Differentiaali- ja integraalilaskenta 2

Riikka Kangaslampi

Versio 2.1

Esipuhe

Tämä on Aalto-yliopiston Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksen kurssin Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 tueksi koottu luentomoniste. Monisteen ensimmäinen versio v. 2014 perustui osin aiempien matematiikan peruskurssien S2, V2 ja BTT1 luentomonisteisiin, joista ensiksi mainittua olivat lisäkseni työstäneet erityisesti Matias Dahl ja Aappo Pulkkinen.

Moniste on tarkoitettu luentojen tueksi, ei itseopiskeluun, sillä se on paikoin hyvin lyhytsanainen, eikä välttämättä kata kaikkea kurssilla käsiteltävää. Luentomonisteen rinnalla on tarkoitus lukea R. A. Adamsin ja C. Essexin kirjaa Calculus, A Complete Course, joka avaa asioita laajemmin. Erinomainen ja kattava suomenkielinen oheismateriaali on J. Pitkärannan Calculus Fennicus.

Kaikista monisteesta löytyvistä virheistä ja epätäsmällisyyksistä pyydän ilmoittamaan suoraan minulle.

Otaniemessä, 12. helmikuuta 2018,

Riikka Kangaslampi

Sisältö

1. Vektorit ja käyrät

1.1 Vektorit*

Tämä luku on tarkoitettu lähinnä kertaavaksi materiaaliksi, jolla voi muistutella mieleen vektorilaskentaa: vektoreiden käsittelyä, sisä- ja vektoritulon määritelmät ja merkitykset, projektiot, tasot ja suorat.

Vektori on matemaattinen käsite, joka määräytyy $\mathbb{R}^n$:n vektoreista puhuttaessa annetusta pituudesta ja suunnasta. Jokainen vektori voidaan tulkita kahden pisteen $A \in \mathbb{R}^n$ ja $B \in \mathbb{R}^n$ välisenä yhdysvektorina, jota merkitään $\overline{AB}$ tai $\overrightarrow{AB}$.

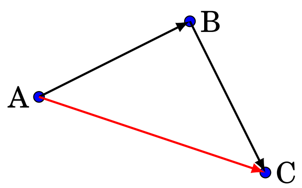
- Vektorilla on suunta (jos $A \neq B$) ja se on A:sta B:hen eli A on vektorin alkupiste ja B kärkipiste. Se siis ilmaisee tällöin pisteen B sijainnin suhteessa pisteeseen A.

- Vektori $\overline{OB}$ on pisteen B paikkavektori, kun O on koordinaatiston origo.

- Vektoreita merkitään usein myös pienillä kirjaimilla, esim. $\overline{v}$, $\overline{u}$, $\overline{w}$ jne. ja painetussa tekstissä vektorit painetaan usein lihavoituna ilman yläviivaa, esim. $\overline{u} = \mathbf{u}$, $\overline{v} = \mathbf{v}$ jne.

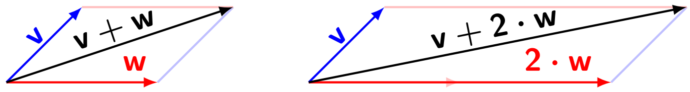
- Vektorin pituus $|\overline{AB}| = |AB|$ on pisteiden A ja B välinen etäisyys.

- Yhteenlasku: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$



- Suunnanvaihto: $-\overline{AB} = \overline{BA}$.

- Skaalaus: Jos $\mathbf{u} \neq 0$ ja $t > 0$, niin $t\mathbf{u}$ on vektori jolla on sama suunta kuin $\mathbf{u}$:lla eli $t\mathbf{u} \parallel \mathbf{u}$ ja $|t\mathbf{u}| = t|\mathbf{u}|$.



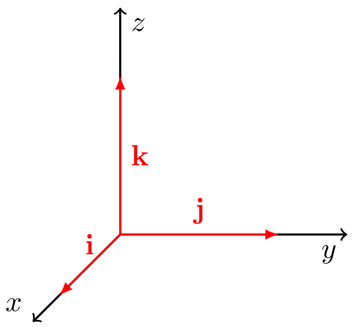
- Vektorin voi siirtää, eli kaksi vektoria on samat jos ja vain jos niiden pituudet ja suunnat ovat samat.

Luonnolliset kantavektorit

Tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^3$ karteesisessa koordinaatistossa. Tällöin koordinaattiakselien suuntaiset yksikön pituiset vektorit ovat erityisasemassa.

Olkoon origo $O = (0,0,0)$ ja $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$ ja $P_3 = (0,0,1)$. Määritellään

$$\mathbf{i} = \overline{OP_1}, \quad \mathbf{j} = \overline{OP_2}, \quad \mathbf{k} = \overline{OP_3}.$$



Nämä kolme vektoria ovat $\mathbb{R}^3$:n luonnolliset kantavektorit ja jokainen avaruuden vektori $\mathbf{v}$ voidaan kirjoittaa näiden lineaarikombinaationa, eli muodossa

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

joillakin $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Huom. Jos $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, niin

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j} + (u_3 + v_3)\mathbf{k} \quad \text{ja} \\ t\mathbf{u} &= (tu_1)\mathbf{i} + (tu_2)\mathbf{j} + (tu_3)\mathbf{k}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \end{aligned}$$

Huom. Jokaista vektoria $\mathbf{u}$ vastaa yksikäsitteinen avaruuden piste $P \in$

$\mathbb{R}^n$, jolle $\mathbf{u} = \overline{OP}$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteet P voidaan siis samaistaa origosta alkavien vektoreiden $\overline{OP}$ kanssa.

Usein avaruuden pisteen paikkavektoria merkitään vektorilla $\mathbf{r}$. Tällöin usein puhutaan "pisteestä" $\mathbf{r}$, jolla siis tarkoitetaan sitä pistettä P, jolle $\mathbf{r} = \overline{OP}$. Tällöin saatetaan myös käyttää vektorin ja pisteen koordinaattien merkitää sekaisin, eli merkitä

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = (a, b, c).$$

Sisätulo eli pistetulo

Jos $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, määritellään näiden kahden vektorin välinen pistetulo (eli sisätulo eli skalaaritulo)

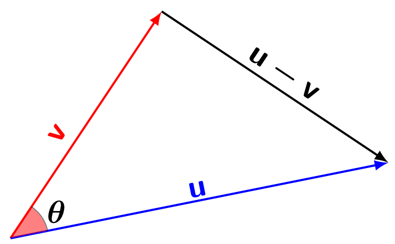
$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.}$$

Pistetulolle pätee:

$$|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

Lause 1 (Kosinilause)**.** *Olkoon θ vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma, jolloin pätee*

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2.$$



- Koska

  $$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$$

  saadaan kosinilauseen seuraksena

  $$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\theta).}$$

  Yhtä hyvin tämä voidaan valita pistetulon määritelmäksi.

- Vektorit $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat kohtisuorassa, jota merkitään $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, jos niiden välinen kulma on $\frac{\pi}{2}$ (=90°). Edellisen kaavan nojalla saadaan, että jos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$, niin

  $$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Esim. 1. Luonnolliset kantavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, sillä $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$ ja $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$ ja $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$.

Esim. 2. Millä vakion $a\in\mathbb{R}$ arvolla pätee $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$, kun $\mathbf{u}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}-7\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v}=a\mathbf{i}-\mathbf{j}$?

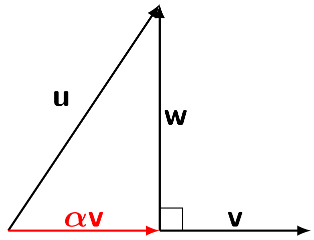
Koska $\mathbf{u}\neq 0$ ja $\mathbf{v}\neq 0$, niin $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ jos ja vain jos $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$, eli

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=1\cdot a+5\cdot(-1)-7\cdot 0=a-5=0,$$

josta saadaan $a=5$.

Projektio

Olkoon annettuna kaksi vektoria $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}\neq 0$. Miten kirjoitetaan $\mathbf{u}$ muodossa $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}+\mathbf{w}$, missä joko $\mathbf{w}\perp\mathbf{v}$ tai $\mathbf{w}=0$?



Ottamalla lausekkeesta pistetulo vektorin $\mathbf{v}$ kanssa puolittain, saadaan

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\alpha|\mathbf{v}|^2,$$

josta saadaan $\alpha=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}$. Vektorille $\mathbf{u}$ saadaan siis esitys

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}+\left(\mathbf{u}-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\right).$$

Vektori $\mathbf{w}$ on siis

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$

ja sille pätee $\mathbf{w}\perp\mathbf{v}$, sillä

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}|\mathbf{v}|^2=0.$$

Vektori

$$\boxed{\mathbf{u}_{\mathbf{v}}=\alpha\mathbf{v}=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}}$$

on vektorin $\mathbf{u}$ vektoriprojektio (tai projektio) vektorin $\mathbf{v}$ suuntaan.

Esim. 3. Lasketaan vektorin $\mathbf{u}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k}$ projektio vektorin $\mathbf{v}=\mathbf{i}$ suuntaan. Koska $\mathbf{v}=\mathbf{i}\neq 0$, niin projektio on

$$\mathbf{u}_{\mathbf{v}}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}=\frac{5}{1^2}\mathbf{v}=5\mathbf{i}.$$

Esim. 4. Olkoon $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Tällöin

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4 \quad \text{ja} \quad |\mathbf{v}|^2 = 4 + 1 + 9 = 14,$$

joten vektorin $\mathbf{u}$ projektio vektorin $\mathbf{v}$ suuntaan on

$$\mathbf{u_v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{-4}{14}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{4}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

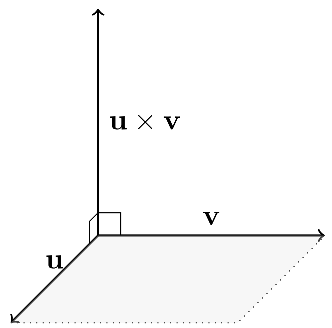
Vektoritulo eli ristitulo

Vektoreiden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ristitulo (toiselta nimeltään vektoritulo) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ on vektori, jolle pätee

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ ja $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ eli $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ ja $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$.

2. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin(\theta)$, kun θ on vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma.

3. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ muodostavat oikeakätisen kolmikon.



Huom. Kohta 2. tarkoittaa, että vektorin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ pituus on sama kuin vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala.

Huom. Jos $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, niin $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, sillä tällöin $\sin(\theta) = \sin(0) = 0$.

Lause 2 (Ristitulo). *Olkoot* $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ *ja* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. *Tällöin*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(u_2v_3 - u_3v_2) - \mathbf{j}(u_1v_3 - u_3v_1) + \mathbf{k}(u_1v_2 - u_2v_1).$$

Ristitulo saadaan siis laskettua 3×3 determinantin avulla. Yleisestihän 2×2 determinantti on määritelty kaavalla

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ja 3×3 determinantti voidaan kehittää minkä tahansa sarakkeen tai rivin mukaan, esimerkiksi 1. rivin mukaan kehitettynä saadaan

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Esim. 5. Lasketaan $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ ja saadaan

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{k}.$$

($\mathbf{k}$ on siis se vektori, joka on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ vastaan siten, että saadaan oikeakätinen kolmikko ja jonka pituus on $|\mathbf{i}||\mathbf{j}|\sin(\pi/2) = 1$.)

Vastaavasti saadaan

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \text{ja} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Huom. Pätee:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Syy tähän on se, että jos determinantin rivien paikkaa vaihdetaan, niin sen merkki vaihtuu, eli

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Huom. Pätee:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0,$$

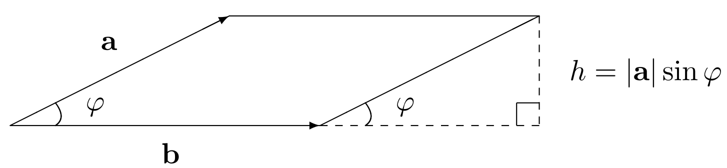
sillä $\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}|^2 \sin(0) = 0$.

Huom. Jos $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$, niin $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) = 0$.

Vektorituloon liittyviä geometrisia tulkintoja

Edellä jo totesimme seuraavan, mutta kirjoitetaan se oikein lauseeksi:

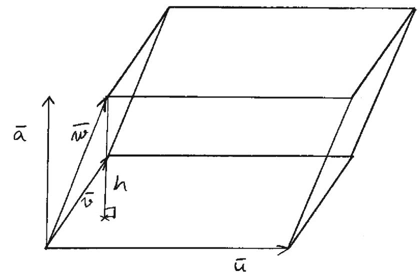
Lause 3. *Vektoreiden* $\mathbf{a}$ *ja* $\mathbf{b}$ *virittämän suunnikkaan ala on* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.



Todistus.

Ala = kanta $\cdot$ korkeus $= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. □

Esim. 6. Ristitulon ja pistetulon avulla voidaan myös lausua kolmen vektorin $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus.



Suuntaissärmiön pohja on vektoreiden $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ virittämä suunnikas, joten sen pinta-ala on

$$\text{Pohjan ala} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

Vektori $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ on kohtisuorassa suuntaissärmiön pohjaa vastaan, joten jos $\mathbf{a}$ = ”vektorin $\mathbf{w}$ projektio vektorin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ suuntaan”, niin särmiön korkeus on vektorin $\mathbf{a}$ pituus. Suuntaissärmiön korkeus on siten

$$h = |\mathbf{a}| = \left| \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \right| = \frac{|\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$

tilavuudeksi saadaan siten

$$\text{Tilavuus} = \text{Pohjan ala} \cdot \text{korkeus} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \cdot \frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$$

- Yllä esiintyvää lauseketta

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

kutsutaan vektoreiden $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ skalaarikolmituloksi.

Lause 4 (Skalaarikolmitulo). *Jos* $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ *ja* $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, *niin skalaarikolmitulo saadaan* 3×3 *determinanttina*

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Perustelu: Koska

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

niin

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

josta lause seuraa. $\square$

Huom. Koska determinantin merkki vaihtuu, kun kaksi riviä vaihdetaan, pätee

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

Huom. Skalaarikolmitulossa pistetulon ja ristitulon paikkaa voi vaihtaa, sillä

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

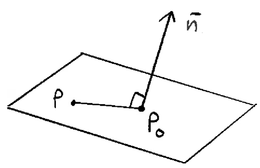
Huom. Voidaan merkitä myös $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ilman sulkeita, sillä laskujärjestys on yksikäsitteinen: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, joten $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ ei ole määritelty.

1.2 Tasot ja suorat

Taso

Taso määräytyy yksikäsitteisesti, kun tiedetään mikä tahansa tason piste P_0 sekä tason normaalivektori $\mathbf{n}$. Tällöin piste P on tason piste jos ja vain jos

$$\overline{PP_0} \perp \mathbf{n}.$$



Olkoon

$$\mathbf{r}_0 = \overline{OP_0} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

tason pisteen P_0 paikkavektori ja

$$\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

tason normaalivektori. Tällöin piste P, jonka paikkavektori on

$$\mathbf{r} = \overline{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

on tason piste jos ja vain jos

$$\overline{PP_0} \perp \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \perp \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Piste $P = (x, y, z)$ on siis tason piste jos ja vain jos

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0 \quad \text{eli} \quad ax + by + cz = d,$$

missä $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Tämä on tason yhtälö.

