kiekko ei olekaan kohtisuorassa virtauskenttää vastaan), $|\mathbf{N}| = 1$.



Kirjoitetaan \mathbf{v} kahdessa osassa:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}) = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

missä $\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}$ on vektorin \mathbf{N} suuntainen osa ja $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}$ on vektoria \mathbf{N} kohtisuorassa oleva osa. Siten \mathbf{v}_{\perp} ei aiheuta vuota kiekon S läpi ja vuo kiekon S läpi on

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})\pi R^2.$$

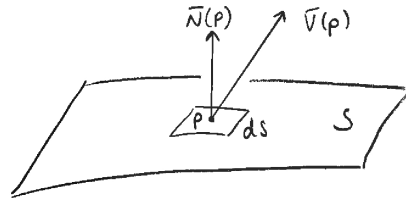
Huomioi, että koska $|\mathbf{N}| = 1$, on $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}$ vektorin \mathbf{v} projektio vektorin \mathbf{N} suuntaan.

Huom. \mathbf{N} määrää nesteen positiivisen virtaussuunnan pinnan S läpi.

Vuo yleisen pinnan läpi

Lasketaan nyt vuo pinnan S läpi, kun pinta ei ole välttämättä tason osa ja nesteen nopeuskenttä ei ole vakio. Olkoon siis $S \subset \mathbb{R}^3$ pinta ja $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sen suunnistus. Olkoon $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nesteen nopeuskenttä.

Tarkastellaan vuota differentiaalisen pinta-ala-alkion dS läpi:



Vuo pinnan dS läpi on $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} dS$ ja näin ollen kokonaisvuo pinnan S läpi on integraali

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Määritellään:

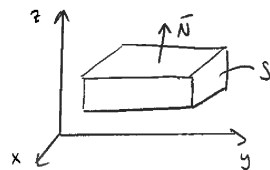
$$\boxed{\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} dS.}$$

Sanotaan, että $\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$ on vektorikentän \mathbf{V} pintaintegraali pinnan S yli (eli vuointegraali S :n yli).

Huom. Jos \mathbf{V} on yhdensuuntainen \mathbf{N} :n kanssa, niin $\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} > 0$.

Huom. Jos S :n suunnistus vaihtuu ($\mathbf{N} \rightarrow -\mathbf{N}$), niin vastaavasti vuointegraalin merkki vaihtuu.

Esim. 29. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, ja S on laatikko, jonka tahkot ovat koordinaattitasojen suuntaisia.



Lasketaan

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{etusivu}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} dS + \iint_{\text{takasivu}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i}) dS + \iint_{\text{oikea sivu}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} dS \\
&\quad + \iint_{\text{vasen sivu}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j}) dS + \iint_{\text{kansi}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dS + \iint_{\text{pohja}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS \\
&= \iint_{\text{etusivu}} A dS + \iint_{\text{takasivu}} (-A) dS + \iint_{\text{oikea sivu}} B dS \\
&\quad + \iint_{\text{vasen sivu}} (-B) dS + \iint_{\text{kansi}} C dS + \iint_{\text{pohja}} (-C) dS = 0.
\end{aligned}$$

Tulkinta: Jos \mathbf{F} on esim. nesteen nopeuskenttä, niin laatikkoon tulee yhtä paljon nestettä kuin siitä poistuu.

Huom. Jos S on parametrisoitu pinta $S = \mathbf{r}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, niin tällöin

$$\mathbf{N} = \pm \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}, \quad \text{missä } \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},$$

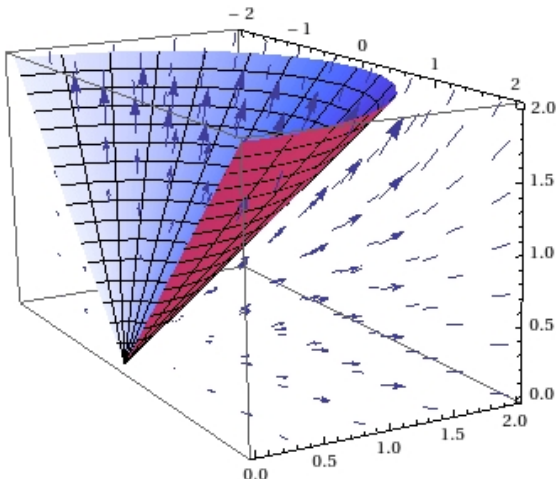
ovat S :n mahdolliset suunnistukset. Tällöin

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{r}(u, v))) |\mathbf{n}(u, v)| dA \\
&= \pm \iint_D (\mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{n}(u, v)}{|\mathbf{n}(u, v)|}) |\mathbf{n}(u, v)| dA = \pm \iint_D \mathbf{V}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) dA,
\end{aligned}$$

missä \pm riippuu pinnan S suunnistuksesta.

Esim. 30. Lasketaan vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vuo ylöspäin läpi parametrisoidun pinnan

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos(v)\mathbf{i} + u \sin(v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D = [0, 2] \times [0, \pi].$$



Lasketaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \cos(v)\mathbf{i} + \sin(v)\mathbf{j} + \mathbf{k} \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= -u \sin(v)\mathbf{i} + u \cos(v)\mathbf{j},
\end{aligned}$$

joten

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 1 \\ -u \sin(v) & u \cos(v) & 0 \end{vmatrix} = -u \cos(v) \mathbf{i} - u \sin(v) \mathbf{j} + u \mathbf{k}.$$

Koska lasketaan vuota ylöspäin ja vektorin \mathbf{n} z -komponentti on positiivinen, valitaan $\mathbf{N} = +\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$.

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) dA = \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 (u \cos(v) \mathbf{i} + u \sin(v) \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}) \cdot (-u \cos(v) \mathbf{i} - u \sin(v) \mathbf{j} + u \mathbf{k}) dudv \\ &= \int_0^\pi \int_0^2 (-u^2 + u^3) dudv = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Huom. Jos $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}$, niin S on funktion f kuvaaja. Tällöin

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

ja

$$\iint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{V} \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA.$$

Tässä $+$ -merkki tarkoittaa, että \mathbf{N} osoittaa ylöspäin ja positiivinen virtaussuunta on tällöin ylöspäin pinnan läpi. Vastaavasti $-$ -merkki tarkoittaa, että positiivinen virtaussuunta on alaspäin.

Esim. 31. Lasketaan vektorikentän $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vuo ylöspäin läpi pinnan $z = f(x, y) = 2 - x^2 - 2y^2$, missä $z \geq 0$.

Pinta voidaan parametrisoida ottamalla parametreiksi $x = u$ ja $y = v$, jolloin parametrisointi on

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k},$$

missä

$$\begin{aligned} (u, v) \in D &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid f(u, v) \geq 0\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - u^2 - 2v^2 \geq 0\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in [-\sqrt{2 - 2v^2}, \sqrt{2 - 2v^2}], v \in [-1, 1]\}. \end{aligned}$$

Joukko D on siis (x, y) -tason ellipsi. Näin ollen

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dudv \\ &= \iint_D (u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \cdot (2u\mathbf{i} + 4v\mathbf{j} + \mathbf{k}) dudv = \iint_D (2u^2 + 4v^2) dudv. \end{aligned}$$

Tehdään tässä muuttujanvaihto $u = \sqrt{2}a$ ja $v = b$, jolloin $du dv = \sqrt{2} da db$ ja uudeksi integroimisalueeksi saadaan yksikkökierokko $a^2 + b^2 \leq 1$. Siten

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{a^2+b^2 \leq 1} (4a^2 + 4b^2)\sqrt{2} da db = 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\phi = 2\sqrt{2}\pi,$$

missä tehtiin vielä muuttujanvaihto napakoordinaatteihin.

4. Vektorianalyysi

4.1 Gradientti, divergenssi ja roottori

Miten vektorikentän muutoksia voidaan tutkia, eli miten sitä voidaan derivoida?

Aiemmalla kurssilla määriteltiin funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gradientti

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Gradientin määritelmän motivaationa oli toisaalta selvittää funktion kasvunopeus annettuun suuntaan (f kasvaa voimakkaimmin suuntaan ∇f) ja toisaalta saada vastakkainen operaatio integroinnille: Jos c on käyrä $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, niin

$$\int_c \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Miten voidaan nyt määritellä vastaavia derivointioperaatioita funktioille $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$?

Määritelmä 4.1.1. Olkoon $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä ja $D \subset \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Tällöin vektorikentän \mathbf{F} divergenssi on skalaarifunktio

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Vektorikentän \mathbf{F} roottori on vektorikenttä $\nabla \times \mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Huom. Merkitään myös $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F}$ ja $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$.

Huom. $\nabla \cdot \mathbf{F}$ on skalaarifunktio, siis funktio $\mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$, ja $\nabla \times \mathbf{F}$ on vektorikenttä, siis funktio $\mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Vektorianalyysin tavoitteita

1.) Tulkinta vektorikentän divergenssille ja roottorille - mitä ne kuvaavat?

2.) Stokesin lause: Jos $S \subset \mathbb{R}^3$ on suunnistettu pinta ja c on sen reunakäyrä, niin

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

3.) Gaussin lause: Jos $D \subset \mathbb{R}^3$ on kappale ja pinta S on sen reuna, niin

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

kun S on suunnistettu ulkonormaalilla.

4.) Greenin lause = Stokesin lause tasossa.