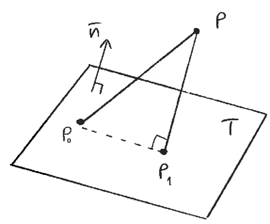
Toisaalta jos on tiedossa tason yhtälö $ax + by + cz = d$, niin siitä voidaan suoraan lukea tason (eräs) normaalivektori $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Esim. 7. Tason $x - 5y + 7z = 12$ normaalivektori on $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

Esim. 8. Tason $x = 0$ normaalivektori on $\mathbf{n} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{i}$.

Pisteen etäisyys tasosta

Lasketaan lyhin etäisyys pisteestä $P = (x', y', z')$ tasoon T, jonka yhtälö on $ax + by + cz = d$.



Olkoon P_1 se tason piste, josta etäisyys pisteeseen P on pienin mahdollinen. Tällöin vektori $\overline{P_1P}$ on kohtisuorassa tasoa T vastaan, eli

$$\overline{P_1P} = \alpha\mathbf{n}, \quad \text{jollakin } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Olkoon nyt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ mikä tahansa tason piste ja kirjoitetaan

$$\overline{P_0P} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P}.$$

Tällöin $\overline{P_0P_1} \perp \mathbf{n}$ ja siten

$$\mathbf{n} \cdot \overline{P_0P} = \mathbf{n} \cdot \overline{P_0P_1} + \mathbf{n} \cdot (\alpha\mathbf{n}) = \alpha|\mathbf{n}|^2,$$

joten

$$\alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \overline{P_0P}}{|\mathbf{n}|^2}$$

ja siten pisteen P etäisyys tasosta T on $|\overline{P_1P}| = |\alpha\mathbf{n}|$ eli

$$\boxed{\text{Pisteen } P \text{ etäisyys tasosta} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overline{P_0P}|}{|\mathbf{n}|}.}$$

Kun $P = (x', y', z')$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, saadaan lauseke kirjoitettua auki muotoon

$$\begin{aligned} \text{Pisteen } P_0 \text{ etäisyys tasosta} &= \frac{|(x'-x_0)a + (y'-y_0)b + (z'-z_0)c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|ax' + by' + cz' - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \end{aligned}$$

sillä $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$.

Esim. 9. Lasketaan pisteen (x_0, y_0, z_0) etäisyys tasosta $x = 0$.

Voidaan suoraan päätellä, että etäisyys on tietysti $|x_0|$. Lasketaan vielä kaavalla

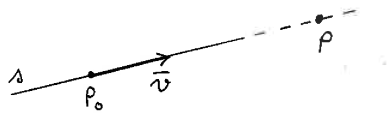
$$\text{etäisyys} = \frac{|1 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + 0 \cdot z_0|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = |x_0|.$$

Esim. 10. Origon etäisyys tasosta $x + y + z = 1$ on

$$\frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Suora

Suora määräytyy yksikäsitteisesti, kun tunnetaan mikä tahansa suoran piste P_0 sekä suoran suuntainen vektori $\mathbf{v}$ (eli suoran suuntavektori).



Tällöin P on suoran piste jos ja vain jos

$$\overline{PP_0} = t\mathbf{v}, \quad \text{jollakin } t \in \mathbb{R}.$$

Olkoon

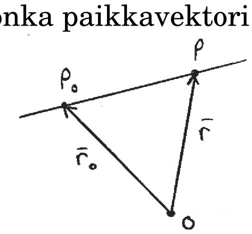
$$\mathbf{r}_0 = \overline{OP_0} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

suoran pisteen P_0 paikkavektori ja

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

suoran suuntavektori. Tällöin piste P, jonka paikkavektori on

$$\mathbf{r} = \overline{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$



kuuluu suoralla s jos ja vain jos

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}, \quad \text{jollakin } t \in \mathbb{R}$$

eli

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + tc. \end{cases} \tag{1.1}$$

Tämä esitys on suoran parametrimuoto tai suoran parametrisointi.

Huom. Suora on myös kahden tason leikkaus. Jos oletetaan, että $a, b, c \neq 0$, niin

$$(1.1) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} bcx - acy = bcx_0 - acy_0 & (\text{taso } 1) \\ acy - abz = acy_0 - abz_0 & (\text{taso } 2). \end{cases}$$

Huom. Suoran parametrimuodon lisäksi suora voidaan siis esittää myös kahden tason leikkaussuorana, eli yhtälöparin

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

avulla, kun tasot eivät ole samansuuntaisia eli $\mathbf{n}_1 = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k} \nparallel a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k} = \mathbf{n}_2$.

Esim. 11. Etsitään tasojen $x - y = 3$ ja $x + y + z = 0$ leikkaussuora.

Ratkaistaan siis yhtälöparia

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x = 3 + y$ ja sijoittamalla toiseen, saadaan $z = -x - y = -3 - y - y = -3 - 2y$. Jos siis y tunnetaan, saatiin sekä x että z koordinaatti ratkaistua

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ y = y, \qquad y \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 2y. \end{cases}$$

Tämä on jos itseasiassa hakemamme suoran parametrisointi parametrina $y \in \mathbb{R}$, mutta usein selvyyden vuoksi parametria merkitään eri symbolilla kuin itse koordinaatteja. Valitaan siis parametriksi $y = t \in \mathbb{R}$, jolloin

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 2t. \end{cases}$$

Kirjoitetaan vielä suoran vektoriparametrisointi, eli suoran pisteiden P paikkavektorit $\mathbf{r}$ muodossa $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Yllä olevasta parametrisoinnista saadaan

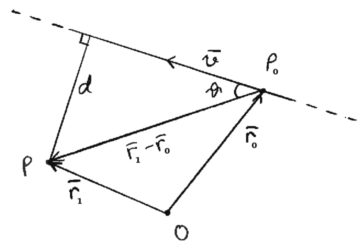
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (3 + t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (-3 - 2t)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}.$$

Huom. Jos suora $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, sijaitsee tasossa, jonka normaali on $\mathbf{n}$, niin $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$.

Pisteen etäisyys suorasta

Lasketaan lyhin etäisyys pisteestä $P = (x', y', z')$ suoralle, jonka vektoriparametrisointi on

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Olkoon $\mathbf{r}_0 = \overline{OP_0}$ ja $\mathbf{r}_1 = \overline{OP}$ ja θ vektoreiden $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ välinen kulma. Tällöin pisteen P etäisyys suorasta on $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|\sin(\theta)$ eli

$$\boxed{\text{Pisteen } P \text{ etäisyys suorasta} = \frac{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)|}{|\mathbf{v}|}.}$$

(Muistetaan, että $|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)| = |\mathbf{v}||\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|\sin(\theta)$.)

Esim. 12. Lasketaan pisteen (x, y, z) etäisyys z -akselista.

Voidaan helposti päätellä, että etäisyys on $\sqrt{x^2 + y^2}$. Laskemalla kuten yllä saadaan suoran parametrisoinniksi $\mathbf{r} = t\mathbf{k}$, joten $\mathbf{r}_0 = 0$ ja $\mathbf{v} = \mathbf{k}$ ja siten

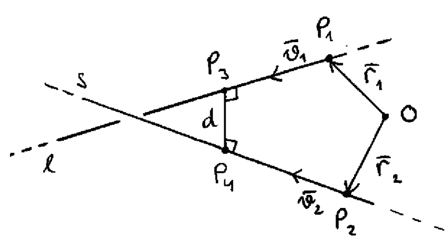
$$\mathbf{v} \times \mathbf{r}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Tästä saadaan

$$\text{etäisyys} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{\sqrt{1^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Suorien välinen etäisyys

Lasketaan lyhin etäisyys kahden suoran välillä.



Olkoon annettu kaksi suoraa l: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{v}_1$ ja s: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{v}_2$. Olkoon jana P_3P_4 lyhin tapa yhdistää nämä suorat, kun P_3 kuuluu suoralle l ja P_4 suoralle s. Tällöin pätee

$$\overline{P_3P_4} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{ja} \quad \overline{P_3P_4} \cdot \mathbf{v}_2 = 0,$$

mistä seuraa, että

$$\overline{P_3P_4} = \alpha \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \quad \text{jollakin parametrilla } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Toisaalta $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_2}$ ja tiedetään, että $\overline{P_1P_3} \parallel \mathbf{v}_1$ ja $\overline{P_3P_4} \parallel \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ja $\overline{P_4P_2} \parallel \mathbf{v}_2$. Näin ollen $\overline{P_3P_4}$ on vektorin $\overline{P_1P_2}$ projektio vektorin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ suuntaan, eli

$$\overline{P_3P_4} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|^2}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2),$$

josta saadaan

$$\text{etäisyys} = |\overline{P_3P_4}| = \frac{|\overline{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$$

Esim. 13. Lasketaan suorien s_1: $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + t_1(\mathbf{j} - \mathbf{k})$ ja s_2: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{k} + t_2(-2\mathbf{j} - \mathbf{k})$ välinen etäisyys.

Nyt siis

$$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{j} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{v}_2 = -2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

joten $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i}.$$

Saadaan siis

$$\text{etäisyys} = \frac{|(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i})|}{|-3\mathbf{i}|} = \frac{3}{3} = 1.$$

1.3 Käyrät

Tässä luvussa tutustutaan taso- ja avaruuskäyriin sekä niiden kaarenpituuteen. Käyriä esiintyy monissa matematiikan sovelluksissa, tyypillinen käyrä on esimerkiksi tasossa tai avaruudessa liikkuvan kappaleen paikka ajan funktiona. Käyrä ei tee hyppyjä, mutta se voi muutoin olla hyvinkin erikoisen näköinen. Käyrät esitetään usein parametrisoidussa muodossa: kappaleen liikerata ajan funktiona.

Käyrällä tarkoitetaan joukkoa $C \subset \mathbb{R}^n$, joka voidaan esittää muodossa

$$C = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in I\},$$

missä $I \subset \mathbb{R}$ on väli ja funktio $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva. Tässä $\mathbf{r}$ on käyrän C parametrisointi ja I on vastaava parametriväli. Sanotaan, että funktio $\mathbf{r}(t)$ on vektoriarvoinen funktio. Käytännössä voidaan ajatella, että $n = 2$ tai $n = 3$, mutta ei ole välttämätöntä rajoittua näihin tapauksiin. Parametrisoinnin jatkuvuudella tarkoitetaan sen koordinaattifunktioiden jatkuvuutta.

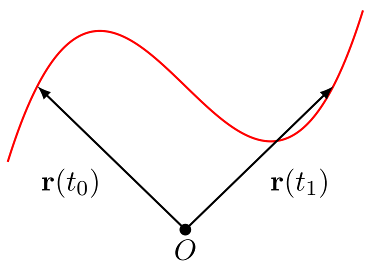
- Avaruuskäyrän $\mathbb{R}^3$:ssa määrittelevät koordinaattifunktiot

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

missä parametri $t \in [a, b]$ tai $t \in \mathbb{R}$.

- Tällöin käyrän paikkavektori on

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$



- Jos $z(t) = 0$, niin käyrä on tasokäyrä.

Esim. 14. Pisteiden $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ ja $\mathbf{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$ välisen yhdysjanan parametrisointi voidaan kirjoittaa vektorimuodossa

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + t(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0}),$$

kun $t \in [0, 1]$. Tästä saadaan myös koordinaattimuoto

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) = (1 - t)x_0 + tx_1, \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) = (1 - t)y_0 + ty_1, \\ z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = (1 - t)z_0 + tz_1, \end{cases}$$

Tasokäyrän yhtälö voidaan usein ilmaista myös implisiittisessä muodossa $F(x,y) = 0$, missä F on jokin kahden muuttujan lauseke. Konkreettisia esimerkkejä ovat funktion kuvaaja $y = f(x)$, joka voidaan määritellä muodossa $F(x,y) = y - f(x) = 0$ ja R-säteinen ympyrä $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

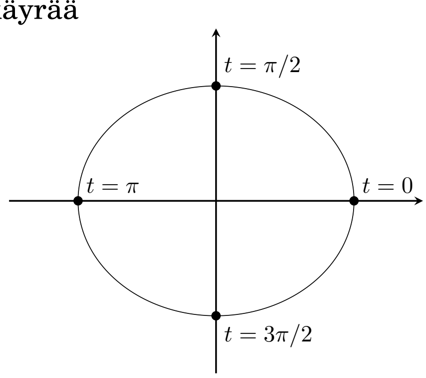
Implisiittisen yhtälön $F(x,y) = 0$ määräämä tasojoukko voi kuitenkin yleisessä tapauksessa olla hyvin erikoinen. Jos nimittäin $A \subset \mathbb{R}^2$ on mikä tahansa tasojoukko (reunapisteetkin mukana), niin funktio

$$F(x,y) = \text{ pisteen } (x,y) \text{ pienin etäisyys joukosta } A$$

on jatkuva, mutta yhtälö $F(x,y) = 0$ esittää koko alkuperäistä joukkoa A.

Esim. 15. Tarkastellaan tasokäyrää

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Tiedetään, että $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, joten käyrän pisteiden koordinaateille pätee $x^2 + y^2 = 1$. Kyseessä on siis (x,y) -tason yksikköympyrä. Kun t kasvaa, pyöritään yksikköympyrällä vastapäivään.

Esim. 16. Tarkastellaan käyrää

$$\begin{cases} x = 2 + t^2 \\ y = 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminoidaan parametri t: ratkaistaan $t = y/3$ ja sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön, jolloin

$$x = 2 + t^2 = 2 + y^2/9.$$

Kyseessä on siis oikealle aukeava paraabeli.

Käyrän suunnistus

Usein parametriväli on suljettu väli $I = [a,b]$. On mahdollista, että $a < b$ tai $b < a$. Parametrisointi määrää käyrälle positiivisen suunnan, jolloin $\mathbf{r}(a)$ on käyrän alkupiste ja $\mathbf{r}(b)$ on sen päätepiste. Jos $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, käyrää kutsutaan suljetuksi.

Käyrälle voidaan muodostaa myös vastakkainen parametrisointi, jossa käyrä pysyy samana, mutta sen kulkusuunta vaihtuu. Tällöin myös parametrisointiin liittyvä alku- ja päätepiste vaihtuvat toisikseen. Jos $\mathbf{r} : [0,1] \to C$, niin vastakkainen parametrisointi saadaan helposti kaavalla $\mathbf{r}_{-}(t) = \mathbf{r}(1-t)$, $t \in [0,1]$.