Huom. Vertaa edellisiä lauseita yksiulotteiseen integraaliin $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ ja viivaintegraaliin $\int_c \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$. Kyseessä on siis näiden yleistykset kaksi- ja kolmiulotteisille kappaleille.

Esim. 1. Olkoon \mathbf{F} vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}.$$

Lasketaan $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ja $\nabla \times \mathbf{F}$:

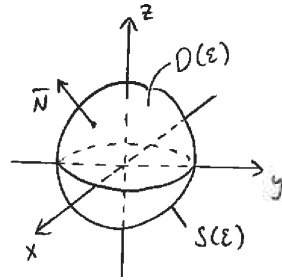
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (xy\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}) = y + 2y + y = 4y.$$

ja

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix} = (z + 2z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (0 - x)\mathbf{k} = 3z\mathbf{i} - x\mathbf{k}.$$

Divergenssin tulkinta

Olkoon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nesteen nopeuskenttä ja $D(\epsilon)$ pieni ϵ -säteinen origokeskinen kuula sekä $S(\epsilon)$ kuulan $D(\epsilon)$ reunapinta. Suunnistetaan pinta $S(\epsilon)$ sen ulkonormaalilla.



Gaussin lause (jota ei kylläkään vielä ole johdettu) antaa

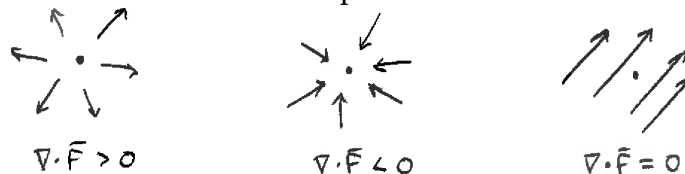
$$\iint_{S(\epsilon)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{D(\epsilon)} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \approx (\nabla \cdot \mathbf{F})(0,0,0) \iiint_{D(\epsilon)} 1 dV,$$

sillä $(\nabla \cdot \mathbf{F})(x, y, z) \approx (\nabla \cdot \mathbf{F})(0,0,0)$ kun ϵ on hyvin pieni.

Jos siis $(\nabla \cdot \mathbf{F})(0,0,0) > 0$, niin $\iiint_{S(\epsilon)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} > 0$ kun $\epsilon > 0$ on pieni. Tämä tarkoittaa sitä, että pinnan $S(\epsilon)$ läpi virtaa nestettä ulos kaikilla pienillä $\epsilon > 0$ arvoilla. Origossa on siis lähde.

Vastaavasti voidaan päätellä, että jos $(\nabla \cdot \mathbf{F})(0,0,0) < 0$, niin origossa on nielu.

Toisaalta jos $(\nabla \cdot \mathbf{F})(0,0,0) = 0$, niin tällöin origoon tulee yhtä paljon nestettä kuin sielä lähtee pois.



Tulkinta: $\nabla \cdot \mathbf{F}(P)$ kuvaa vektorikentän lähteisyyttä pisteessä $P \in \mathbb{R}^3$.

Sanotaankin, että jos $\nabla \cdot \mathbf{F}(P) = 0$ kaikilla $P \in D$, niin vektorikenttä \mathbf{F} on lähteetön alueessa D .

Esim. 2. Olkoon $\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Tällöin $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ja \mathbf{F} on lähteetön.

Esim. 3. Jos $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ on lähteetön, $D_1 \subset D$ on kappale ja S on kappaleen D_1 suljettu pinta, niin Gaussin lauseen mukaan

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 0.$$

Distribuutiot ja deltafunktiot

Olkoon $l(x)$ x -akselilla sijaitsevan langan massajakauma (yksikkönä kg/m).

Tällöin langan kokonaismassa on

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} l(x) dx.$$

Entä jos kaikki massa onkin kasaantunut yhteen pisteeseen massaksi $m = 1$. Edelleen pitäisi olla $\int_{-\infty}^{\infty} l(x) dx = m = 1$, mutta $l(x) = 0$, kun $x \neq 0$.

Näin ollen tiheyden origossa täytyy olla ääretön, eli $l(0) = \infty$. Tällainen l ei voi olla funktio: Mikäli funktion arvo poikkeaa nolasta vain yksittäisissä pisteissä, niin sen integraalin täytyy olla nolla. Tällaista pistemassan tiheysjakaumaa voidaan ajatella yleistettynä funktiona eli distribuutiona.

Olkoon

$$d_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{kun } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{kun } |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

ja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sileä funktio (äärettömän monta kertaa derivoituva).

Tällöin

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)f(x) dx &= \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x) dx \\ &= \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \left(f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots \right) dx \\ &= f(0) + 0 + f''(0)\frac{1}{3!}\frac{1}{n^2} + 0 + f^{(4)}(0)\frac{1}{5!}\frac{1}{n^4} + \dots \rightarrow f(0), \quad \text{kun } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)f(x) dx = f(0).$$

Raja-arvo " $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(x)$ " on Diracin deltafunktio, joka ei siis varsinaisesti ole funktio vaan distribuutio. Siten sille ei voida kirjoittaa lauseketta, vaan se määritellään yhtälöllä

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx = f(0), \quad \text{kaikilla sileillä funktioilla } f.$$

Huom. Tekemällä muuttujanvaihto, huomataan, että myös

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t)f(t) dt = f(x).$$

Esim. 4. Vektorikentälle $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ pätee, että $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, kun $(x, y, z) \neq \bar{0}$. Kuitenkin \mathbf{F} aiheuttaa vuon (suuruus $4\pi m$) minkä tahansa origokeskisen pallopinnan läpi. Tämän vektorikentän tapauksessa divergenssiä voidaan ajatella distribuutiona

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 4\pi m \delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

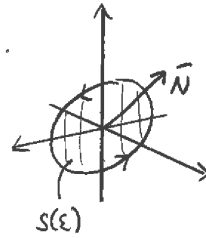
jolloin

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) dV = 4\pi m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = 4\pi m.$$

Ajatuksena tämä siis tarkoittaa, että vektorikenttä on lähteetön kaikkialla muualla paitsi origossa, jossa sillä on pistemäinen lähde, joka aiheuttaa oikean suuruisen vuon minkä tahansa tarkasteltavan pinnan läpi.

Roottorin tulkinta

Olkoon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä ja $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{N}| = 1$. Olkoon $S(\epsilon)$ ϵ -säteinen kiekko, jonka suunnistus on \mathbf{N} ja reunakäyrä c .



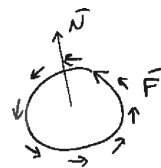
Stokesin lauseen mukaan tällöin

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S(\epsilon)} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S(\epsilon)} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS \approx \nabla \times \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{N} \iint_{S(\epsilon)} 1 dS = \nabla \times \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{N} \cdot \pi \epsilon^2.$$

Saatiin siis $\nabla \times \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Mitä tämä sitten tarkoittaa? Otetaan pari esimerkkiä.

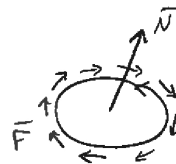
Esim. 5. Jos \mathbf{F} "seurailee" kiekon $S(\epsilon)$ reunakäyrää c :



$$\Rightarrow \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt > 0,$$

ja tällöin myös $\nabla \times \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{N} > 0$.

Jos \mathbf{F} kulkee reunakäyrää c "vastaan":

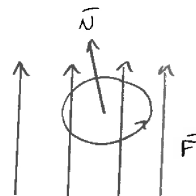


$$\Rightarrow \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} < 0,$$

jolloin $\nabla \times \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{N} < 0$.

Esim. 6. Olkoon $\mathbf{F} = \mathbf{j}$ ja c yksikköympyrä, jonka parametrisointi on

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Tällöin

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \mathbf{j} \cdot (-\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}) dt = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = 0.$$

Tulkinta:

Jos siis \mathbf{F} pyörii reunakäyrän c suunnistuksen suuntaisesti, niin $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$, jos se pyörii reunakäyrän suunnistusta vastaan, niin $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} < 0$ ja jos \mathbf{F} ei pyöri, niin $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Siten integraali $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ mittaa vektorikentän \mathbf{F} pyörimistä \mathbf{N} -vektorin ympäri. Tällöin myös $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ mittaa pyörimistä vektorin \mathbf{N} ympäri.

Lisäksi $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ on suurin kun $\nabla \times \mathbf{F}$ ja \mathbf{N} ovat samansuuntaisia. Tämä siis tarkoittaa sitä, että \mathbf{F} pyörii voimakkaimmin sen kiekon reunakäyrän suuntaisesti, jolle

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{F}(0)}{|\nabla \times \mathbf{F}(0)|}.$$

Tämä siis tarkoittaa sitä, että

\mathbf{F} pyörii voimakkaimmin $\nabla \times \mathbf{F}$ -akselin ympäri.

(Vrt. Funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kasvaa voimakkaimmin suuntaan ∇f .)

Sanotaan:

Jos vektorikentälle $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ pätee $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ alueessa D , niin \mathbf{F} on pyörteetön.

Esim. 7. Olkoon $\mathbf{F} = -\Omega(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$. Tällöin kentän divergenssi on

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

eli kenttä on lähteetön. Kentän roottori on

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\Omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\Omega y) \right) \mathbf{k} = 2\Omega \mathbf{k}.$$

Jos siis $\Omega > 0$, niin kenttä pyörii positiivisen z -akselin ympäri ((x, y) -tasossa vastapäivään).