Esim. 17. Kun $t \in [0,1]$, kulkee jana $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r_0} + t\mathbf{r_1}$, pisteestä $\mathbf{r_0}$ pisteeseen $\mathbf{r_1}$, mutta jana $\mathbf{r}_{-}(t) = t\mathbf{r_0} + (1-t)\mathbf{r_1}$ kulkee pisteestä $\mathbf{r_1}$ pisteeseen $\mathbf{r_0}$

Käyrän tangentti

Tarkastellaan 3-ulotteista parametrisointia $\mathbf{r}$, joka on jatkuvasti derivoituva. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen koordinaattifunktion täytyy olla derivoituva ja derivaatan vielä lisäksi jatkuva. Parametriväliä $[t, t+\Delta t]$ vastaava käyrän sekantti on vektori

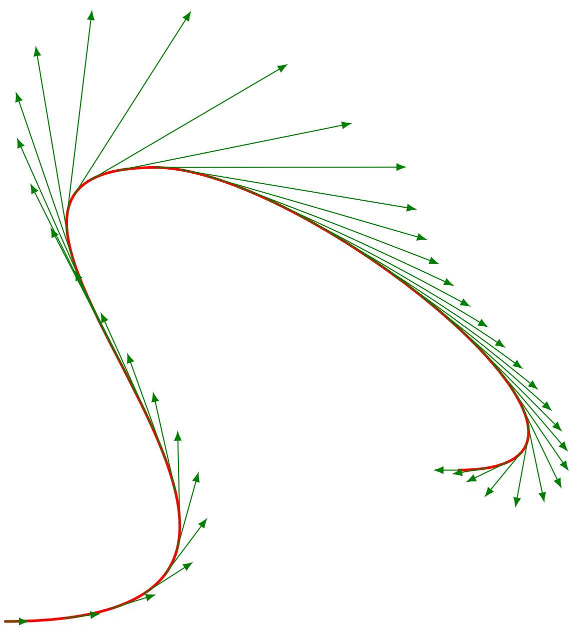
$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

Kun $\Delta t \to 0$, niin $\Delta\mathbf{r}$ kääntyy yhä enemmän käyrän tangentin suuntaiseksi, ja samalla sen pituus pienenee kohti nollaa. Skaalaamalla kertoimella Δt saadaan kuitenkin erotusosamäärää vastaava lauseke, josta nähdään, että raja-arvo

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

on olemassa ja käyrän tangenttivektori pisteessä $\mathbf{r}(t)$ voidaan käytännössä laskea kaavalla

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$



Kuva 1.1. Eräs käyrä tangenttivektoreineen

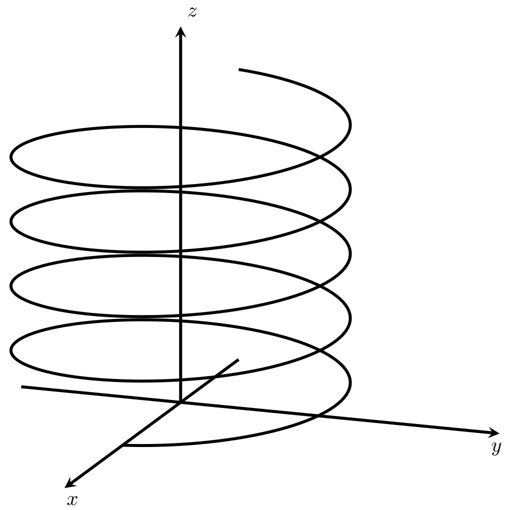
Tangenttivektoria merkitään myös $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)$, ja se määritellään vastaavalla tavalla koordinaattifunktioiden derivaattojen avulla myös korkeammissa dimensioissa.

Kun parametrisoidun käyrän ajatellaan ilmaisevan pisteen paikkaa kullakin ajanhetkellä, niin $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ on käyrän nopeusvektori. Vauhti on $|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}|$.

Esim. 18. Tarkastellaan nousevaa spiraalia

$$\begin{cases} x = \cos(\omega t) \\ y = \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = ct, \end{cases}$$

missä $\omega > 0$ on kulmanopeus ja $c > 0$ on nousunopeus.



Käyrän paikkavektori on

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

ja nopeusvektori on

$$\mathbf{v}(t) = -\omega \sin(\omega t)\mathbf{i} + \omega \cos(\omega t)\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Vauhti on

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\omega^2 \sin^2(\omega t) + \omega^2 \cos^2(\omega t) + c^2} = \sqrt{\omega^2 + c^2} \quad (= \text{vakio})$$

ja kiihtyvyys on

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}(t) = -\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{i} - \omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega^2(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}).$$

Jos kappaleen massa on m ja se liikkuu edellä mainitulla spiraaliradalla sen paikkavektorin ollessa $\mathbf{r}(t)$, niin Newtonin II lain mukaan siihen kohdistuu voima

$$\overline{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -\omega^2 m(x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}) \quad (= \text{keskeisvoima}).$$

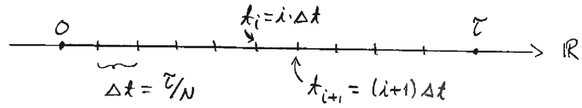
1.4 Käyrän kaarenpituus

Tarkastellaan tasokäyrää

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [0, \tau], \end{cases}$$

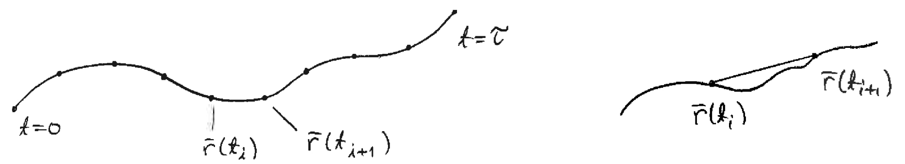
jolloin käyrän paikkavektori on siis $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$.

Jaetaan väli $[0, \tau]$ N:ään yhtä pitkään väliin $[t_i, t_{i+1}]$, kun $i \in \{0, \dots, N-1\}$, missä $t_{i+1} - t_i = \Delta t = \frac{\tau}{N}$ ja $t_0 = 0$ ja $t_N = \tau$.



Olkoon s_i käyrän pituus välillä $t \in [t_i, t_{i+1}]$, ja $\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$ ja $\Delta y_i = y(t_{i+1}) - y(t_i)$. Tällöin käyrän pituudelle saadaan arvio

$$\begin{aligned} s_i &\approx |\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)| = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t \approx \sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(t_i))^2}\,\Delta t = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_i)\right| \Delta t. \end{aligned}$$



Näin ollen käyrän koko pituudelle s välillä $t \in [0, \tau]$ saadaan arvio

$$s \approx \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t_i)\right| \Delta t \longrightarrow \int_0^{\tau} \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Määritelmä 1 (Kaarenpituus)**.** *Avaruuskäyrän* $\mathbf{r}(t)$ *kaarenpituus välillä* $t \in [a, b]$ *on*

$$\int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| \mathrm{d}t.$$

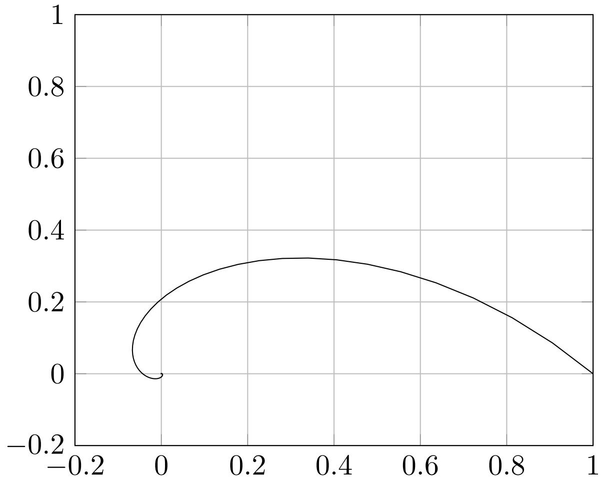
Huom. Jos $\mathbf{r}(t)$ on pisteen paikka (ajan)hetkellä t, niin $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ on pisteen nopeusvektori ja $\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|$ on pisteen vauhti, joka on skalaarisuure.

Jos käyrän parametrisointi on ainoastaan paloittain jatkuvasti derivoituva, saadaan koko käyrän kaarenpituus laskemalla osien kaarenpituudet yhteen. Koska samalla käyrällä voi olla useita erilaisia parametrisointeja, herää kysymys siitä, onko kaarenpituus itse käyrään vai pelkästään tiettyyn parametrisointiin liittyvä luku. Voidaan osoittaa, ettei kaarenpituus riipu parametrisoinnin valinnasta eikä sen suunnasta. Hieman täsmällisemmin muotoiltuna pätee: jos uusi parametrisointi saadaan muuttujanvaihdolla entisestä, niin niitä vastaavien kaarenpituusintegraalien arvot ovat samat.

Esim. 19. Lasketaan tasokäyrän

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos(t), & t \in [0, \tau], \\ y = e^{-t}\sin(t), & t \in [0, \tau], \end{cases}$$

kaarenpituus.



Käyrä on spiraali, joka lähestyy exponentiaalisen nopeasti origoa. Käyrän paikkavektori on

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos(t)\mathbf{i} + e^{-t}\sin(t)\mathbf{j}$$

ja nopeusvektori on siten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) &= (-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t))\mathbf{i} + (-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t))\mathbf{j} \\ &= -e^{-t}(\sin(t) + \cos(t))\mathbf{i} + e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 &= e^{-2t}(\sin^2(t) + 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)) \\ &\quad + e^{-2t}(\cos^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t)) \\ &= 2e^{-2t}. \end{aligned}$$

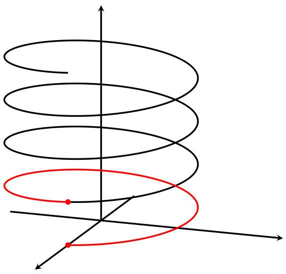
Näin ollen kaarenpituus on

$$s = \int_0^{\tau} \sqrt{2}e^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\Big|_0^{\tau} - e^{-t} = \sqrt{2}(1 - e^{-\tau}).$$

Huomataan myös, että $s \to \sqrt{2}$, kun $\tau \to \infty$. Myös rajoittamattomalla parametrivälillä määritellyllä käyrällä voi siis olla äärellinen pituus!

Esim. 20. Lasketaan käyrän

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t), \\ y = R\sin(\omega t), \\ z = ct, \end{cases}$$



kaarenpituus, kun $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ ja $R, \omega, c > 0$.

Tällä välillä $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ käyrä pyörähtää (x, y) -tasoon nähden yhden kierroksen ja nousee z -akselin suhteen matkan $\frac{2\pi c}{\omega}$.

Käyrän paikkavektori on

$$\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$$

ja nopeusvektori on

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t) = -R\omega\sin(\omega t)\mathbf{i} + R\omega\cos(\omega t) + c\mathbf{k}.$$

Täten vauhti on

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2(\omega t) + R^2\omega^2\cos^2(\omega t) + c^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + c^2}$$

ja kaarenpituus välillä $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ on

$$s = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{R^2\omega^2 + c^2}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{R^2\omega^2 + c^2}.$$

Vektoriarvoisten funktioiden derivoinnista

Olkoon $\mathbf{u}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v}(t) = X(t)\mathbf{i} + Y(t)\mathbf{j} + Z(t)\mathbf{k}$ vektoriarvoisia funktioita ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
&1.) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \\
&2.) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\mathbf{u}) = f'\mathbf{u} + f\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \\
&3.) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \\
&4.) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Yllä siis esimerkiksi funktio $\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v}$ pisteessä t on

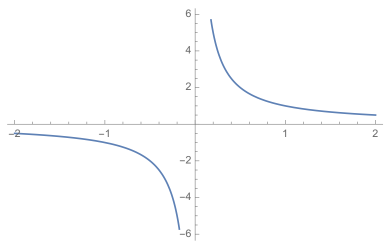
$$\begin{aligned}
(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{v})(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \mathbf{v}(t) &= (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}) \cdot (X(t)\mathbf{i} + Y(t)\mathbf{j} + Z(t)\mathbf{k}) \\
&= x'(t)X(t) + y'(t)Y(t) + z'(t)Z(t).
\end{aligned}$$

2. Usean muuttujan funktioiden differentiaalilaskenta

2.1 Usean muuttujan funktiot

Yhden muuttujan funktio on kuvaus $f : I \to \mathbb{R}$, missä $I \subset \mathbb{R}$ on kuvauksen määrittelyjoukko.

Esim. 21. $f(x) = \frac{1}{x}$. Tällöin määrittelyjoukko on $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Usean muuttujan (reaaliarvoinen) funktio on kuvaus $f : D \to \mathbb{R}$, missä $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) on kuvauksen määrittelyjoukko. Tällainen funktio siis liittää reaalisiin parametreihin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaaliluvun $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Joskus, varsinkin fysiikassa, tällaista funktiota sanotaan skalaarikentäksi.

Esim. 22. Jos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, niin funktion arvoja pisteessä $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ merkitään

$$f(x, y, z) = f(\mathbf{r}),$$

missä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ on pisteen (x, y, z) paikkavektori.

Esim. 23. Kaava $V(r, h) = \pi r^2 h$ määrittelee r-säteisen ja h-korkuisen lieriön tilavuuden. Sovelluksen tapauksessa määrittelyjoukko on $D = \{(r, h) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \geq 0,\ h \geq 0\}$. Funktion määräämä matemaattinen kaava on kuitenkin määritelty ja mielekäs kaikilla reaalilukupareilla, myös negatiivisilla.

Esim. 24. $V(a, b, c) = abc$ on kuution, jonka särmien pituudet ovat a, b ja c, tilavuus. Määrittelyjoukko siis $D = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0\}$.

Tasa-arvokäyrät

Olkoon $c \in \mathbb{R}$ vakio, $D \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio. Tällöin joukko

$$C = \{(x, y) \ : \ f(x, y) = c\}$$

on usein tasokäyrä. Kyseinen pistejoukko voi olla myös tyhjä (jos f ei saa arvoa c), tai vaikkapa koko taso. Mikäli joukko C on tasokäyrä, sitä sanotaan funktion f arvoon c liittyväksi tasa-arvokäyräksi.

Esim. 25. Korkeuskäyrät kartalla ovat tasa-arvokäyriä funktiolle, joka liittää kartalla olevaan pisteeseen (x, y) korkeuden merenpinnasta kyseisessä pisteessä.

Huom. Kolmiulotteisessa tapauksessa pistejoukot

$$S = \{(x, y, z) \ : \ f(x, y, z) = c\}$$

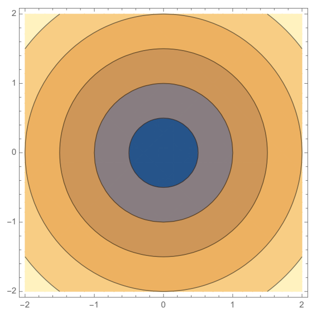
ovat yleensä pintoja, eivätkä siis avaruuskäyriä. Mikäli tällainen joukko S on pinta, sitä kutsutaan tasa-arvopinnaksi.

Esim. 26. Olkoon $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tässä tapauksessa kyseessa on kuvaus (x, y) -tasolta reaaliluvuille ja funktiota voidaan kuvata $\mathbb{R}^3$:n pinnalla $z = f(x, y)$.