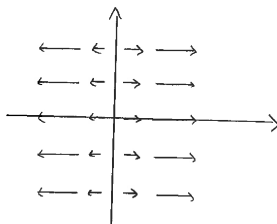
Esim. 8. Jos $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$, niin

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$$

eli vektorikentällä on lähteisyyttä, mutta

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0,$$

eli kenttä on pyörteetön.



4.2 Laskusääntöjä gradientille, divergenssille ja roottorille

Olkoon $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ sileä funktio ja $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ sileä vektorikenttä

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

ja $D \subset \mathbb{R}^3$.

Tällöin siis

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{"nabla"})$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{gradientti})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (\text{divergenssi})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (\text{roottori})$$

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (\text{missä } \Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \text{ on Laplace-operaattori})$$

$$\Delta \mathbf{F} = (\Delta F_1)\mathbf{i} + (\Delta F_2)\mathbf{j} + (\Delta F_3)\mathbf{k}.$$

(Jos $\Delta \phi = 0$, sanotaan että ϕ on harmoninen.)

Huom.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = 0. \end{aligned}$$

Siten konservatiivisen vektorikentän roottori on aina nolla, eli konservatiivinen vektorikenttä on pyörteetön.

Huom. Aiemmin todettiin, että jos $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ on konservatiivinen, niin

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

Tämä on yhtäpitävää ehdon $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ kanssa.

Huom. Vastaavasti myös $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ eli vektorikenttä $\nabla \times \mathbf{F}$ on aina lähteetön:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{j} \right] \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Tulon derivoimissääntöjä

Olkoon $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sileitä funktoita ja $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sileitä vektorikenttiä. Tällöin:

$$\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi)$$

$$\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

$$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).$$

Esim. 9. Viimeisestä kohdasta seuraa: Jos \mathbf{F} ja \mathbf{G} ovat pyörteettömiä vektorikenttiä, niin $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ on lähteetön.

Huom. Pyörteetön vektorikenttä \mathbf{F} voidaan esittää skalaaripotentialin ϕ avulla $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Vastaavasti lähteetön vektorikenttä \mathbf{F} voidaan esittää vektoripotentialin Φ avulla $\mathbf{F} = \nabla \times \Phi$. (Tämän todistus ohitetaan ainakin toistaiseksi.)

Laskusääntöjen systemaattinen käsittely *

Merkintöjen lyhentämiseen ja derivoimissääntöjen systemaattisen käsittelyn helpottamiseen voidaan käyttää Einsteinin summaussääntöä, Kroneckerin deltaa ja Levi-Civitan perumataatiosymbolia.

Einsteinin summaussääntö

Jos indeksi esiintyy samassa lausekkeessa kaksi kertaa, sen yli summaataan. Esimerkiksi seuraavat merkinnät ovat siis Einsteinin summaussäännön mukaisia:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_i b_i,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \partial_i F_i = D_i F_i.$$

Esim. 10. Merkintä $a_i b_i c_j d_j$ tarkoittaa samaa kuin $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$. Matriisitulon elementti ij puolestaan voidaan esittää lyhyesti $(AB)_{ij} = a_{ik} b_{kj}$.

Kroneckerin delta

Määritellään

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Kroneckerin deltalla on nn. seuraavia ominaisuuksia:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\begin{aligned} a_i \delta_{ij} &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j \\ a_{ij} \delta_{ij} &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{ii} \\ a_i b_j \delta_{ij} &= a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Levi-Civitan permutaationsymboli ($n = 3$)

Määritellään

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{jos indekseistä jotkin kaksi ovat samoja} \\ 1, & \text{jos } ijk = 123, 231 \text{ tai } 312 \\ -1, & \text{jos } ijk = 132, 321 \text{ tai } 213 \end{cases} .$$

Huom: Aina pätee $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$ ja $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$.

Esim. 11. Pätee

$$\epsilon_{ijk} a_i b_j = \begin{cases} \epsilon_{123} a_1 b_2 + \epsilon_{213} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1, & \text{kun } k = 3 \\ \epsilon_{132} a_1 b_3 + \epsilon_{312} a_3 b_1 = a_3 b_1 - a_1 b_3, & \text{kun } k = 2 \\ \epsilon_{231} a_2 b_3 + \epsilon_{321} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2, & \text{kun } k = 1 \end{cases} .$$

Tästä huomataan, että $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j$, missä $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k$ tarkoittaa kyseisen ristitulovektorin k :nnetta komponenttia.

Esim. 12. Skalaarikolmitulo voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = a_i \epsilon_{jki} b_j c_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k .$$

Näin ollen 3×3 -matriisin determinantti voidaan kirjoittaa

$$\det A = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} ,$$

sillä kyseessä on skalaarikolmitulo.

Lemma 4.2.1.

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Lemman todistamiseksi täytyy tarkastella mahdolliset vaihtoehdot sille, millä tavalla lausekkeessa jotkin indekseistä voivat olla samoja, ja laskea yhtälön eri puolten arvot näissä tilanteissa.

Esim. 13. Johdetaan kaava $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$.

Selvitetään ensiksi, miten voidaan kirjoittaa k :s komponentti vektorista $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$: Käytetään aluksi kahdesti edellä todettua tietoa $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j$ sovellettuna ensin vektoreihin ∇ ja $\nabla \times \mathbf{F}$ ja sitten vektoreihin ∇ ja \mathbf{F} . Saadaan

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}))_k = \epsilon_{ijk} \partial_i [\nabla \times \mathbf{F}]_j = \epsilon_{ijk} \partial_i (\epsilon_{lmj} \partial_l \mathbf{F}_m) .$$

Levi-Civita-symbolit ovat vakioita (kun indeksit on kiinnitetty), joten niitä voidaan siirrellä vapaasti. Käytetään myös edellistä lemmaa, ja saadaan

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}))_k &= \epsilon_{ijk} \partial_i [\nabla \times \mathbf{F}]_j = \epsilon_{ijk} \partial_i (\epsilon_{lmj} \partial_l \mathbf{F}_m) \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmj} \partial_i \partial_l \mathbf{F}_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{jlm} \partial_i \partial_l \mathbf{F}_m \\
 &= (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) \partial_i \partial_l \mathbf{F}_m \\
 &= \partial_i \partial_k \mathbf{F}_i - \partial_i \partial_i \mathbf{F}_k = \partial_k (\partial_i \mathbf{F}_i) - \Delta \mathbf{F}_k \\
 &= [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})]_k - [\Delta \mathbf{F}]_k
 \end{aligned}$$

eli kaikki haluttu kaava pätee komponenteittain ja siten myös vektoreille kokonaisuudessaan.

4.3 Gaussin lause

Lause 1 (Gaussin lause). *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ kappale siten, että D :n reuna on pinta S ja S on suunnistettu ulkonormaalilla \mathbf{N} . Tällöin*

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

kun $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ on sileä vektorikenttä.

(Vrt. Analyysin peruslause: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.)

Tutkitaan seuraavaksi mistä Gaussin lause johtuu.

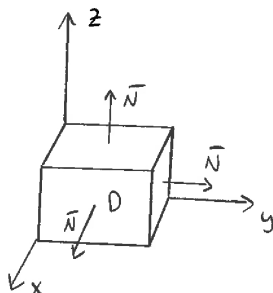
Merkitään $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$, jolloin Gaussin lause sanoo, että

$$\iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV = \iint_S (F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} + F_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{N} + F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}) dS.$$

Riittää siis osoittaa, että

$$\begin{cases} \iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dV = \iint_S F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS \\ \iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dV = \iint_S F_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{N} dS \\ \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} dV = \iint_S F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} dS. \end{cases}$$

Oletetaan, että D on laatikko $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Olkoon \mathbf{N} laatikon ulkonormaali. Näytetään, että Gaussin lause tällöin pätee.



Aloitetaan yo. yhtälöryhmän ensimmäisestä yhtälöstä, jolloin

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (F_1(1, y, z) - F_1(0, y, z)) dy dz. \end{aligned}$$

Koska kuution etusivulla $\mathbf{N} = \mathbf{i}$, pätee

$$\iint_{\text{etusivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS = \int_0^1 \int_0^1 F_1(1, y, z) dy dz,$$

ja vastaavasti takasivulla $\mathbf{N} = -\mathbf{i}$, saadaan

$$\iint_{\text{takasivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS = - \int_0^1 \int_0^1 F_1(0, y, z) dy dz.$$

Lisäksi sivusivuilla on $\mathbf{N} = \pm \mathbf{j}$ ja kannessa/pohjassa on $\mathbf{N} = \pm \mathbf{k}$. Näin ollen näillä sivuilla aina $\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} = 0$ ja saadaan

$$\begin{aligned} &\iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dV \\ &= \iint_{\text{etusivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{\text{takasivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{\text{sivusivut}} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{\text{kansi \& pohja}} F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS \\ &= \iint_S F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{N} dS. \end{aligned}$$

Tämä todistaa yhtälöryhmän ensimmäisen yhtälön. Samoin voidaan näyttää, että myös toinen ja kolmas yhtälöryhmän yhtälö pätee. Gaussin lause siis pätee kuutiolle D . (kts. Adams todistus yleisemmälle alueelle D .)

Esim. 14. Olkoon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorikenttä

$$\mathbf{F} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

ja D laatikko, jonka pinta S on suunnistettu ulkonormaalilla \mathbf{N} .

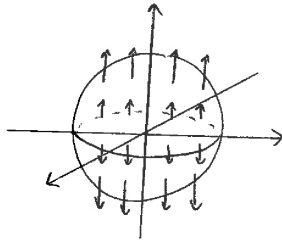
Lasketaan \mathbf{F} :n vuo ulos laatikon pinnasta S :

$$V_{\text{uo}} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_D (0 + 0 + 0) dV = 0.$$

Koska vektorikenttä on vakio, laatikkoon siis virtaa yhtä paljon tavaraa kuin siitä virtaa pois.

Esim. 15. Lasketaan vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$ vuo ulos R -säteisestä pallosta

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$



Olkoon S pallon pinta, jolloin vuo ulospäin pinnasta S on

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_D 1 dV = \frac{4}{3}\pi R^3 > 0.$$

Myös kuvasta voidaan päätellä, että vuon täytyy olla positiivinen.

Esim. 16. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$, jonka reunapinta S on suunnistettu ulkonormaalilla. Olkoon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nesteen nopeuskenttä.

Tällöin $\nabla \cdot \mathbf{F}(P)$ kuvaa vektorikentän lähteisyyttä pisteessä $P \in D$. Vastaavasti

$$I = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

kuvaa vektorikentän lähteisyyttä kappaleessa D .

Perustelu: Gaussin lauseen mukaan

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \text{nesteen vuo pinnan } S \text{ läpi.}$$

Jos $I > 0$, niin vuo on positiivinen ja tällöin pinnan S läpi tulee enemmän nestettä ulos kuin menee sisään. Kappale D toimii siis lähteenä.

Jos $I < 0$, niin vuo on negatiivinen ja pinnan S läpi menee enemmän nestettä sisään kuin siitä tulee ulos. Kappale D toimii tällöin nieluna.

Jos $I = 0$, niin vuo on 0 ja pinnan S läpi menee saman verran nestettä kumpaankin suuntaa, eli kappale D ei ole lähde eikä nielu.

Esim. 17. Tarkastellaan origossa sijaitsevan pistevarauksen q aiheuttamaa sähkökenttää

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Sähkökentän vuo ulospäin R -säteisestä origokeskisestä pallosta S_R on

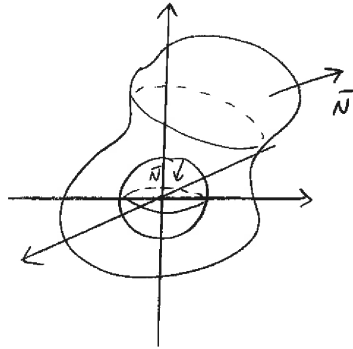
$$\iint_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Pallopinnan ulkonormaali $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, joten

$$\begin{aligned} \iint_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_R} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^4} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_R} \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \iint_{S_R} 1 dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

sillä R -säteisellä pallopinnalla on luonnollisesti $|\mathbf{r}| = R$.

Huom. Sama tulos saadaan itse asiassa minkä tahansa suljetun pinnan läpi, kunhan origo jää pinnan sisään.



Olkoon D origon sisältävä kappale ja S sen pinta suunnistettuna ulkonormaalilla. Olkoon $R > 0$ sellainen, että pallopinta S_R jää täysin pinnan S sisäpuolelle. Merkitään kappaleella D_{ontto} sitä kappaletta, joka jää pallopinnan S_R ja pinnan S väliin ja olkoon S_{ontto} tämän kappaleen pinta.

Tällöin Gaussin lauseen mukaan

$$\iiint_{D_{\text{ontto}}} \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \iint_{S_{\text{ontto}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Huomaa, että pinnan S_{ontto} suunnistus pinnalla S_R on vastakkaismerkinen pallopinnan S_R ulkonormaalien kanssa.

Tällöin origossa sijaitsevan pistevarauksen q aiheuttama vuo pinnan S läpi on

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_{D_{\text{ontto}}} \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV + \iint_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{D_{\text{ontto}}} \nabla \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, dV + \frac{q}{\epsilon_0} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{D_{\text{ontto}}} \left(\frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \, dV + \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Saatua kaavaa

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

kutsutaan sähköfysiikassa Gaussin laiksi.

4.4 Greenin lause

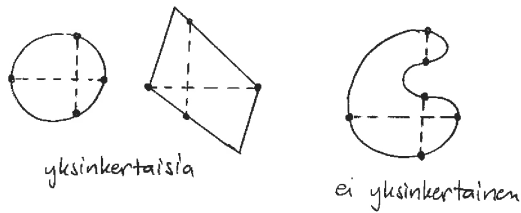
Yksinkertainen ja säännöllinen alue

Alue $D \subset \mathbb{R}^2$ on yksinkertainen, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

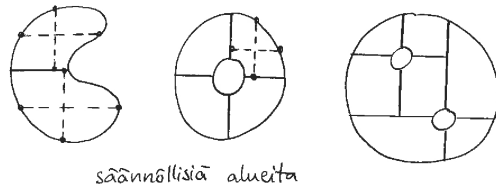
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b), y \in (c(x), d(x))\}$$

sekä muodossa

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a(y), b(y)), y \in (c, d)\}.$$



Alue on säännöllinen, jos se on rajoitettu ja se voidaan jakaa äärellisen moneen yksinkertaiseen osaan.



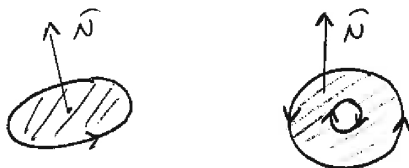
Esim. 18. \mathbb{R}^2 ei ole säännöllinen (ei ole rajoitettu). Jos alueessa on äärettömän monta reikää, se ei ole säännöllinen.

Reunakäyrien suunnistus

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ säännöllinen alue ja

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}.$$

Valitaan alueelle S suunnistus $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. Tällöin S on suunnistettu pinta \mathbb{R}^3 :ssa ja S :n reunakäyrät suunnistuvat.



Esim. 19.

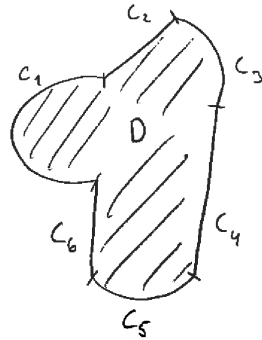
Kun kierretään reunakäyrää positiiviseen suuntaan, niin alueen D pitää jäädä vasemmalle puolelle.

Lause 2 (Greenin lause). *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ säännöllinen alue, jonka suljetut reunakäyrät c_1, c_2, \dots, c_N ovat paloittain sileitä eivätkä leikkaa itseään.*

Tällöin

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA = \sum_{i=1}^N \int_{c_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kun $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ on sileä vektorikenttä.



Huom. Jos $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$, niin $\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$. Tason vektorikenttä voi siis pyöriä ainoastaan z -akselin ympäri. Tällöin siis $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

Huom. $\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, sillä D on (x, y) -tason alue.

Näytetään seuraavaksi, että Greenin lause pätee, kun D on yksinkertainen alue ja c on D :n reunakäyrä. Tällöin

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b), y \in (c(x), d(x))\}$$

ja toisaalta

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a(y), b(y)), y \in (c, d)\}.$$

Greenin lause vektorikentälle $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ on tällöin

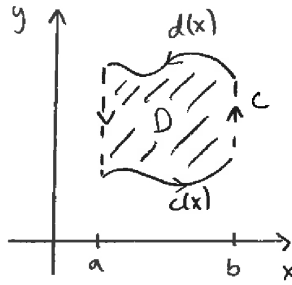
$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \int_c (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Riittää siis osoittaa, että

$$\begin{cases} \iint_D -\frac{\partial F_1}{\partial y} dA = \int_c F_1\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}, \\ \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dA = \int_c F_2\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}. \end{cases}$$

Ensimmäisen yhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy dx = \int_a^b (-F_1(x, d(x)) + F_1(x, c(x))) dx \\ &= \int_a^b F_1(x, c(x)) dx + \int_b^a F_1(x, d(x)) dx. \end{aligned}$$



Jaetaan sitten yhtälön oikean puolen integraali neljään osaan

$$\int_c F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{alareuna}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\text{oikea sivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\text{yläreuna}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\text{vasen sivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}$$

Alareuna: Alareunaa vastaavan käyrän parametrisointi on $\mathbf{r}_1(x) = x\mathbf{i} + c(x)\mathbf{j}$, $x \in (a, b)$ ja siten $\mathbf{r}'_1(x) = \mathbf{i} + c'(x)\mathbf{j}$ ja

$$\int_{\text{alareuna}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F_1(\mathbf{r}_1(x)) \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}'_1(x) dx = \int_a^b F_1(x, c(x)) dx.$$

Oikea sivu: Oikeaa reunaa vastaavan käyrän parametrisointi on $\mathbf{r}_2(y) = b\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $y \in (c(b), d(b))$, joten $\mathbf{r}'_2(y) = \mathbf{j}$ ja

$$\int_{\text{oikea sivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = \int_{c(b)}^{d(b)} F_1(\mathbf{r}_2(y)) \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}'_2(y) dy = 0.$$

Vasen sivu: Samoin saadaan

$$\int_{\text{vasen sivu}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Yläreuna: Yläreunaa vastaavan käyrän parametrisointi on $\mathbf{r}_4(x) = x\mathbf{i} + d(x)\mathbf{j}$, $x \in (a, b)$, ja siten $\mathbf{r}'_4(x) = \mathbf{i} + d'(x)\mathbf{j}$. Siten

$$\int_{\text{yläreuna}} F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F_1(\mathbf{r}_4(x)) \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}'_4(x) dx = \int_a^b F_1(x, d(x)) dx.$$

Yhteensä siis saatiin

$$\int_c F_1 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F_1(x, c(x)) dx + \int_a^b F_1(x, d(x)) dx,$$

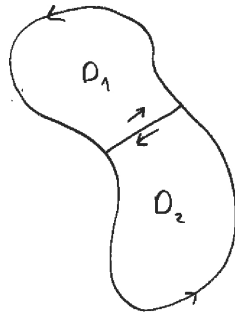
joten yhtälöryhmän ensimmäinen yhtälö pätee. Sama lasku käyttäen D :n toista esitystä $x \in (a(y), b(y))$ ja $y \in (c, d)$ antaa yhtälöryhmän toisen yhtälön. Greenin kaava siten pätee kun D on yksinkertainen alue.