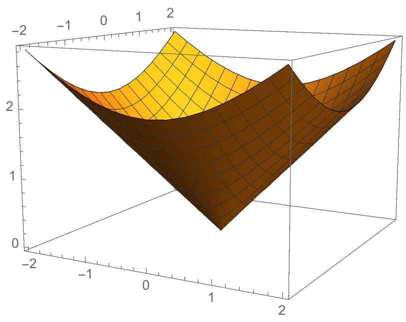
Tutkitaan tämän funktion tasa-arvokäyriä, eli niitä (x, y) -tason joukkoja, missä f on vakio:

$$f(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = c^2,$$

eli funktio on vakio (saa arvon c) ympyrän kaarilla (c-säteisillä).



Lisäksi huomataan, että funktion kuvaajassa $z = f(x, y)$ z -koordinaatti on sama kuin pisteen (x, y) etäisyys origosta, eli kuvaaja on kärjellään seisova kartio:



Esimerkin tasa-arvokäyrät ja kuvaaja Mathematicalla:

```
ContourPlot[Sqrt[x^2 + y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
Plot3D[Sqrt[x^2 + y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, BoxRatios -> Automatic]
```

2.2 Raja-arvo ja jatkuvuus

Raja-arvo

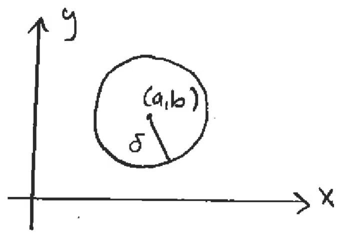
Määritelmä 2. *Olkoon funktio $f : D \to \mathbb{R}$ ja $D \subset \mathbb{R}^2$. Funktiolla on tällöin raja-arvo L pisteessä $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ jos seuraava pätee.*

Jokaiselle $\epsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$ siten, että

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \\ (x, y) \in D \end{cases} \Rightarrow \quad |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L.$$



Kiekossa pätee

$L - \varepsilon < f(x,y) < L + \varepsilon$

Laskusääntöjä

Jos raja-arvot $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ ja $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = K$ ovat olemassa, niin pätee

- $\lim_{(x,y)\to(a,b)}(f(x,y)+g(x,y)) = L+K$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LK$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{K}$, jos $K \neq 0$
- Jos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin $\lim_{(x,y)\to(a,b)} F(f(x,y)) = F(L)$.

Esim. 27.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2y = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = a^2b.$$

Esim. 28. Olkoon $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, kun $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Lähestyttäessä origoa x -akselia pitkin saadaan raja-arvo

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Lähestyttäessä origoa y -akselia pitkin saadaan raja-arvo

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ **ei** siis ole olemassa!

Huom. Yleisestikin pätee: Jos $f(x,y)$ lähestyy kahta eri arvoa, kun pistettä (a,b) lähestytään kahta eri käyrää pitkin, niin raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ei ole olemassa.

Huom. Vertaa yllä olevaa yhden muuttujan tapaukseen. Jos $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, niin raja-arvoa $\lim_{x\to a} f(x)$ ei ole olemassa.

Esim. 29. Olkoon

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}.$$

Funktio ei ole määritelty origossa, mutta sillä voi olla raja-arvo origossa. Tutkitaan asiaa:

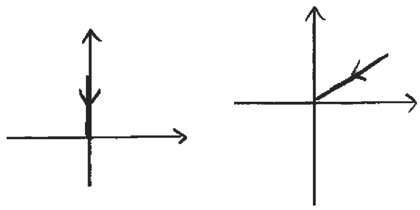
Lähestytään origoa y -akselia pitkin, jolloin saadaan

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2\cdot 0\cdot y}{y^2} = 0.$$

Kun origoa lähestytään suoraa $y = x$ pitkin, saadaan raja-arvo

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1.$$

Koska saatiin eri raja-arvot, ei raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ole olemassa.



Esim. 30. Olkoon

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}.$$

Kun origoa lähestytään x- tai y -akselia pitkin, saadaan

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$

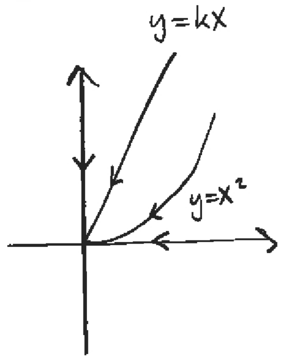
Jos origoa lähestytään suoraa $y = kx$ pitkin, saadaan

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Mutta, jos origoa lähestytään pitkin paraabelia $y = x^2$, niin huomataan, että

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1.$$

Koska saatiin eri tulos kuin edellisistä raja-arvoista ei raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ole olemassa.



Esim. 31. Osoitetaan, että funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$$

raja-arvo origossa on nolla.

Pitää siis osoittaa, että kaikille $\epsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x,y) - 0| < \epsilon, \quad \text{kun } \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Yritetään estimoida lauseketta $|f(x,y) - 0|$:

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2|y|}{x^2} = |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}.$$

Valitaan nyt mitä tahansa lukua $\epsilon > 0$ vastaten $\delta = \epsilon$. Tällöin kaikilla pisteillä (x, y), joille $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, pätee

$$|f(x, y) - 0| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon.$$

Siispä määritelmän mukaan funktion f raja-arvo origossa on 0.

Jatkuvuus

Määritelmä 3. *Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, jos*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Funktio on jatkuva joukossa D, jos se on jatkuva jokaisessa joukon D pisteessä.

Esim. 32. Funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{kun } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ei ole jatkuva origossa, sillä

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 \neq f(0, 0) = 1.$$

Huom. Jos funktiolla on olemassa raja-arvo $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$, se voidaan laajentaa jatkuvaksi pisteessä (a, b), vaikka se ei olisi alunperin siinä edes määritelty esimerkiksi nimittäjän nollakohdan vuoksi. Tämä tehdään yksinkertaisesti asettamalla $f(a, b) = L$ ja näin määritelty uusi funktio on funktion jatkuva laajennus pisteeseen (a, b).

Esim. 33. Funktio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

on jatkuva koko $\mathbb{R}^2$:ssa, sillä

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

ja kun $(a, b) \neq (0, 0)$ pätee myös

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = f(a, b).$$

2.3 Osittaisderivaatat

Osittaisderivoinnissa tarkastellaan funktion arvon muutosta koordinaattiakselien suuntaan liikuttaessa. Jso funktio $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ riippuu m:stä kappaleesta muuttujia $x_1, x_2, \ldots, x_m$, niin sillä on siten m kappaletta osittaisderivaattoja, yksi kunkin muuttujan kasvusuuntaan. Näitä merkitään monella eri tavalla:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_{x_1} = f_1 = D_1 f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_{x_2} = f_2 = D_2 f, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} = f_{x_m} = f_m = D_m f$$

Osittaisderivaatat ovat määritelty aivan kuten normaalitkin derivaatat, mutta laskemalla erotusosamäärän raja-arvo vain yhden muuttujan suhteen. Esimerkiksi kahden muuttujan tapauksessa, eli kun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{y_0 + h - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

mikäli raja-arvot ovat olemassa.

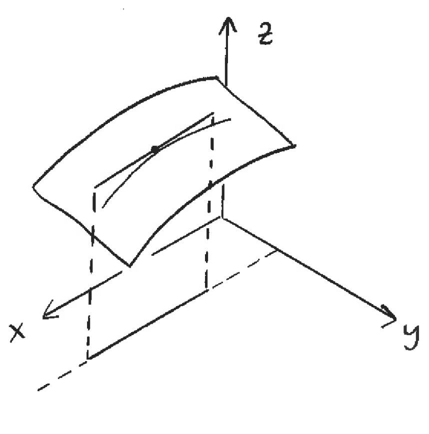
Yleisesti määritelmä on seuraava:

Määritelmä 4. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio. Tällöin kaikille $j = 1, 2, \ldots, n$ funktion f osittaisderivaatta muuttujan x_j suhteen on*

$$f_j(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

jos kyseinen raja-arvo on määritelty. Tässä $\mathbf{e}_j$ on j:s yksikkökantavektori.

Osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ siis kertoo pinnalle $z = f(x, y)$ pisteeseen $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ piirretyn x -akselin suuntaisen tangentin kulmakertoimen.



Huom. Osittaisderivaatta lasketaan kuten yhden muuttujan funktion derivaatta, kunhan muita muuttujia käsitellään kuten vakioita.

Esim. 34. Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 \sin(y)$ osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(y), \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(y).$$

Esim. 35. Funktio $g(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

sillä

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x}{y}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}$$

ja

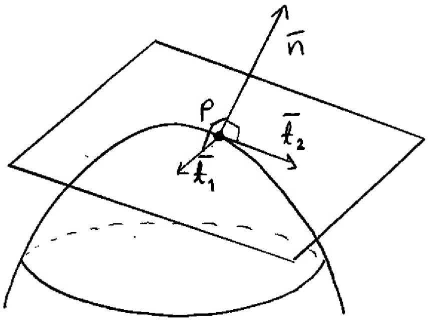
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f\left(\frac{x}{y}\right) = f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^2}.$$

Esim. 36. Jos $f(x,y,z) = \frac{2xy}{1+xz+yz}$, niin

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{2xy}{1+xz+yz} &= 2xy\frac{\partial}{\partial z}(1+xz+yz)^{-1} = -2xy(1+xz+yz)^{-2}\frac{\partial}{\partial z}(1+xz+yz) \\ &= -2xy(1+xz+yz)^{-2}(x+y) = \frac{-2xy(x+y)}{(1+xz+yz)^2}.\end{aligned}$$

Tangenttitasot ja normaalivektorit

Tarkastellaan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kuvaajaa $\mathbb{R}^3$:ssa, eli pintaa $z = f(x,y)$.

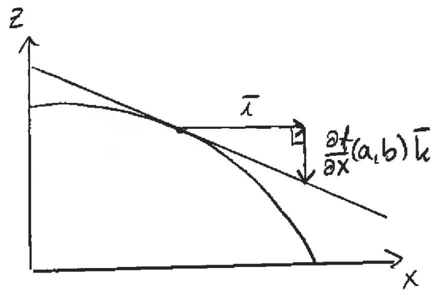


- Jos pinta $z = f(x,y)$ on sileä pisteessä $(a,b,f(a,b))$, niin sillä on olemassa ko. pisteessä tangenttitaso ja sillä vastaavasti normaalivektori.

- Olkoon pinnan tangenttivektori x -akselin suuntaan $\mathbf{t}_1$ ja y -akselin suuntaan $\mathbf{t}_2$. Tällöin $\mathbf{t}_1$ ja $\mathbf{t}_2$ ovat luonnollisesti tangenttitason suuntaisia vektoreita ja tangenttipinnan normaalivektori on kohtisuorassa näitä kumpaakin vastaan.

- Vastaavien tangenttisuorien kulmakertoimet saadaan funktion f osittaisderivaatoista, ja siten tangenttivektoreiksi voidaan valita

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{k}, \quad \text{ja} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathbf{k}.$$



- Tangenttitason normaalivektori saadaan siten näiden ristitulona, eli

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

- Jos piste $P = (x,y,z)$ on tangenttitason piste, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sen paikkavektori, ja $\mathbf{r}_0 = (a,b,f(a,b))$, niin tason yhtälö on

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{eli} \quad -(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + z - f(a,b) = 0,$$

josta saadaan

$$z = (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + f(a,b)$$

- Pisteen $(a,b,f(x,b))$ kautta kulkevaa normaalin $\mathbf{n}$ suuntaista suoraa kutsutaan <u>normaalisuoraksi</u>. Sen esitys parametrimuodossa on

$$\begin{cases} x = a - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)t, \\ y = b - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = f(a,b) + t \end{cases}$$

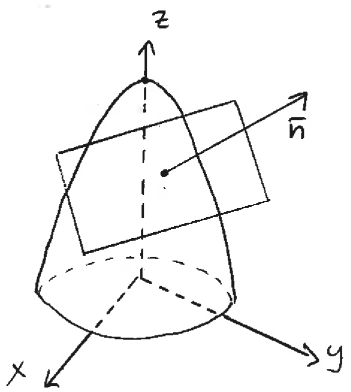
Esim. 37. Tarkastellaan paraboloidipintaa

$$z = 9 - x^2 - y^2.$$

Nyt siis $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ ja siten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y.$$

Siten pisteessä $(0,0,f(0,0)) = (0,0,9)$ tangenttitason yhtälö on



$$z = -2 \cdot 0 \cdot (x-0) - 2 \cdot 0 \cdot (y-0) + f(0,0) = 9,$$

eli kyseessä on (x,y) -tason suuntainen taso $z = 9$.

Pisteessä $(1,1,f(1,1)) = (1,1,7)$ tangenttitason yhtälö on

$$z = -2\cdot 1\cdot (x-1) - 2\cdot 1\cdot (y-1) + 7 = -2x - 2y + 11.$$

Normaalivektorin lauseke on $\mathbf{n} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$, eli pisteessä $(1,1,7)$ se on

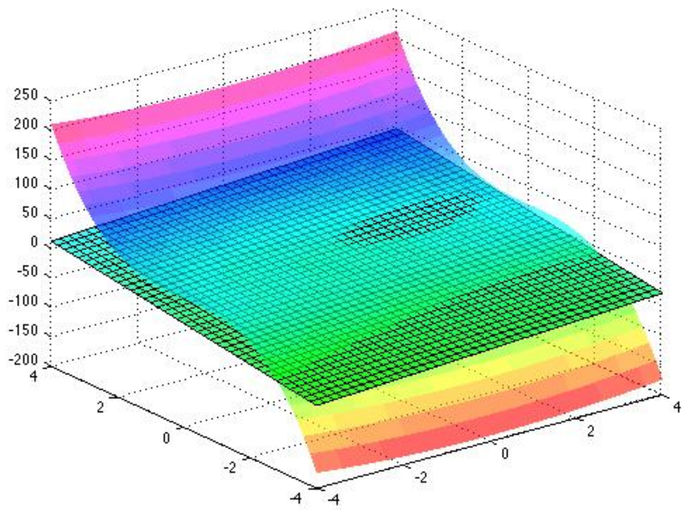
$$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Esim. 38. Pinnan $f(x,y) = x^2 + 3y^3 + 2$ normaali pisteessä $(2,1)$ on

$$\mathbf{n} = f_1(2,1)\mathbf{i} + f_2(2,1)\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

ja pisteen $(2,1,9)$ kautta kulkeva tangenttitaso on

$$\begin{aligned} z &= f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1) \\ &= 9 + 4(x-2) + 9(y-1) = 4x + 9y - 8. \end{aligned}$$



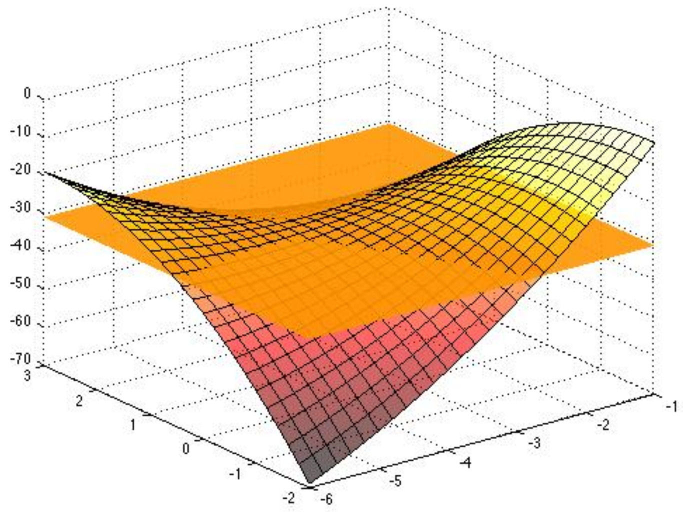
Kuva 2.1. Pinta $z = x^2 + 3y^3 + 2$ ja sen tangenttitaso pisteessä $(2,1)$

Esim. 39. Olkoon $f(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$. Etsitään pinnalle $z = f(x,y)$ tangenttitaso, joka on xy-tason suuntainen, ja määritetään sen kosketuspiste.