Esim. 20. Lasketaan $\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x + 3y^2)\mathbf{i} + (2x - e^{-y^2})\mathbf{j}$ ja käyrä c on alueen $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a, y \geq 0\}$ reunakäyrä vastapäivään.

Vaihdetaan integrointi reunakäyrän yli Greenin lauseen avulla integrointiin puolikiekon yli ja lasketaan integraali napakoordinaattien avulla:

$$\begin{aligned}
 \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA \\
 &= \iint_D (2 - 6y) \, dA \\
 &= \int_0^a \int_0^\pi (2 - 6r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
 &= \int_0^a (2\pi r - 12r^2) \, dr \\
 &= \pi a^2 - 4a^3.
 \end{aligned}$$

Huom. Olkoon $D = D_1 \cup D_2$, missä D_1 ja D_2 ovat yksinkertaisia alueita.

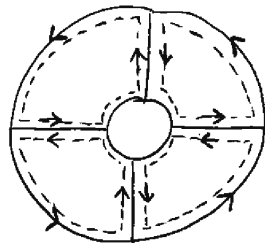


Tällöin

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \\
 &= \int_{D_1\text{:n reuna}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{D_2\text{:n reuna}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \left(\int_{D_1\text{:n oma reuna}} + \int_{\text{yhteinen reuna}} + \int_{\text{yhteinen reuna toiseen suuntaan}} + \int_{D_2\text{:n reuna}} \right) \\
 &= \int_{D\text{:n reuna}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.
 \end{aligned}$$

Joten Greenin lause pätee myös tällaiselle alueelle D .

Huom. Vastaavasti jos D koostuu useammasta yksinkertaisesta alueesta, niin viivaintegraalit yhteisten reunojen yli aina kumoavat toisensa ja jäljelle jää integraali vain alkuperäisen kokonaisen alueen reunojen yli.



Esim. 21. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ säännöllinen alue s.e. Greenin lause pätee D :ssä.

Jos $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ on vektorikenttä, jolle pätee

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1,$$

niin

$$D\text{:n pinta-ala} = \iint_D 1 \, dA = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Tällainen vektorikenttä \mathbf{F} on esim. $\mathbf{F} = x\mathbf{j}$ ja $\mathbf{F} = -y\mathbf{i}$ tai $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

Huom. Alueen D reunalle käytetään usein merkintää ∂D .

Esim. 22. Lasketaan ellipsin

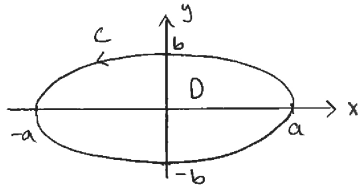
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \leq 1 \right\}$$

pinta-ala, $a, b > 0$.

Edellisen esimerkin mukaan

$$D\text{:n ala} = \int_c (x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r},$$

kun c on ellipsin reunakäyrä.



Käyrän c parametrisoinniksi voidaan ottaa $\mathbf{r}(t) = a \cos(t)\mathbf{i} + b \sin(t)\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$. Tällöin

$$\begin{aligned} D\text{:n ala} &= \int_0^{2\pi} (a \cos(t)\mathbf{j}) \cdot (-a \sin(t)\mathbf{i} + b \cos(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ab \cos^2(t) dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Huom. Adamsin Calculus esittää Greenin lauseen muodossa

$$\int_c F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

Luennolla taas käytettiin esitystä

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA.$$

Nämä ovat kuitenkin täsmälleen samat kaavat, sillä Adamsin merkintä tarkoittaa

$$\int_c F_1 dx + F_2 dy = \int_c (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

$$\text{ja } \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

4.5 Stokesin lause

Lause 3 (Stokesin lause). *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^3$ suunnistettu pinta, jonka reunakäyrät c_1, c_2, \dots, c_N ovat suljettuja.*

Tällöin

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \oint_{c_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kun $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on sileä vektorikenttä.



Huom. Reunakäyrät on suunnistettu pinnan S suunnistuksen mukaisesti.

Huom. Jos S kuuluu (x, y) -tasoon ja $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, niin Stokesin lause on Greenin lause.

Huom. Olkoon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ konservatiivinen vektorikenttä, eli $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, jollakin $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Jos c on pinnan S reunakäyrä, niin Stokesin lauseen mukaan

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \nabla\Phi \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

sillä $\nabla \times \nabla\Phi = 0$.

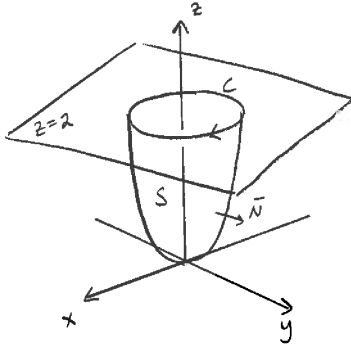
Tämä vahvistaa myös aiemmin saadun: Jos c on suljettu käyrä ja \mathbf{F} on konservatiivinen, niin

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Esim. 23. Olkoon $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ ja pinta S paraboloidin $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ se osa, joka jää tason $z = 2$ alapuolelle. Lasketaan

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

kun S on suunnistettu siten, että normaali osoittaa alaspäin.



Stokesin lauseen mukaan

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

missä c on pinnan S reunakäyrä.

Käyrän c positiivinen kiertosuunta on nyt pinnan S suunnistuksen määräämänä myötäpäivään z -akselin ympäri.

Käyrä c koostuu niistä pinnan $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ pisteistä, joissa $z = 2$, eli pisteistä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$$

Käyrän c parametrisoinniksi voidaan siten ottaa

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos(t)\mathbf{i} - 2 \sin(t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Huomaa, että kiertosuunta on nyt oikein suunnistettu.

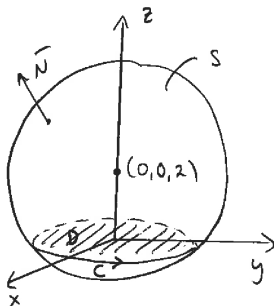
Näin saadaan

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3 \cdot 2 \sin(t)\mathbf{i} - 2 \cos(t) \cdot 2\mathbf{j} - 2 \sin(t) \cdot 2^2\mathbf{k}) \cdot (-2 \sin(t)\mathbf{i} - 2 \cos(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (12 \sin^2(t) + 8 \cos^2(t)) dt = 12\pi + 8\pi = 20\pi. \end{aligned}$$

Esim. 24. Olkoon pinta S se osa pallosta

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8,$$

joka on (x, y) -tason yläpuolella.



Lasketaan

$$I = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

kun

$$\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos(xz)\mathbf{i} + x^3 e^{yz}\mathbf{j} - e^{xyz}\mathbf{k}$$

ja S on suunnistettu ulkonormaalilla.

Pinnan reunakäyrä c on tason $z = 0$ ja pinnan $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ leikkauskäyrä, eli käyrä $x^2 + y^2 = 4$.

Nyt huomataan, että c on reunakäyrä myös (x, y) -tason pinnalle $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ suunnistuksella $\mathbf{N} = \mathbf{k}$.

Siten käyttämällä Stokesin lausetta kahdesti, saadaan

$$I = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dS.$$

Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 \cos(xz) & x^3 e^{yz} & -e^{xyz} \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \cos(xz)) \\ &= 3x^2 e^{yz} - 2y \cos(xz). \end{aligned}$$

Koska alueessa D on $z = 0$ saadaan

$$I = \iint_D (3x^2 e^{yz} - 2y \cos(xz)) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (3x^2 - 2y) dA$$

ja parittomuuden perusteella $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} y dA = 0$, joten

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 3x^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^2 \cos^2(\phi) r dr d\phi = \frac{3}{4} \cdot 2^4 \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi = 12\pi.$$

4.6 Maxwellin yhtälöt *

Staattinen sähkökenttä

Gaussin lauseen yhteydessä laskettiin origossa sijaitsevan pistevarauksen vuo ulos origon sisältävästä kappaleesta D , jonka pinta on S , eli integraali

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Jos yksittäisen pistevarauksen sijaan avaruudessa on varausjakauma ρ , niin tilavuusdifferentiaali dV sisältää silloin varauksen $dq = \rho dV$. Samoin kuin edellä sähkökentän vuon pinnan S läpi aiheuttaa pinnan sisällä oleva varaus ja siten

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D dq = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV.$$

Gaussin lauseen mukaan saadaan

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_D \rho dV$$

ja koska tämä pätee mielivaltaisella alueella D , täytyy olla

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}},$$

joka on 1. Maxwellin yhtälö staattiselle sähkökentälle.

Tarkastellaan seuraavaksi pistevarausta q mielivaltaisessa pisteessä $\mathbf{s} = s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}$. Tällöin Coulombin lain mukaan varauksen q aiheuttama sähkökenttä pisteessä \mathbf{r} on

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3},$$

jonka skalaaripotentiali on

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}.$$

Vastaavasti alueessa D olevan varausjakauman ρ aiheuttama potentiali on

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} dV.$$

Tällöin varausjakauman aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E} = \nabla\phi$ on konservatiivinen ja siten pyörteetön. Saadaan siis

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0},$$

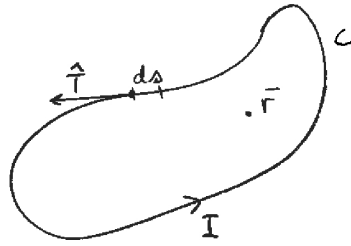
joka on 2. Maxwellin yhtälö staattiselle sähkökentälle.

Staattinen magneettikenttä

Oletetaan, että käyrälle c asetettua johdinta pitkin kulkee vakiovirta I . Liikkuvat varaukset aiheuttavat tällöin magneettikentän. Kokeellisesti on päätelty, että pisteessä $\mathbf{s} = s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}$ oleva johtimen pätkä ds , jossa kulkee virta I , aiheuttaa pisteeseen $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ magneettikentän voimakkuuden

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}, \quad (\text{Biot-Savartin laki})$$

missä $ds = \hat{T} ds$, kun \hat{T} on johtimen yksikkötangenttivektori.



Suljetun piirin aiheuttama magneettikentän voimakkuus on siten

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{\hat{T}(\mathbf{s}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} ds.$$

(Välihuomautus 1: Kyseessä on siis vektorikentän integraali käyrän c yli, eli muotoa

$$\oint_C \mathbf{F} ds = \left(\oint_C F_1 ds \right) \mathbf{i} + \left(\oint_C F_2 ds \right) \mathbf{j} + \left(\oint_C F_3 ds \right) \mathbf{k}$$

oleva integraali. Tuloksena saadaan siten vektorikenttä.)

Olkoon

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|},$$

missä \mathbf{r} on piste johtimen ulkopuolella.

(Välihuomautus 2: Kyseessä on skalaarifunktion vektoriarvoinen integraali, eli muotoa

$$\oint_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) dt$$

oleva integraali ja tuloksena on jälleen vektorikenttä.)

Koska

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad \text{ja} \quad \nabla \times (\phi \mathbf{F}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{F} + \phi (\nabla \times \mathbf{F}),$$

saadaan

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \oint_C \nabla \times \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \\ &= \frac{I}{4\pi} \oint_C \left(\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \right) \times d\mathbf{s} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \nabla \times d\mathbf{s} \right) \\ &= \frac{I}{4\pi} \oint_C \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \right) \times d\mathbf{s} = \frac{I}{4\pi} \oint_C -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \times d\mathbf{s} = \mathbf{H}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

joten $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ on magneettikentän $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ vektoripotentialiaali.

Saatiin siis, että $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ on lähteetön, eli

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0}$$

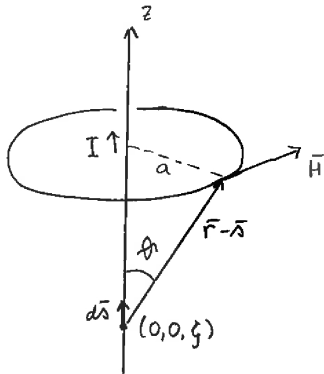
johtimen ulkopuolella.

Huom. Laskemalla voidaan todeta \mathbf{H} myös pyörteettömäksi, eli johtimen ulkopuolella myös

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0.$$

Tarkastellaan seuraavaksi virtapiiriä, joka koostuu äärettömän pitkää z -akselilla sijaitsevasta johtimesta. Oletetaan, että virtapiirissä kulkee virta I suuntaan \mathbf{k} .

Kaikki z -akselin virtapiirin ”palat” ds aiheuttavat pisteeseen \mathbf{r} magneettikentän, jonka suunta on kohtisuorassa z -akselin ja pisteen \mathbf{r} määrittämää tasoa vastaan.



Näin ollen z -akselilla pisteessä s sijaitsevan virtapiirin palan ds aiheuttaman kentän suuruus pisteessä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (joka on etäisyydellä a z -akselista) on Biot-Savartin lain mukaan

$$\frac{I}{4\pi} \left| \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \right| = \frac{I}{4\pi} \left| \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \right| ds = \frac{I}{4\pi} \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}| \sin(\theta)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} ds = \frac{I}{4\pi} \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} ds.$$

Siten koko virtapiirin aiheuttaman magneettikentän suuruus $H = |\mathbf{H}|$ saadaan integroimalla

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{4\pi} \int_{z\text{-akseli}} \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} ds = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{|\mathbf{r} - t\mathbf{k}|^2} dt \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(x^2 + y^2 + (z - t)^2)^{3/2}} dt = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(a^2 + (z - t)^2)^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

Tehdään integraaliin muuttujanvaihto $z - t = a \tan(\phi)$, jolloin $dt = -a(1 + \tan^2(\phi))d\phi$ ja saadaan

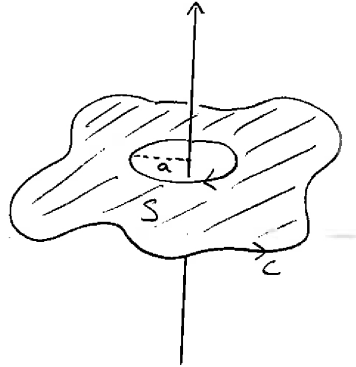
$$\begin{aligned} H &= -\frac{I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{a^2}{(a^2 + a^2 \tan^2(\phi))^{3/2}} (1 + \tan^2(\phi)) d\phi \\ &= \frac{I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \tan^2(\phi))^{1/2}} d\phi = \frac{I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\phi) d\phi = \frac{I}{2\pi a}. \end{aligned}$$

Magneettikentän kenttäviivat ovat (x, y) -tason suuntaisia ympyröitä z -akselin ympärillä. Jos c_a on tällainen a -säteinen ympyrä, niin

$$\oint_{c_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi a} 2\pi a = I.$$

Itse asiassa sama pätee mille tahansa suljetulle polulle c , joka kiertää z -akselin:

$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} - \int_{c_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} + \int_{c_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{c_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{c_a} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I. \quad (\text{Amperen laki})\end{aligned}$$



Edellä tarkasteltiin siis viivamaista johdinta, jossa kulkee virta I . Yleisemmin voidaan tarkastella johtavaa kappaletta D , jonka poikkileikkauksen S läpi kulkee virta I (virta on siis pinnan läpi kulkeneiden varausten määrä / aikayksikkö). Pinnan pisteessä s olkoon tällöin virrantiheys $\mathbf{J}(s)$ (joka on siis ”virta / pinta-alayksikkö”, vrt. nesteen nopeuskenttä (\mathbf{J}) ja nesteen virtauksen vuo pinnan läpi (I)), jolloin pinnan palan dS läpi kulkeva virta on $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$. Jos c on pinnan S reunakäyrä, niin pätee

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

ja Stokesin lauseen mukaan saadaan siten

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Tästä seuraa, että

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J},}$$

joka on 2. Maxwellin yhtälö staattiselle magneettikentälle.

Jos merkitään

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} dV,$$

niin $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$, eli \mathbf{A} on vektorikentän \mathbf{H} vektoripotentiaali. Jos \mathbf{J} on jatkuva ja häviää jonkin rajoitetun alueen ulkopuolella, niin \mathbf{A} :n määrittelemä avaruusintegraali suppenee kaikilla \mathbf{r} .

Näin ollen $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ kaikkialla ja siten \mathbf{H} on lähteetön, eli

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{H} = 0,}$$

joka on 1. Maxwellin yhtälö staattiselle magneettikentälle.

Edellä saatiin siis staattiselle sähkö- ja magneettikentälle *Maxwellin yhtälöt*

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}.\end{aligned}$$

Mikäli kentät riippuvatkin ajasta, osa yhtälöistä kaipaa korjausta.

Maxwellin yhtälöt aikariippuville kentille

Gaussin laki $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ säilyy myös ajasta riippuvassa tapauksessa ennallaan ja samoin $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ (tämä muuten kertoo, että magneettisia lähteitä tai nieluja - eli magneettisia monopoleja - ei (tiettävästi) ole olemassa).

Merkitään magneettivuota

$$\Phi = \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S},$$

kun S on jokin pinta ja c sen reuna. On havaittu, että magneettivuon muutos määräytyy sähkökentästä seuraavasti:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Stokesin lauseesta tällöin seuraa

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\mu_0 \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

joten

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.}$$

Huom. Sähkökenttä on siis pyörteetön jos ja vain jos magneettikenttä on ajan suhteen vakio.