Kaikki xy-tason suuntaiset tasot ovat muotoa $z =$ vakio, eli tällaisilla tasoilla $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Kosketuspisteessä täytyy siis pinnalle päteä

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y + 12 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -4x - 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

mistä saadaan $x = -4$, $y = 1$, jolloin $z = f(-4,1) = -31$. Taso $z = -31$ on siis etsitty tangenttitaso, kosketuspiste $(-4,1,-31)$.



Kuva 2.2. Pinta $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ ja sen xy-tason suuntainen tangenttitaso pisteessä $(-4, 1, -31)$

2.4 Korkeamman kertaluvun derivaatat

- Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatalla tarkoitetaan osittaisderivaattaa, jossa funktiota on derivoitu useamman kuin yhden kerran.

- Kertaluku = derivointikertojen lukumäärä.

- Funktion $f(x, y)$ toisen kertaluvun derivaatat ovat
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = f_{xx} = f_{11}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = f_{yy} = f_{22}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = f_{yx} = f_{21}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = f_{xy} = f_{12}.$$
Huomaa, kuinka derivointijärjestys merkitään kahdella viimeisellä rivillä.

- Vastaavasti merkitään vielä korkeamman kertaluvun derivaattoja. Esim. funktion $g = g(x, y, z)$ eräs 5. kertaluvun derivaatta on
$$\frac{\partial^5 g}{\partial z \partial y \partial x^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right)\right)$$

Esim. 40. Lasketaan funktion $f(x, y) = x^3 y^4$ kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

Ensin ensimmäisen kertaluvun derivaatat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^4 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3y^3.$$

Sitten toisen kertaluvun derivaatat derivoimalla näitä lisää:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^4) = 6xy^4 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3) = 12x^3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3) = 12x^2y^3 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4) = 12x^2y^3.$$

Huom. Jos f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ovat kaikki jatkuvia, niin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

eli derivointijärjestyksellä ei ole väliä.

Huom. Jatkossa oletetaan, että kaikki funktiot ovat niin hyvin käyttäytyviä, että osittaisderivaatat voidaan laskea missä järjestyksessä tahansa. (Ellei vartavasten toisin mainita.)

Esim. 41. (Laplace-yhtälö) Funktio $f(x, y) = e^{kx} \sin(ky)$, $k \in \mathbb{R}$, toteuttaa Laplace-yhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Todistus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= ke^{kx} \sin(ky) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= ke^{kx} \cos(ky) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= k^2e^{kx} \sin(ky) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -k^2e^{kx} \sin(ky),
\end{aligned}$$

joten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2e^{kx} \sin(ky) - k^2e^{kx} \sin(ky) = 0.$$

Huom. Laplace-yhtälön $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ toteuttavia funktioita kutsutaan harmonisiksi. Niillä on useita mielenkiintoisia ominaisuuksia, mm.

- harmonisella funktiolla on olemassa kaikki eri kertalukujen derivaatat

- harmoninen funktio saa ääriarvonsa aina määrittelyalueen reunalla

Laplace-yhtälöllä voidaan mallintaa fysikaalisia ilmiöitä esim. nestedynamiikassa ja sähkökentissä.

Esim. 42. (Aaltoyhtälö) Olkoot f ja g kahdesti derivoituvia yhden muuttujan funktioita ja olkoon

$$w(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tällöin w toteuttaa aaltoyhtälön

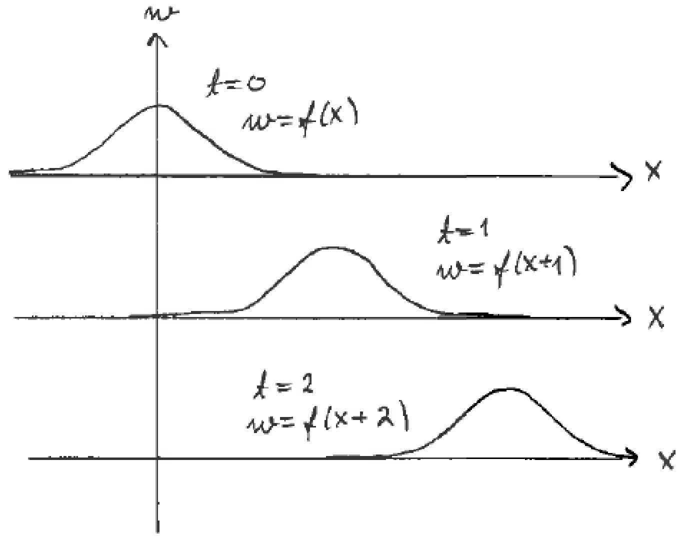
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Todistus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= -cf'(x-ct) + cg'(x+ct) \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= f'(x-ct) + g'(x+ct) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= f''(x-ct) + g''(x+ct),
\end{aligned}$$

joten nähdään, että $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Huom. Yhtälöä $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ kutsutaan (1-dim.) aaltoyhtälöksi. Jos t on aikamuuttuja, kuvaa $f(x-ct)$ nopeudella c x-akselia pitkin oikealle liikkuvaa aaltoa ja $g(x+ct)$ vastaavasti vasemmalle liikkuvaa aaltoa.



2.5 Ketjusääntö

Kertaus: Yhden muutujan funktioiden tapauksessa ketjusääntö antaa yhdistetyn funktion derivaatan:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Useamman muuttujan funktioille ketjusääntö kertoo tavan differentioida yhdistettyjä funktioita.

Esim. 43. Pasi partiolainen vaeltaa mäkisessä maastossa. Olkoot (x, y) Pasin sijaintipaikan koordinaatit kartalla ja $z(x, y)$ kyseisen paikan korkeus merenpinnasta.

Pasi kulkee pitkin polkua, ja hetkellä t hänen sijaintinsa on $x = u(t)$, $y = v(t)$. Hetkellä t Pasin korkeus merenpinnasta on siis

$$z = f(u(t), v(t)) = g(t).$$

Kuinka nopeasti korkeus muuttuu ajan funktiona?

Korkeuden muutosnopeus on $g'(t)$.

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h} \end{aligned}$$

Tämä saadaan laskettua lisäämällä ja vähentämällä osoittajasta termi $f(u(t), v(t+h))$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h} \\ &\quad + \lim_{h \to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h} \\ &= f_1(u(t), v(t))u'(t) + f_2(u(t), v(t))v'(t) \end{aligned}$$

Tässä nimittäin

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h}$$

on yhdistetyn funktion derivaatta, eli yhden muuttujan ketjusäännön mukaan $f_1(u(t), v(t))u'(t)$. Vastaavasti

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h} = f_2(u(t), v(t))v'(t).$$

Näin ollen $g'(t)$, eli Pasin havaitsema korkeuden muutos ajan funktiona hänen kulkiessaan pitkin polkua $(u(t), v(t))$, on

$$g'(t) = f_1(u(t), v(t))u'(t) + f_2(u(t), v(t))v'(t).$$

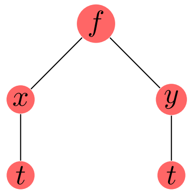
Lause 5 (Ketjusääntö). *Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ yhden muuttujan funktioita ja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Tällön $f(x(t), y(t))$ on yhden muuttujan funktio*

$$t \mapsto f(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}$$

ja sen derivaatalle pätee

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t).$$

Lyhyesti $\boxed{\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}}$



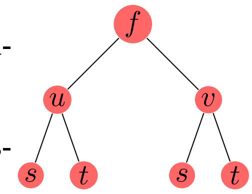
Esim. 44. Olkoot $x(t) = 2t$, $y(t) = t^2$ ja $f(x, y) = 4 - xy$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t)\\ &= (-y(t)) \cdot 2 + (-x(t)) \cdot 2t\\ &= -2t^2 - 2t2t = -6t^2.\end{aligned}$$

(Tarkistus sijoittamalla: $f(t) = 4 - x(t)y(t) = 4 - 2t \cdot t^2 = 4 - 2t^3$, joten $f'(t) = -6t^2$.)

Kahden parametrin tapaus

Entä jos $x = u(s, t)$ ja $y = v(s, t)$?
Mitä ovat funktion $g(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ derivaatat?
Derivoidaan yhden muuttujan suhteen pitäen toista vakiona, eli



$$\begin{aligned}g_1(s, t) &= f_1(u(s, t), v(s, t))u_1(s, t) + f_2(u(s, t), v(s, t))v_1(s, t)\\ g_2(s, t) &= f_1(u(s, t), v(s, t))u_2(s, t) + f_2(u(s, t), v(s, t))v_2(s, t)\end{aligned}$$

Lyhyesti

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\end{aligned}$$

Esim. 45. Olkoot $x(s, t) = st^2$, $y(s, t) = s^2 + \frac{1}{t}$ ja $f(x, y) = \sin(x^2 y)$. Nyt $\frac{\partial x}{\partial t} = 2st$, $\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\cos(x^2 y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos(x^2 y)$. Ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= 2xy\cos(x^2 y)2st - x^2\cos(x^2 y)\frac{1}{t^2}\\ &= 2st^2(s^2 + \frac{1}{t})2st\cos((st^2)^2(s^2 + \frac{1}{t})) - (st^2)^2\frac{1}{t^2}\cos((st^2)^2(s^2 + \frac{1}{t}))\\ &= (4s^4t^3 + 3s^2t^2)\cos(s^4t^4 + s^2t^3).\end{aligned}$$

(Tarkistus sijoituksella:

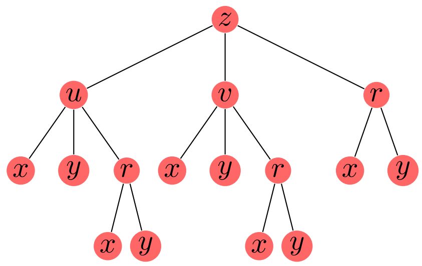
$$f(s, t) = \sin((st^2)^2(s^2 + \frac{1}{t})) = \sin(s^4t^4 + s^2t^3),$$

joten

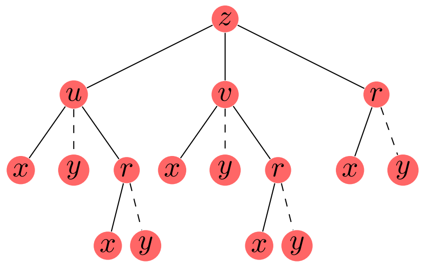
$$\frac{df}{dt} = (4s^4t^3 + 3s^2t^2)\cos(s^4t^4 + s^2t^3).)$$

Oikean säännön valinta

Esim. 46. Olkoot $z = z(u, v, r)$, $u = u(x, y, r)$, $v = v(x, y, r)$ ja $r = r(x, y)$. Piirretään riippuvuuspuu:



Tästä nähdään, että z riippuu x:stä viittä eri reittiä:



Näin ollen ketjusääntö z:n muutokselle x:n suhteen saa muodon

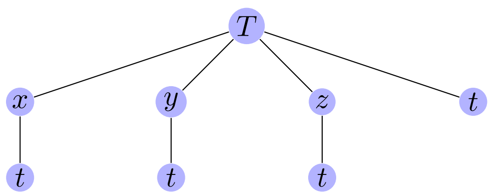
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

Kokonaisderivaatta ja osittaisderivaatta

Esim. 47. Olkoon $(x(t), y(t), z(t))$ kärpäsen paikka hetkellä t ja $T(x, y, z, t)$ pisteen (x, y, z) lämpötila hetkellä t. Tällöin kokonaisderivaatta

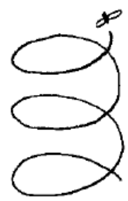
$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

on kärpäsen liikkuessaan havaitsema lämpötilan muutos. Osittaisderivaatta $\frac{\partial T}{\partial t}$ on lämpötilan muutos tietyssä paikassa ajan funktiona.



Esim. 48. Kärpänen lentää spiraalirataa

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ x(t) = t \end{cases}$$



Lämpötila pisteessä (x, y, z) hetkellä t on

$$T(x,y,z,t) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + 25 - \frac{t}{3600}$$

(Origossa on grilli ja ilta viilenee asteen tunnissa.)

Tällöin tietyssä pisteessä lämpötilan muutos on

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{3600},$$

kun taas kärpäsen radallaan kokema muutos on

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} \\
&= \frac{-2x(-\sin t)}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{-2y\cos t}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{-2z \cdot 1}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{1}{3600} \\
&= \frac{-2t}{(\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)^2} - \frac{1}{3600} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{3600}.
\end{aligned}$$

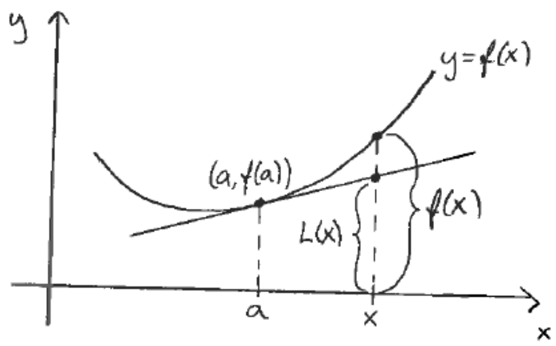
(Illan viilenemisen lisäksi kärpänen loittonee grillistä.)

2.6 Lineaariapproksimaatiot ja differentiaalit

Kertaus: Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arvoja pisteen $a \in \mathbb{R}$ lähellä voidaan approksimoida tangentin avulla:

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Tässä $L(x)$ on funktion f linearisaatio pisteessä a.



Kahden muuttujan funktion linearisointi

Vastaavasti funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ arvoja pisteen $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ lähellä voidaan approksimoida tangenttitason avulla:

$$\boxed{f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b)}$$

Tässä $L(x, y)$ on funktion f linearisaatio pisteessä (a, b).

Esim. 49. Linearisoidaan funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ pisteessä $(3, 2)$.