Myös Amperen laki $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ kaipaa korjausta, sillä jos sähkökenttä riippuu ajasta, niin riippuu myös virrantiheys \mathbf{J} . Oletetaan, että kokonaisvaraus säilyy, eli että varaustiheyden positiivinen muutos kappaleen D sisällä tarkoittaa sitä, että kyseinen varaus on tullut kappaleen ulkopuolelta. Siten varaustiheyden muutos kappaleen D sisällä = virta kappaleen D pinnan läpi sisäänpäin = virrantiheyden vuo kappaleen pinnan läpi sisäänpäin. Saadaan siis

$$\text{Varaustiheyden muutos} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho dV = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

ja

$$\text{Virrantiheyden vuo sisäänpäin} = \iint_S -\mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = - \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{J} dV.$$

Tästä saadaan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Tämä on ristiriidassa staattisen tapauksen Amperen lain $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ kanssa, sillä $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$, mutta nyt $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$, kun ρ riippuu ajasta.

Käytetään Gaussin lakia $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, jolloin

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Sillä joka tapauksessa pitää päteä $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0$, voidaan tämän innoittamana ehdottaa, että

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Tämä siis tarkoittaa, että magneettikenttää aiheuttaa virran lisäksi myös sähkökentän muutos ajan suhteen.

Aikariippuvalle tapaukselle saimme siis Maxwellin yhtälöt:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

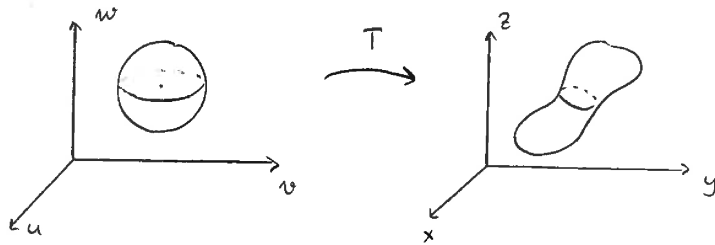
4.7 Käyräviivaiset koordinaatistot

Kartesinen koordinaatisto ei ole mitenkään erikoislaatuinen, vaan vektorianalyysiä voidaan tehdä muissakin koordinaatistoissa.

Merkitään karteesisia koordinaatteja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Olkoon $[u, v, w]$ toinen koordinaattijärjestelmä siten, että pätee vastaavuus

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w). \end{aligned}$$

Olkoon koordinaatistojen välinen kuvaus $T(u, v, w) = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}$. (Käytetään hakasulkeita merkinnässä $[u, v, w]$, jotta voidaan erottaa toisistaan esim. pisteet $(1, 2, 3)$ ja $[1, 2, 3]$.)



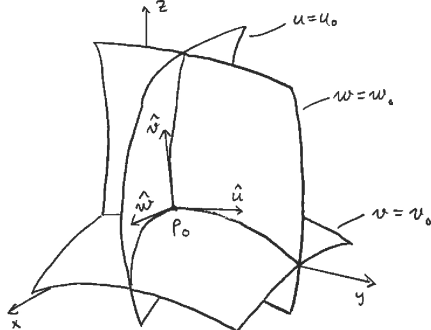
Kuvaus T on (ainakin lokaalisti) injektio, lukuunottamatta mahdollisia singulaarisia pisteitä.

Esim. 25. Napakoordinaateissa (r, ϕ) origo on singulaarinen piste, sillä sen voi esittää muodossa $(0, \phi)$ millä tahansa kulman ϕ arvolla. Kuvaus T ei siten ole injektio origon ympäristössä.

Esim. 26. Sylinterikoordinaatistossa z -akselin pisteet ovat singulaarisia, sillä ne voidaan esittää muodossa $(0, \phi, z)$, millä tahansa kulman ϕ arvoilla.

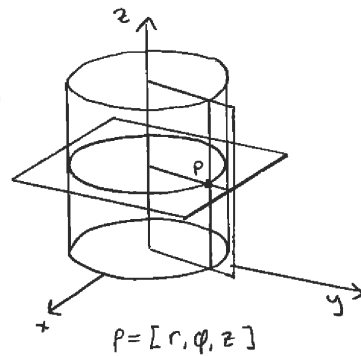
Ortogonaaliset käyräviivaiset koordinaatistot

$[u, v, w]$ on \mathbb{R}^3 :n ortogonaalinen käyräviivainen koordinaattijärjestelmä, jos kaikissa \mathbb{R}^3 :n ei-singulaarisissa pisteissä $P_0 = [u_0, v_0, w_0]$ jokainen kolmesta koordinaattipinnasta $u = u_0$, $v = v_0$ ja $w = w_0$ on kohtisuorassa kahta muuta vastaan.



Merkitään vektoreilla \hat{u} , \hat{v} ja \hat{w} yksikkövektoreita, jotka tangeeraavat koordinaattipintojen leikkauskäyriä. Ne muodostavat tällöin lokaalin ortogonaalisen kannan pisteessä P_0 . Koordinaattipintojen leikkauskäyriä kutsutaan koordinaattikäyriksi.

Esim. 27. Sylinterikoordinaatit ovat ortogonaalinen käyräviivainen koordinaattijärjestelmä.



Koordinaattipinnat ovat:

- sylinterit z akselin ympärillä ($r = \text{vakio}$)
- z -akselista lähtevät puolitasot ($\phi = \text{vakio}$)
- horisontaaliset tasot ($z = \text{vakio}$)

Koordinaattikäyrät ovat vastaavasti:

- z -akselista lähtevät horisontaaliset puolisuorat (r -käyrät)
- horisontaaliset ympyrät z -akselin ympärillä (ϕ -käyrät)
- vertikaaliset suorat (z -käyrät)

Skaalaustekijät ja differentiaaliset elementit

Olkoon $[u, v, w]$ ortogonaalinen käyräviivainen koordinaatisto \mathbb{R}^3 :ssa siten, että

- 1.) $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ ja $z = z(u, v, w)$
- 2.) koordinaattipinnat kaikissa ei-singulaarisissa pisteissä ovat sileitä.
- 3.) lokaalit kantavektorit \hat{u} , \hat{v} ja \hat{w} muodostavat oikeakätisen järjestelmän.

Esim. 28. Tällaisia ovat sylinterikoordinaatit $[r, \phi, z]$ ja pallokoordinaatit $[\rho, \theta, \phi]$.

Pisteen P paikkavektori on tällöin

$$\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}.$$

Jos pidetään $v = v_0$ ja $w = w_0$ vakioina, niin $\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u, v_0, w_0)$ määrää u -koordinaattikäyrän ja vektori

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

on tangentiaalinen u -käyrälle missä tahansa sen pisteessä.

Yleisesti vektorit

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$$

ovat tangenteja u -, v - ja w -koordinaattikäyrille. Lisäksi ne ovat normaaleita vastaaville koordinaattipinnoille, eli keskenään kohtisuorassa.

Näiden tangenttivektoreiden pituuksia kutsutaan skaalauskerroimiksi

$$h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|, h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \text{ ja } h_w = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|.$$

Tällöin

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = h_u \hat{\mathbf{u}}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = h_v \hat{\mathbf{v}} \text{ ja } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_w \hat{\mathbf{w}},$$

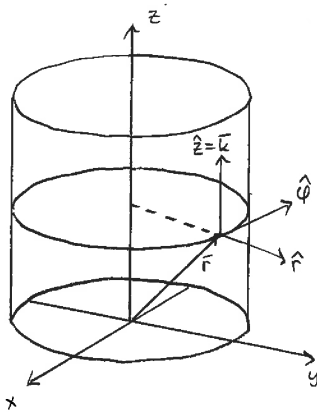
missä $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ ja $\hat{\mathbf{w}}$ ovat aiemmin määritellyt lokaalit kantavektorit.

Esim. 29. Sylinterikoordinaateilla pisteen paikkavektori on

$$\mathbf{r} = r \cos(\phi) \mathbf{i} + r \sin(\phi) \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

joten

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos(\phi) \mathbf{i} + \sin(\phi) \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r \sin(\phi) \mathbf{i} + r \cos(\phi) \mathbf{j} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}.$$



Skaalauskerroimet ovat siten

$$h_r = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad h_\phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = r \quad \text{ja} \quad h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = 1.$$

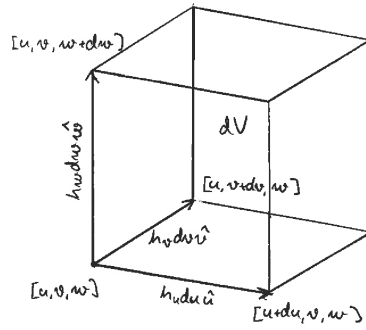
Lokaalit kantavektorit ovat

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \cos(\phi) \mathbf{i} + \sin(\phi) \mathbf{j}, \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin(\phi) \mathbf{i} + \cos(\phi) \mathbf{j}, \\ \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{k}. \end{cases}$$

Nämä muodostavat oikeakätisen kannan. (Samoihin yksikkövektoreihin päädyttiin jo koordinaattimuunnoksia käsiteltäessä.)

Tilavuuselementti

Ortogonaalisen käyräviivaisen koordinaatiston tilavuuselementti on sen koordinaattilaatikon tilavuus, jonka määräävät pisteet $[u, v, w]$, $[u+du, v, w]$, $[u, v+dv, w]$ ja $[u, v, w+dw]$.