Nyt $f(3, 2) = 8$, $f_1(x, y) = 2x - y$ eli $f_1(3, 2) = 4$ ja $f_2(x, y) = -x + y$ eli $f_2(3, 2) = -1$, joten linearisaatio pisteessä $(3, 2)$ on

$$L(x, y) = f(3, 2) + f_1(3, 2)(x - 3) + f_2(3, 2)(y - 2) = 4x - y - 2.$$

Differentioituvuus

Osittaisderivaattojen $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ olemassaolo ei takaa, että f olisi jatkuva tai että linearisoinnista aiheutuva virhe olisi verrannollinen etäisyyteen linearisointipisteestä. Valitaan tämä jälkimmäinen ehto differentioituvuuden määritelmäksi:

Määritelmä 5. *Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä (a, b), jos*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - hf_1(a, b) - kf_2(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

(Piilotettu vaikeus: $(h,k) \to (0,0)$ ei saa riippua polusta!)

Geometrisesti tämä tarkoittaa, että funktio on differentioituva, jos sitä voi approksimoida tangenttitasollaan (pienessä ympäristössä).

Huom. Funktio $f(x,y)$ on differentioituva pisteessä (a,b)
$\Longleftrightarrow$ Pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitaso pisteessä (a,b) ei ole vertikaalinen
$\Longleftrightarrow$ Osittaisderivaatat $f_x(x,y)$ ja $f_y(x,y)$ ovat jatkuvia pisteessä (a,b)

Esim. 50. Minkä suuruinen virhe aiheutuu, jos funktiota $f(x,y) = x^3 + xy^2$ approksimoi sen linearisaatiolla?

Linearisoidaan f pisteessä (x,y) ja tarkastellaan sitten virhettä pisteessä $(x+h, y+k)$.

$$\begin{aligned} L(x+h,y+k) &= f(x,y) + f_1(x,y)h + f_2(x,y)k \\ &= x^3 + xy^2 + (3x^2+y^2)h + 2xyk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{virhe} &= f(x+h,y+k) - L(x+h,y+k) \\ &= (x+h)^3 + (x+h)(y+k)^2 - (x^3 + xy^2 + (3x^2+y^2)h + 2xyk) \\ &= 3xh^2 + h^3 + 2yhk + hk^2 + xk^2 \end{aligned}$$

Huom. Esimerkkifunktion approksimoinnin virhe on polynomi h:n ja k:n suhteen, eikä siinä ole astetta 2 matalampia termejä. Näin ollen virhe lähestyy nollaa (kun $h,k \to 0$) samaa vauhtia, kuin etäisyyden neliö $h^2 + k^2$. Siis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3xh^2 + h^3 + 2yhk + hk^2 + xk^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

sillä osoittaja lähestyy nollaa nopeammin kuin nimittäjä. Huomataan siis, että differentioituvuusehto

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

pätee, eli esimerkkifunktio f on differentioituva.

Differentiaalit

Oletetaan, että funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ osittaisderivaatat ovat olemassa. Tällöin sen kokonaisdifferentiaali (tai lyhyesti differentiaali) määritellään seuraavasti:

Määritelmä 6. *Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentiaali on*

$$\begin{aligned} df &:= \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \\ &= f_1(x_1,\ldots,x_n)dx_1 + \ldots + f_n(x_1,\ldots,x_n)dx_n. \end{aligned}$$

Näin ollen df on $2n$-riippumattoman muuttujan funktio.

Differentioituvalle funktiolle df on approksimaatio funktion arvon muutokselle

$$\Delta f = f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, \ldots, x_n).$$

Muutoksen Δf ja differentiaalin df ero on pieni verrattuna tarkastelupisteiden $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n)$ väliseen etäisyyteen:

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(dx_1)^2 + \ldots (dx_n)^2}} \to 0, \text{ kun } dx_j \to 0, j = 1, \ldots, n.$$

Differentiaalit ovat siis toinen tapa tarkastella linearisaatiota.

Esim. 51. Heilurin jaksolle pätee $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Oletetaan, että heilurin pituus kasvaa 2% ja kiihtyvyys pienenee 0.6%. Mitä tapahtuu jaksolle?

Nyt siis $dL = \frac{2}{100}L$ ja $dg = -\frac{6}{1000}g$. Jakson differentiaali on

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\partial T}{\partial L}dL + \frac{\partial T}{\partial g}dg = \frac{2\pi}{2\sqrt{Lg}}dL - \frac{2\pi\sqrt{L}}{2g^{3/2}}dg \\ &= \frac{2\pi}{2\sqrt{Lg}}\frac{2}{100}L - \frac{2\pi\sqrt{L}}{2g^{3/2}}\frac{-6}{1000}g \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(\frac{2}{200} + \frac{3}{1000}\right) = \frac{13}{1000}T \end{aligned}$$

eli jakso kasvaa 1.3%.

Jacobin matriisi

Tarkastellaan sitten vektorimuuttujan vektoriarvoista funktiota

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

missä $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ovat reaaliarvoisia funktioita. Siis $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Asetetaan

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

eli $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Miten y muuttuu, kun x muuttuu?

Määritelmä 7 (Jacobin matriisi)**.** *Funktion* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *Jacobin matriisi* *on*

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Huom. $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on itsekin kuvaus. Se on f:n derivaatta! Jacobin matriisi kuvaa sitä, minkä verran ”avaruus venyy“ kuvauksessa f.

Määritelmä 8. *Funktion* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *differentiaali on*

$$d\mathbf{f} = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Esim. 52. Olkoon $\mathbf{f}(x, y) = (xe^y + \cos(\pi y), x^2, x - e^y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Approksimoidaan vektoria $\mathbf{f}(1.02, 0.01)$ pisteessä $\mathbf{x} = (1, 0)$ lasketun Jacobin matriisin avulla.

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^y & xe^y - \pi\sin(\pi y) \\ 2x & 0 \\ 1 & -e^y \end{bmatrix} \text{ eli } J_{\mathbf{f}}(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nyt $d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix}$, joten

$$d\mathbf{f} = J_{\mathbf{f}}(1, 0)d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.04 \\ 0.01 \end{bmatrix}.$$

Kun lisäksi $\mathbf{f}(1, 0) = (2, 1, 0)$, niin saadaan

$$\mathbf{f}(1.02, 0.01) \approx \mathbf{f}(1, 0) + d\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2.03 \\ 1.04 \\ 0.01 \end{bmatrix}.$$

Esim. 53. Muunnettaessa napakoordinaatit (r, φ) karteesisiksi koordinaateiksi suoritetaan muunnos

$$\mathbf{f}(r, \varphi) = (\underbrace{r\cos\varphi}_{=x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{=y}).$$

Tämän muunnoksen Jacobin matriisi on

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Jacobin matriisi, ja erityisesti sen determinantti, tulevat esiintymään kurssilla vielä paljon. Samalla niiden merkitys ja käyttö tarkentuu.

2.7 Gradientti ja suunnattu derivaatta

Osittaisderivaatta kertoo siis funktion muutosnopeuden valitun koordinaattiakselin suuntaan. Mutta miten funktion arvot muuttuvat muihin kuin koordinaattiakselien suuntiin liikuttaessa?

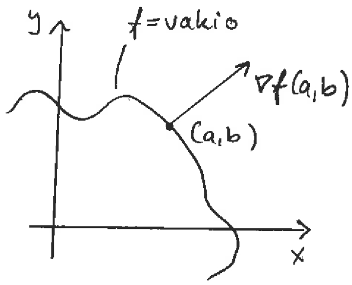
Olkoon f funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pisteessä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funktion gradientti on vektori

$$\boxed{\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{j}.}$$

Esim. 54. Olkoon $f(x, y) = 3ye^x$. Tällöin

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{j} = 3ye^x\mathbf{i} + 3e^x\mathbf{j}.$$

Huom. Jos $\nabla f(a, b) \neq 0$, niin $\nabla f(a, b)$ on kohtisuorassa funktion f sitä tasa-arvokäyrää vastaan, joka kulkee pisteen (a, b) kautta.



Perustelu: Olkoon

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

pisteen (a, b) kautta kulkeva tasa-arvokäyrä siten, että $x(0) = a$ ja $y(0) = b$, eli kun $t = 0$ ollaan pistessä (a, b).

Tasa-arvokäyrällä siis funktion arvo pysyy vakiona, eli pätee $f(x(t), y(t)) = \text{vakio} = c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c = 0,$$

josta saadaan

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t).$$

Pisteessä (a, b), eli kun $t = 0$, pätee siten

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\mathbf{j}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)\mathbf{j}\right)$$
$$= \nabla f(a, b) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(0),$$

missä $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)\mathbf{j}$ on tasa-arvokäyrän nopeusvektori pisteessä $t = 0$.

Saatiin siis, että $\nabla f(a,b)$ on kohtisuorassa tasa-arvokäyrän nopeusvektoria (eli käyrän tangentin suuntaista vektoria) vastaan pisteessä (a,b). Tämä tarkoittaa, että $\nabla f(a,b)$ on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan pisteessä (a,b).

Esim. 55. Etsitään käyrän $x^2 - 3xy + 2y^2 = 4$ normaalivektori pisteessä $(0,\sqrt{2})$. (Huom. piste on käyrällä sillä $0^2 - 3 \cdot 0 \cdot \sqrt{2} + 2(\sqrt{2})^2 = 4$.)

Määritellään $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, jolloin tarkasteltava on funktion f se tasa-arvokäyrä jossa $f(x,y) = 4$.

Nyt

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3y)\mathbf{i} + (4y - 3x)\mathbf{j}$$

ja siten

$$\nabla f(0,\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}\mathbf{i} + 4\sqrt{2}\mathbf{j} \neq 0.$$

Gradientti $\nabla f(0,\sqrt{2})$ on pisteessä $(0,\sqrt{2})$ kohtisuorassa tasa-arvokäyrää vastaan, eli käyrän $x^2 - 3xy + 2y^2 = 4$ normaalin $\mathbf{n}$ suuntainen. Voidaan siten valita esimerkiksi

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla f(0,\sqrt{2}) = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.$$

Suunnattu derivaatta

Suunnattu derivaatta kertoo funktion muutosnopeuden tiettyyn suuntaan siirryttäessä.

Olkoon f funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ yksikkövektori, eli $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Funktion f suunnattu derivaatta pisteessä (a,b) suuntaan $\mathbf{u}$ on

$$\boxed{(D_{\mathbf{u}}f)(a,b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a + tu_1, b + tu_2)\Big|_{t=0}}$$

Huom. Jos $\mathbf{r}_0 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ on pisteen (a,b) paikkavektori, niin

$$f(a + tu_1, b + tu_2) = f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{u}).$$

Koska $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{u}$ on vektoriparametrisointi suoralle, jonka alkupiste on (a,b) ja suunta $\mathbf{u}$, mittaa $(D_{\mathbf{u}}f)(a,b)$ siis f:n muutosnopeutta pisteestä (a,b) suuntaan $\mathbf{u}$ siirryttäessä.

Ketjusäännöllä saadaan

$$(D_{\mathbf{u}}f)(a,b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+tu_1, b+tu_2)\Big|_{t=0}$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+tu_1, b+tu_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a+tu_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a+tu_1, b+tu_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b+tu_2) \right)\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)u_2 = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u}.$$

Saatiin siis, että funktion suunnattu derivaatta suuntaan $\mathbf{u}$ on

$$\boxed{(D_{\mathbf{u}}f)(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u},}$$

kun $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ on yksikkövektori.

Esim. 56. Suunnatut derivaatat koordinaattiakselien suuntaan ovat

$$(D_{\mathbf{i}}f)(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{i} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

ja

$$(D_{\mathbf{j}}f)(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

eli normaalit osittaisderivaatat.

Huom. Jos $\nabla f(a,b) \neq 0$, niin

$$(D_{\mathbf{u}}f)(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u} = |\nabla f(a,b)||\mathbf{u}|\cos(\theta),$$

missä θ on vektoreiden $\nabla f(a,b)$ ja $\mathbf{u}$ välinen kulma. Siten pätee:

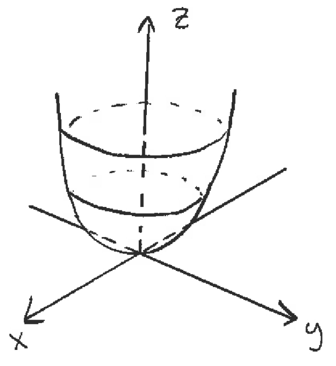
- $D_{\mathbf{u}}f$ on suurin, kun $\cos(\theta) = 1$, eli kun $\nabla f(a,b)$ ja $\mathbf{u}$ ovat samansuuntaiset.

  $\boxed{\text{Jos } \nabla f \neq 0, \text{ niin } f \text{ kasvaa voimakkaimmin suuntaan } \nabla f.}$

- $D_{\mathbf{u}}f$ on pienin, kun $\cos(\theta) = -1$, eli kun $\nabla f(a,b)$ ja $\mathbf{u}$ ovat vastakkaissuuntaiset.

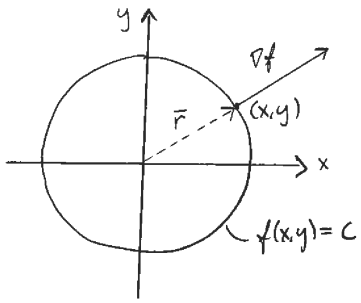
  $\boxed{\text{Jos } \nabla f \neq 0, \text{ niin } f \text{ vähenee voimakkaimmin suuntaan } -\nabla f.}$

Esim. 57. $f(x,y) = (x^2+y^2)/2$. Funktion kuvaaja on tällöin paraboloidi:



$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathbf{j} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{r},$$

missä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ on pisteen (x,y) paikkavektori. Pisteessä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ funktio f siis kasvaa voimakkaimmin suuntaan $\nabla f = \mathbf{r}$ ja vähenee voimakkaimmin suuntaan $-\nabla f = -\mathbf{r}$.



Jos $\nabla f(x,y) = 0$, niin $(x,y) = (0,0)$. Tällöin ∇f ei anna tietoa funktion kasvusta. Kuvasta kuitenkin nähdään, että origossa funktio kasvaa yhtä nopeasti kaikkiin suuntiin.

Esim. 58. $f(x,y) = x^2 - y^2$. Millainen on funktion kuvaaja $z = f(x,y)$?

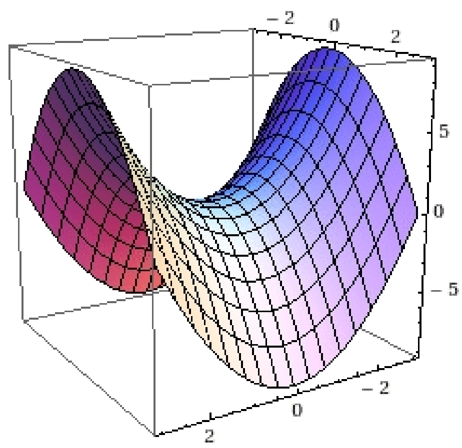
1.) Kun $x = 0$, saadaan $z = f(0,y) = -y^2$. Eli (y,z) -tasossa kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli ja käyrä $(0,y,-y^2)$ kuuluu pinnalle.

2.) Kun $y = 0$, saadaan $z = f(x,0) = x^2$. Eli (x,z) -tasossa kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja käyrä $(x,0,x^2)$ kuuluu pinnalle.

3.) Kun $x = 1$, saadaan $z = f(1,y) = 1 - y^2$. Eli tasossa $x = 1$ kuvaaja on jälleen alaspäin aukeava paraabeli ja käyrä $(1,y,1-y^2)$ kuuluu pinnalle.

4.) Kun $x = -1$, saadaan $z = f(-1,y) = 1-y^2$. Eli tasossa $x = -1$ kuvaaja on jälleen alaspäin aukeava paraabeli ja käyrä $(-1,y,1-y^2)$ kuuluu pinnalle.

Kyseessä on siis satulapinta!



Funktiolle pätee

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j},$$

joten origossa gradientti on nolla, eikä se anna tietoa funktion kasvusta. Kuvasta nähdään, että origosta funktio kasvaa voimakkaimmin suuntiin $\mathbf{i}$ ja $-\mathbf{i}$ ja vähenee voimakkaimmin suuntiin $\mathbf{j}$ ja $-\mathbf{j}$.

Pisteessä $(1, 1)$ taas

$$\nabla f(1, 1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \neq 0,$$

ja siten f kasvaa voimakkaimmin suuntaan $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ja vähenee voimakkaimmin suuntaan $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Kolmen muuttujan funktion gradientti

Olkoon f funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Pisteessä $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ funktion gradientti on vektori

$$\boxed{\nabla f(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\mathbf{k}.}$$

Myös tässä tapauksessa pätee: jos $\nabla f \neq 0$, niin ∇f osoittaa voimakkaimman kasvun suuntaan ja vastaavasti $-\nabla f$ osoittaa voimakkaimman vähenemisen suuntaan.

Huom. Samoin kuin kahden muuttujan funktiolle, pätee myös kolmen muuttujan funktiolle: Jos piste (a, b, c) toteuttaa $f(a, b, c) = 0$ (eli kuuluu funktion f tasa-arvopinnalle $f = 0$) ja $\nabla f(a, b, c) \neq 0$, niin tällöin $\nabla f(a, b, c)$ on kohtisuorassa tasa-arvopintaa $f(x, y, z) = 0$ kohtaan.

Esim. 59. Etsitään pinnan $z - 2x^2 + 4xy = 3$ tangenttitaso pisteessä $(1, 1, 1)$. (Huom. piste kuuluu pinnalle, sillä $1 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 3$)

Tapa 1.

Pinta on funktion $f(x, y) = z - 2x^2 + 4xy - 3$ tasa-arvopinta $f(x, y, z) = 0$. Nyt

$$\nabla f(x, y, z) = (-4x + 4y)\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

joten $\nabla f(1, 1, 1) = 4\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq 0$. Siten tasa-arvopinnan normaali pisteessä $(1, 1, 1)$ on $\nabla f(1, 1, 1) = 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Jos $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ on tasa-arvopinnan pisteen $(1, 1, 1)$ paikkavektori ja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, niin pinnan tangenttitason yhtälö on

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ((x - 1)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k})) \cdot (4\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0,$$

josta saadaan yhtälö

$$4y + z = 5.$$

Tapa 2.

Sillä tarkastelemme pintaa, joka on funktion $F(x,y) = 2x^2 - 4xy + 3$ kuvaaja $z = F(x,y) = 2x^2 - 4xy + 3$, voidaan tangenttitason yhtälö laskea myös suoraan tangenttitason kaavasta

$$z = (x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)+F(a,b) = (x-1)\cdot 0+(y-1)\cdot(-4)+1 = -4y+5.$$

Huom. Suunnattu derivaatta lasketaan kolmen (tai useamman) muuttujan tapauksessa kuten aiemminkin,

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b,c) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b,c),$$

kun $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $|\mathbf{u}| = 1$.

Esim. 60. Olkoon $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Lasketaan muutos mittayksikköä kohti pisteessä $(1,-1,2)$, kun muutosta tarkastellaan kohti pistettä $(3,1,1)$.

Suuntavektori pisteestä $(1,-1,2)$ pisteeseen $(3,1,1)$ on $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, joten yksikkösuuntavektori on $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Gradientti on $\nabla f(x,y,z) = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$, eli tarkastelupisteessä $\nabla f(1,-1,2) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Kysytty muutos on

$$D_{\mathbf{u}}f(1,-1,2) = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = -\frac{4}{3}.$$

2.8 Implisiittifunktiot

Kun (x, y) -tason käyrä on annettu kahden muuttujan funktion tasa-arvokäyränä, eli muodossa $F(x, y) = 0$, se on implisiittisesti määritelty käyrä.

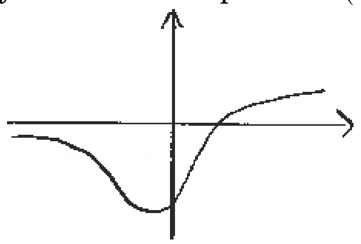
Esim. 61. Funktion $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ tasa-arvokäyrä $F(x, y) = 0$ määrittelee implisiittisesti yksikköympyrän. (Vrt. yksikköympyrä voidaan myös määritellä eksplisiittisesti kahden kuvaajan $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{1 - x^2}$ avulla.)

Kysymys: Milloin käyrä $F(x, y) = 0$ voidaan esittää muodossa $y = y(x)$ tai $x = x(y)$?

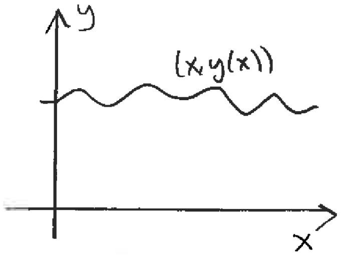
Esim. 62. Tarkastellaan käyrää $y + x^2y - 2x + 3 = 0$. Tästä voidaan ratkaista

$$y = y(x) = \frac{2x - 3}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

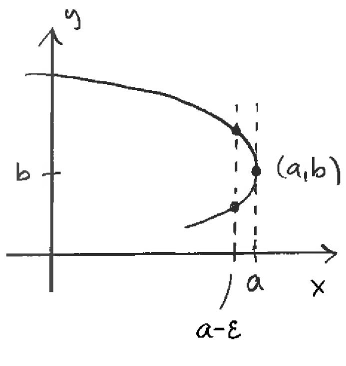
Käyrä siis koostuu pisteistä $(x, y(x))$, $x \in \mathbb{R}$.



Esim. 63. Tässä käyrän pisteiden y -koordinaatti voidaan ratkaista yksikäsitteisesti, kun x -koordinaatti tunnetaan.



Esim. 64. Tässä piste (a, b) on ongelmallinen. Sen lähellä käyrän pisteiden y -koordinaatti ei määräydy yksikäsitteisesti x -koordinaatista.



Huom. Jos y ratkaistaan x:n funktiona, niin ongelmia saattaa esiintyä pisteissä, joissa käyrän tangenttisuora on y -akselin suuntainen.

Tiedämme, että tasa-arvokäyrän $F(x,y)=0$ normaali pisteessä (a,b) on $\mathbf{n}=\nabla F(a,b)=\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j}$ (jos $\nabla F(a,b)\neq 0$), joten ongelmallisia ovat ne pisteet, joissa $\mathbf{n}\parallel\mathbf{i}$, eli

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0.$$

Lause 6 (Implisiittifunktiolause)**.** *Olkoon $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva funktio siten, että*

1.) $f(a,b)=0$,

2.) $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$.

Tällöin pisteen (a,b) lähellä yhtälön $f(x,y)=0$ ratkaisu voidaan esittää muodossa $y=y(x)$.

Huom. Ehto 2.) takaa, että tasa-arvokäyrän $f(x,y)=0$ tangentti ei ole y -akselin suuntainen pisteessä (a,b).

Huom. Vastaavasti: Jos $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$, niin ratkaisu voidaan esittää muodossa $x=x(y)$. Tällöin tangenttisuora ei vastaavasti ole x -akselin suuntainen.

Esim. 65. (Yksikköympyrä) Piste (x,y) kuuluu yksikköympyrälle jos $x^2+y^2=1$. Kyseessä on siis funktion $f(x,y)=x^2+y^2-1$ tasa-arvokäyrä $f(x,y)=0$.

Siispä

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2y\neq 0,$$

joten käyrä voidaan esittää muodossa $y=y(x)$ kaikkien niiden yksikköympyrän pisteiden ympäristössä, joissa $y\neq 0$ (eli muiden kun pisteiden $(\pm 1,0)$ ympäristöissä). Esitykseksi saadaan $y=\sqrt{1-x^2}$, joka on ylempi puoliympyrä, ja $y=-\sqrt{1-x^2}$, joka on alempi puoliympyrä.

Vastaavasti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x\neq 0,$$

joten käyrä voidaan esittää muodossa $x=x(y)$ kaikkien niiden yksikköympyrän pisteiden ympäristössä, joissa $x\neq 0$ (eli muiden kun pisteiden $(0,\pm 1)$ ympäristöissä). Esitykseksi saadaan $x=\sqrt{1-y^2}$, joka on oikea puoliympyrä, ja $x=-\sqrt{1-y^2}$, joka on vasen puoliympyrä.

Esim. 66. Tarkastellaan tasa-arvokäyrää $f(x,y) = y + x^2y - 2x + 3 = 0$. Aikaisemmin saatiin jo

$$y = y(x) = \frac{2x-3}{1+x^2}, \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Milloin saadaan esitys $x = x(y)$?

Esitys on olemassa pisteen (x,y) lähellä mikäli

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y + x^2y - 2x + 3 = 0, \\ 2xy - 2 \neq 0. \end{cases}$$

Etsitään ensin "pahat" pisteet, joissa $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} y + x^2y - 2x + 3 = 0 & \qquad\qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + x^2\frac{1}{x} - 2x + 3 = 0 \\ xy = 1 \qquad \Rightarrow \quad x \neq 0 \text{ ja } y = \frac{1}{x} & \end{cases}$$

Saatiin siis yhtälö

$$1 + x^2 - 2x^2 + 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Siten esitys $x = x(y)$ on olemassa kaikkialla muualla, paitsi niiden pisteiden ympäristössä, joissa $x = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

Implisiittifunktiolause avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Implisiittifunktiolause yleistyy sellaisenaan myös avaruuteen $\mathbb{R}^3$ (ja myös vielä korkeampiulotteisiin avaruuksiin).

Lause 7 (Implisiittifunktiolause)**.** *Olkoon f funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, joka on jatkuvasti derivoituva, ja jolla*

1.) $f(a,b,c) = 0$

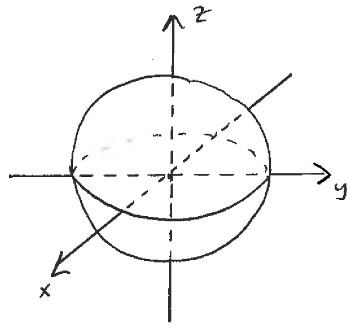
2.) $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0.$

Tällöin pisteen (a,b,c) lähellä yhtälön $f(x,y,z) = 0$ ratkaisu voidaan esittää muodossa $z = z(x,y)$.

Esim. 67. Yksikköpallo on funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ tasa-arvopinta $f(x,y,z) = 0$. Olkoon (a,b,c) piste pallolla, jolloin pisteen lähellä pallopinta voidaan esittää muodossa $(x,y,z(x,y))$ jos

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2c \neq 0.$$

Esitys siis löytyy kunhan piste (a,b,c) ei ole (x,y) -tasossa.



Implisiittinen derivointi

Oletetaan, että tasa-arvokäyrä $f(x, y) = 0$ voidaan esittää muodossa $y = y(x)$. Kun yhtälöä

$$f(x, y(x)) = 0$$

derivoidaan, saadaan ketjusäännöllä

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) y'(x) = 0.$$

Olkoon $y_0 = y(x_0)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Tällöin

$$\boxed{y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.}$$

Huom. Jos esitys $y = y(x)$ on olemassa, voidaan $y'(x)$ laskea suoraan funktiosta f ilman että tunnetaan y:n lauseketta.

Esim. 68. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Olkoon $f(x_0, y_0) = 0$ ja oletetaan, että pisteen (x_0, y_0) ympäristössä voidaan ratkaista $y = y(x)$.

Tällöin

$$x^2 + (y(x))^2 - 1 = 0 \qquad ||\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad \Rightarrow \quad 2x + 2y(x)y'(x) = 0,$$

joten pisteessä (x_0, y_0) saadaan

$$2x_0 + 2y_0 y'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Yksikköympyrän tangenttisuora pisteessä (x_0, y_0) on siten

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Tässä tapauksessa voitaisiin toki myös ratkaista $y(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ josta saadaan

$$y'(x) = \pm\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\pm\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{y(x)},$$

kun $y(x) \neq 0$. Sijoittamalla $x = x_0$ päädytään samaan tulokseen kuin yllä.

Implisiittiset yhtälöryhmät

Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0, \end{cases}$$

missä $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita.

Kysymys: Jos piste (x_0, y_0, u_0, v_0) toteuttaa yhtälöryhmän, milloin yhtälöryhmän ratkaisu voidaan esittää muodossa $(x, y, u(x,y), v(x,y))$ pisteen $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ lähellä?

Vastaus: Silloin kun kaikki derivaatat $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ ovat äärellisiä. Yritetään siis ratkaista yhtälöryhmästä nämä derivaatat ja katsotaan mikä ehto saadaan.

Huom.

- Yhtälöryhmän ratkaisu on $\mathbb{R}^4$:n osajoukko.

- Voitaisiin myös etsiä esityksiä $(x(u,v), y(u,v), u, v)$ tai $(x(y,u), y, u, v(y,u))$ jne ...

- Yhtälöryhmää voidaan myös ajatella vektoriarvoisen funktion $\mathbf{W}(x,y,u,w) = F(x,y,u,v)\mathbf{i} + G(u,v,u,v)\mathbf{j}$ (nyt siis $W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$) yhtälöksi $W(x,y,u,v) = 0$.

Oletetaan, että pisteen $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ lähellä yhtälöryhmän ratkaisu voidaaan esittää muodossa $(x, y, u(x,y), v(x,y))$. Tällöin

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0. \end{cases}$$

Halutaan ratkaista tästä ensin $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial x}$, joten derivoidaan x:n suhteen ketjusäännöllä:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,u(x,y),v(x,y)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(\ldots) \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial u}(\ldots)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial v}(\ldots)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,y,u(x,y),v(x,y)) \cdot 1 + \frac{\partial G}{\partial y}(\ldots) \cdot 0 + \frac{\partial G}{\partial u}(\ldots)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial G}{\partial v}(\ldots)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \end{cases}$$

Pisteessä $(x, y, u(x,y), v(x,y)) = P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ merkitään $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,u(x,y),v(x,y)) = F_x(P_0)$ jne, jolloin yllä oleva yhtälöryhmä on sama kuin

$$\begin{cases} F_x(P_0) + F_u(P_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + F_v(P_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = 0, \\ G_x(P_0) + G_u(P_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + G_v(P_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

Tämä voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_x(P_0) \\ G_x(P_0) \end{bmatrix}.$$

Yhtälöllä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos

$$\det\left(\begin{bmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{bmatrix}\right) \neq 0 \tag{2.1}$$

ja tällöin

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_x(P_0) \\ G_x(P_0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{det\left(\begin{bmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{bmatrix}\right)} \begin{bmatrix} G_v(P_0) & -F_v(P_0) \\ -G_u(P_0) & F_u(P_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x(P_0) \\ G_x(P_0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Samoin saadaan derivoimalla alunperin y:n suhteen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_y(P_0) \\ G_y(P_0) \end{bmatrix},$$

jos (2.1) pätee.