Kappale on suorakulmainen, ja reunavektorit ovat

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du = h_u du \hat{\mathbf{u}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = h_v dv \hat{\mathbf{v}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw = h_w dw \hat{\mathbf{w}}.$$

Tilavuuselementti on siten

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw.$$

Samalla saadaan pinta-alaelementit u -, v - ja w -pinnoille koordinaattilaatikon vastaavien tahkojen pinta-aloina:

$$dS_u = h_v h_w dv dw,$$

$$dS_v = h_u h_w du dw,$$

$$dS_w = h_u h_v du dv$$

ja kaarenpituuselementit särmien pituuksina

$$ds_u = h_u du, \quad ds_v = h_v dv, \quad ds_w = h_w dw.$$

Esim. 30. Sylinterikoordinaattien tilavuuselementti on

$$dV = h_r h_\phi h_z dr d\phi dz = r dr d\phi dz$$

ja pinta-alaelementit ovat

$$dS_r = r d\phi dz, \quad dS_\phi = dr dz, \quad dS_z = r dr d\phi$$

4.8 Gradientti, divergenssi ja roottori ortogonaalisissa käyräviivaisissa koordinaatistoissa

Gradientti

Olkoon skalaarifunktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ esitys annettuna käyräviivaisten koordinaattien $[u, v, w]$ avulla, eli $f = f(u, v, w)$. Tällöin f :n gradientti voidaan esittää käyräviivaisen koordinaatiston pisteessä $P = [u, v, w]$ muodossa

$$\nabla f = f_u \hat{\mathbf{u}} + f_v \hat{\mathbf{v}} + f_w \hat{\mathbf{w}}.$$

Mitkä ovat kertoimet f_u , f_v ja f_w ?

Olkoon käyrän c parametrisointi annettu muodossa $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, missä $|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}| = 1$, ja $\mathbf{r}(s) = u(s)\hat{\mathbf{u}} + v(s)\hat{\mathbf{v}} + w(s)\hat{\mathbf{w}}$. Tällöin funktion f suunnattu derivaatta käyrää pitkin on

$$\frac{\partial}{\partial s} f(\mathbf{r}(s)) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{ds}.$$

Toisaalta suunnattu derivaatta on myös $\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot \hat{T}$, missä \hat{T} on käyrän c yksikkötangenttivektori:

$$\hat{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \frac{dw}{ds} = h_u \frac{du}{ds} \hat{\mathbf{u}} + h_v \frac{dv}{ds} \hat{\mathbf{v}} + h_w \frac{dw}{ds} \hat{\mathbf{w}}.$$

Tästä saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot \hat{T} = f_u h_u \frac{du}{ds} + f_v h_v \frac{dv}{ds} + f_w h_w \frac{dw}{ds}.$$

Vertaamalla saatuja lausekkeita, huomataan, että

$$f_u h_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_v h_v = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad f_w h_w = \frac{\partial f}{\partial w},$$

eli gradientti ortogonaalisessa käyräviivaisessa koordinaatistossa on

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{\mathbf{w}}.$$

Esim. 31. Sylinterikoordinaatistossa

$$\nabla f(t, \phi, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Jos $f(r, \phi, z) = r\phi z$, niin

$$\nabla f = \phi z \hat{\mathbf{r}} + z \hat{\boldsymbol{\phi}} + w \phi \mathbf{k}.$$

Divergenssi

Olkoon

$$\mathbf{F}(u, v, w) = F_u(u, v, w)\hat{\mathbf{u}} + F_v(u, v, w)\hat{\mathbf{v}} + F_w(u, v, w)\hat{\mathbf{w}}.$$

Kentän vuo ulos infinitesimaalisesta koordinaattilaatikosta saadaan laskemalla yhteen vuot kuuden eri sivun läpi. Vuo ulos u -sivuista (eli sivuista, joissa u on vakio, ja joiden pinta-ala on $dS_u = h_v h_w dv dw$) on

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(u + du, v, w) \cdot \hat{\mathbf{u}} dS_u - \mathbf{F}(u, v, w) \cdot \hat{\mathbf{u}} dS_u \\ &= \left(F_u(u + du, v, w) h_v(u + du, v, w) h_w(u + du, v, w) - F_u(u, v, w) h_v(u, v, w) h_w(u, v, w) \right) dv dw \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) du dv dw. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan v - ja w -sivuille.

Koska divergenssi on ”vuo/tilavuus”, ja tarkasteltavan kuution tilavuus on $dV = h_u h_v h_w du dv dw$, saadaan

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right).$$

Esim. 32. Sylinterikoordinaateissa $h_r = h_z = 1$ ja $h_\phi = r$, joten kentän $\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + F_z \mathbf{k}$, divergenssi on

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (r F_z) \right) = \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Jos siis $\mathbf{F}(r, \phi, z) = r \hat{\mathbf{r}}$, niin

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + \frac{1}{r} \cdot r + \frac{1}{r} \cdot 0 + 0 = 2.$$

Roottori

Käytetään roottorin laskemiseen joitakin aiemmin saatuja tuloksia. Olkoon $f(u, v, w) = u$. Tällöin

$$\nabla u = \nabla f = \frac{1}{h_u} \cdot 1 \cdot \hat{\mathbf{u}} + 0 + 0 = \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u}.$$

Samoin saadaan $\nabla v = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v}$ ja $\nabla w = \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w}$. Kenttä \mathbf{F} voidaan siten esittää muodossa

$$\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}} = F_u h_u \nabla u + F_v h_v \nabla v + F_w h_w \nabla w.$$

Käyttämällä nyt laskusääntöä $\nabla \times (f \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$ sekä edellä esitettyä kaavaa gradientille, saadaan

$$\begin{aligned} \nabla \times (F_u h_u \nabla u) &= \nabla (F_u h_u) \times \nabla u \\ &= \left(\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_u) \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} (F_u h_u) \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} (F_u h_u) \hat{\mathbf{w}} \right) \times \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u}. \end{aligned}$$

Koska $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}} = 0$, $\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{w}}$ ja $\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}$, saadaan

$$\begin{aligned} \nabla \times (F_u h_u \nabla u) &= \nabla (F_u h_u) \times \nabla u \\ &= -\frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial v} (F_u h_u) \hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial w} (F_u h_u) \hat{\mathbf{v}} \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial w} (F_u h_u) (h_v \hat{\mathbf{v}}) - \frac{\partial}{\partial v} (F_u h_u) (h_w \hat{\mathbf{w}}) \right). \end{aligned}$$

Laskemalla vastaavat lausekkeet termeille $\nabla \times (F_v h_v \nabla v)$ ja $\nabla \times (F_w h_w \nabla w)$, saadaan roottorille esitys determinantin avulla:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}.$$

Esim. 33. Sylinterikoordinaateissa kentän $\mathbf{F}(r, \phi, z) = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + F_z \mathbf{k}$ roottori on

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}(r, \phi, z) &= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\phi}} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\phi & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{\partial F_\phi}{\partial r} + \frac{F_\phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Jos siis $\mathbf{F}(r, \phi, z) = r\hat{\mathbf{r}}$, niin

$$\nabla \times \mathbf{F}(r, \phi, z) = 0 \cdot \hat{\mathbf{r}} + 0 \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} + 0 \cdot \mathbf{k} = 0$$

eli kenttä on pyörteetön.

Hakemisto

- alue
 - säännöllinen, 72
 - yksinkertainen, 72
- avaruusintegraali, 7
- avaruuskäyrä, 37
- Coulombin laki, 26
- dipoli, 34
- Diracin deltafunktio, 62
- distribuuutio, 62
- divergenssi, 59, 60, 90
- Gaussin lause, 60, 68
- gradientti, 25, 59, 89
- gravitaatiokenttä, 25, 30, 44
- Greenin lause, 60, 73
- hitausmomentti, 22
- hitaussäde, 23
- iteroitu integraali, 8
- Jacobin determinantti, 12, 13, 16
- käyrä, 37
- kenttäviiva, 27
- komponenttifunktio, 25
- koordinaatisto
 - käyräviivainen, 85
- koordinaattifunktio, 37
- lähde, 33
- Möbiuksen nauha, 53
- magneettikenttä
 - aikariippuva, 84
 - staattinen, 80
- massa, 21
- massakeskipiste, 21
- Maxwellin yhtälöt, 84, 85
- momentti, 21
- muuttujanvaihto, 11
- napakoordinaatit, 28
- nielu, 34
- nopeusvektori, 38
- normaalivektori, 48
- pallokoordinaatisto, 15
- paraboloidi, 20
- pinnan ala, 19
- pinta, 46, 49
 - parametrisoitu, 46
 - suljettu, 49
 - suunnistuva, 51
- pinta-alaelementti, 89
- pintaintegraali
 - funktion, 50
 - vektorikentän, 55
- pyörähdyskappale, 14

pyörivä levy, 26, 28

roottori, 59, 63, 91

sähkökenttä, 26

 aikariippuva, 84

 staattinen, 79

singulaarinen piste, 86

skaalauskerroin, 88

skalaaripotentiali, 30

Stokesin lause, 60, 77

suunnistus, 52, 53

sylinterikoordinaatisto, 13

tangenttitaso, 47

tangenttivektori, 47

tasapotentialikäyrä, 32

tasapotentialipinta, 32

tasokäyrä, 38

tilavuuselementti, 88

vektoriarvoinen funktio, 38

vektorikenttä, 25

 konservatiivinen, 30

 lähteetön, 64

 pyörteetön, 64

viivaintegraali

 funktion, 40

 vektorikentän, 43

vuointegraali, 55

yleistetty funktio, 62