Derivaatat $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ saatiin siis ratkaistua jos (2.1) pätee.

Määritelmä 9. *Funktioiden F ja G Jacobin determinantti muuttujien u ja v suhteen on*

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Huom. Yhtälöryhmästä (2.2) saadaan ratkaistua

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{G_v(P_0)F_x(P_0) - F_v(P_0)G_x(P_0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

ja vastaavasti myös muut derivaatat.

Lause 8 (Implisiittifunktiolause yhtälöryhmille)**.** *Olkoon $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ ratkaisu yhtälöryhmälle*

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$$

Jos $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P_0) \neq 0$, niin silloin yhtälöryhmän ratkaisu pisteen P_0 ympäristössä voidaan esittää muodossa

$$(x, y, u(x, y), v(x, y)).$$

Esim. 69. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = uv. \end{cases}$$

Voidaanko ratkaisu esittää pisteen $(5,2,1,2)$ lähellä muodossa $(x, y, u(x,y), v(x,y))$?

(Selvästi ratkaisu voidaan esittää muodossa $(x(u,v), y(u,v), u, v) = (u^2 + v^2, uv, u, v)$.)

Määritellään funktiot $F(x,y,u,v) = u^2 + v^2 - x$ ja $G(x,y,u,v) = uv - y$. Tarkistetaan, että tarkasteltava piste on yhtälöryhmän ratkaisu: $F(5,2,1,2) = 1^2 + 2^2 - 5 = 0$ ja $G(5,2,1,2) = 1 \cdot 2 - 2 = 0$.

Lasketaan Jacobin determinantti:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{bmatrix}\right) = 2u^2 - 2v^2.$$

Pisteessä $P_0 = (5,2,1,2)$ siten

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P_0) = 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2^2 = -6 \neq 0,$$

joten implisiittifunktiolauseen mukaan yhtälöryhmän ratkaisu voidaan esittää muodossa $(x, y, u(x,y), v(x,y))$ pisteen P_0 lähellä.

Lasketaan vielä derivaatat $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial x}$ pisteessä P_0. Derivoidaan yhtälöä

$$\begin{aligned} x &= (u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 \\ y &= u(x,y)v(x,y) \end{aligned}$$

puolittain x:n suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} 1 &= 2u(x,y)\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2v(x,y)\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ 0 &= \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)v(x,y) + u(x,y)\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Tästä saadaan matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ja sijoittamalla piste $(x,y,u,v) = (5,2,1,2)$ saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(5,2) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(5,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ja siten

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(5,2) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(5,2) \end{bmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

2.9 Taylorin kehitelmä funktiolle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

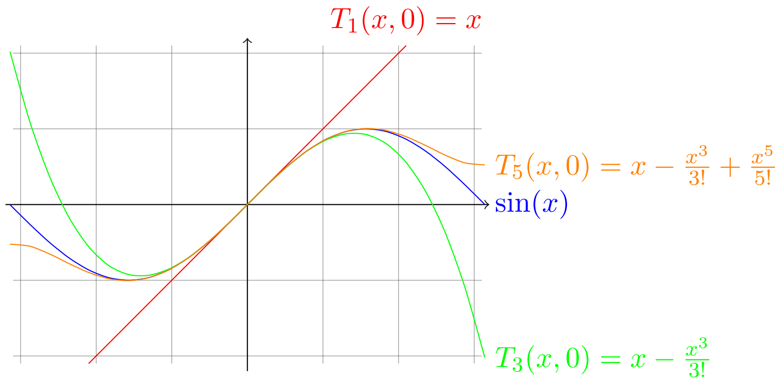
Yhden muuttujan Taylorin kehitelmä

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Taylorin kehitelmä pisteessä $a \in \mathbb{R}$ on sarja

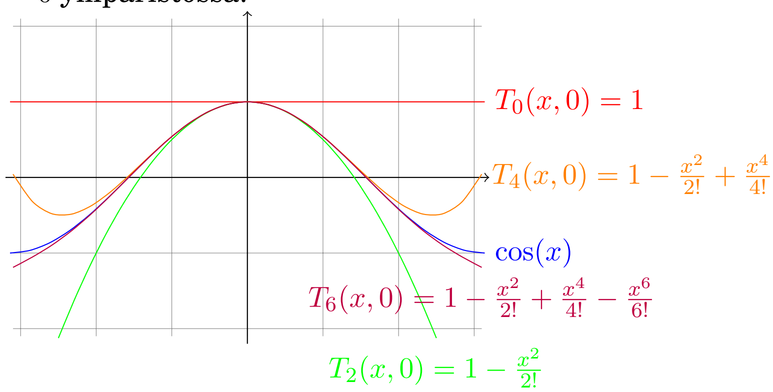
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)h^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k,$$

missä $a \in \mathbb{R}$ on kehityskeskus ja $h \in \mathbb{R}$ poikkeama kehityskeskuksesta. (Yleensä h on pieni)

Esim. 70. Funktio $\sin(x)$ ja sen ensimmäiset Taylorin polynomit pisteen $x = 0$ ympäristössä:



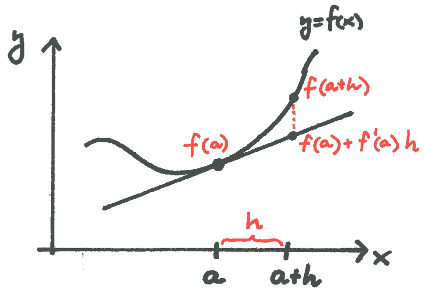
Esim. 71. Funktio $\cos(x)$ ja sen ensimmäiset Taylorin polynomit pisteen $x = 0$ ympäristössä:



- Funktion 1. asteen kehitelmä on funktion approksimaatio

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

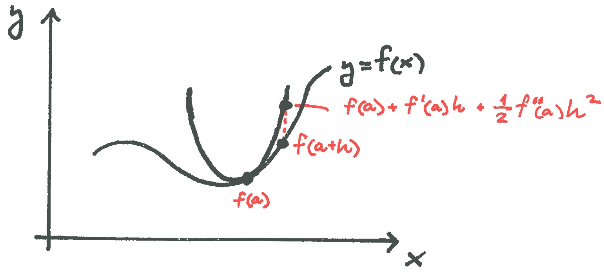
  1. asteen kehitelmä siis approksimoi funktion arvoja kun h on pieni korvaamalla funktion kuvaajan sen tangentilla.



- Funktion 2. asteen kehitelmä on approksimaatio

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2,$$

missä funktion kuvaaja korvataan paraabelilla. Tämä approksimaatio on pienillä h:n arvoilla tarkempi kuin 1. asteen approksimaatio.



- Yleisesti n. asteen kehitelmä on approksimaatio

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k,$$

jossa funktiota approksimoidaan n. asteen polynomilla.

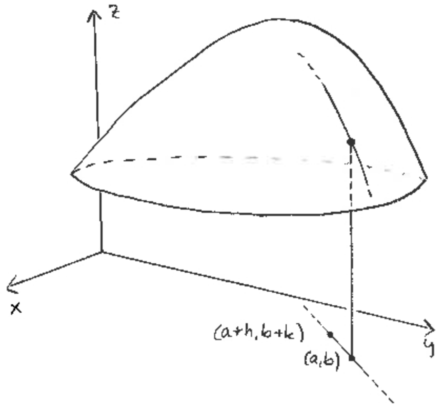
Esim. 72. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f'(a) = 0$. Tällöin funktion 2. asteen Taylorin kehitelmä on

$$f(a+h) \approx f(a) + \frac{1}{2}f''(a)h^2.$$

Tällöin kehitelmän antama polynomi on paraabeli, jonka huippu on pisteessä $(a, f(a))$. Riippuen $f''(a)$:n merkistä paraabeli aukeaa joko ylös- tai alaspäin. (Jos $f''(a) > 0$, niin a on lokaali minimi ja paraabeli aukeaa ylöspäin, jos $f''(a) < 0$, niin a on lokaali maksimi ja paraabeli aukeaa alaspäin.)

Kahden muuttujan Taylorin kehitelmä

Olkoon nyt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Tavoitteena on nyt approksimoida funktion arvoja $f(a+h, b+k)$ käyttämällä funktion f osittaisderivaattoja, kun h ja k ovat pieniä. Piste $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on nyt siis kehityskeskus ja $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ poikkeama.



Määritellään uusi funktio $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$G(t) = f(a + th, b + tk), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tarkastelemme tämän yhden muuttujan funktion G avulla funktion f arvoja suoralla, joka kulkee pisteiden (a, b) (tässä pisteessä $t = 0$) ja $(a + h, b + k)$ (tällöin $t = 1$) kautta.

Taylorin kehitelmä funktiolle G on

$$G(t) = G(0) + G'(0)t + \frac{G''(0)}{2}t^2 + \frac{G^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \dots,$$

joten

$$G(1) = f(a + h, b + k) = G(0) + G'(0) + \frac{G''(0)}{2} + \frac{G^{(3)}(0)}{3!} + \dots.$$

Saimme siis:

- Funktion f 0. asteen Taylorin kehitelmä on

$$F(a + h, b + k) \approx G(0) = f(a, b),$$

kun h ja k ovat pieniä. Tämä vastaa funktion approksimoimista vakiolla.

- Koska

$$G'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a + th, b + tk) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + th, b + tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + th, b + tk)k$$

saadaan funktion f 1. asteen Taylorin kehitelmä

$$f(a + h, b + k) \approx G(0) + G'(0) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k,$$

kun h ja k ovat pieniä. Tämä vastaa funktio approksimoimista tangenttitasolla.

- Koska

  $$G''(t) =$$
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk)h^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th, b+tk)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk)k^2,$$

  saadaan funktion f 2. asteen Taylorin kehitelmä

  $$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &\approx G(0) + G'(0) + \frac{1}{2}G''(0) \\ &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right), \end{aligned}$$

  kun h ja k ovat pieniä.

- Laskemalla yksi derivaatta lisää, saataisiin

  $$G'''(0) = f_{xxx}(a,b)h^3 + 3f_{xxy}(a,b)h^2k + 3f_{xyy}(a,b)hk^2 + f_{yyy}(a,b)k^3,$$

  ja edelleen

  $$G^{(n)}(0) = f_{x\ldots x}(a,b)h^n+nf_{x\ldots xy}(a,b)h^{n-1}k+\ldots+nf_{xy\ldots y}(a,b)hk^{n-1}+f_{y\ldots y}(a,b)k^n.$$

  Derivaattojen kertoimet ovat binomikertoimia ja ne saadaan Pascalin kolmiosta:

  $$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \vdots & & & & & & & & \end{array}$$

- Taylorin kehitelmä kahden muuttujan funktiolle, jonka kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa, on siten

  $$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\ &+ \frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2) \\ &+ \frac{1}{3!}(f_{xxx}(a,b)h^3 + 3f_{xxy}(a,b)h^2k + 3f_{xyy}(a,b)hk^2 + f_{yyy}(a,b)k^3) \\ &+\frac{1}{4!}(f_{xxxx}(a,b)h^4+4f_{xxxy}(a,b)h^3k+6f_{xxyy}(a,b)h^2k^2+4f_{xyyy}(a,b)hk^3+f_{yyyy}(a,b)k^4)+\ldots, \end{aligned}$$

  joka on summakaavana sama kuin

  $$f(a+h, b+k) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\frac{1}{(m-n)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-n} f(a,b)h^n k^{m-n}.$$

Parhaiten funktiota $f(x,y)$ tarkastelupisteen (a,b) ympäristössä approksimoiva astetta k oleva polynomi on siis Taylorin polynomi

$$P_k(x,y) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\frac{1}{(m-n)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-n} f(a,b)(x-a)^n(y-b)^{m-n}.$$

Derivoimalla voidaan helposti varmistaa, että funktiolla $f(x,y)$ ja sen näin määritellyllä Taylorin polynomilla $P_k(x,y)$ on kaikilla korkeintaan astetta k olevilla derivaatoilla tarkastelupisteessä samat arvot. Taylorin polynomi myös määräytyy yksikäsitteisesti tästä vaatimuksesta, aivan kuten yhden muuttujan tapauksessa.

Tarkastelemalla vastaavasti jäännöstermiä yhden muuttujan funktion $G(t)$ kehitelmässä voidaan todeta, että

$$f(x,y) = P_k(x,y) + R_k(x,y),$$

missä jäännöstermi

$$R_k(x,y) = \frac{1}{(k+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x(\theta), y(\theta)),$$

jollakin $\theta \in (0,1)$, kun $h = x-a$, $k = y-b$, $x(\theta) = a + h\theta$ ja $y(\theta) = b + k\theta$. (Tämä jäännöstermin lauseke siis saadaan johdettua vastaavasta yhden muuttujan kehitelmän jäännöstermistä, yksityiskohtiin perehtyminen jätetään oman harrastuneisuuden varaan.)

Esim. 73. Lasketaan funktion $f(x,y) = e^{x-2y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, toisen asteen Taylorin kehitelmä kehityskeskuksena origo.

Etsitään siis muotoa

$$e^{x-2y} \approx A + Bx + Cy + \frac{1}{2}\left(Dx^2 + 2Exy + Fy^2\right),$$

joka approksimoi funktiota parhalla mahdollisella tavalla pienillä x ja y.

Tapa 1. Tiedetään, että eksponenttifunktion Taylorin kehitelmä on

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots.$$

Kun (x,y) on lähellä origoa, niin tällöin $x-2y$ on pieni, joten

$$f(x,y) = e^{x-2y} \approx 1 + (x-2y) + \frac{1}{2}(x-2y)^2 = 1 + x - 2y + \frac{1}{2}(x^2 - 4xy + 4y^2),$$

joka on kysytty toisen asteen Taylorin kehitelmä.

Tapa 2. Lasketaan funktion derivaatat:

$$\begin{aligned}
A &= f(0,0) = 1 \\
B &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f(0,0) = 1 \\
C &= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2f(0,0) = -2 \\
D &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = f(0,0) = 1 \\
E &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -2f(0,0) = -2 \\
F &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 4f(0,0) = 4,
\end{aligned}$$

joten

$$e^{x-2y} \approx 1 + x - 2y + \frac{1}{2}(x^2 - 4xy + 4y^2),$$

kun (x, y) on lähellä origoa.

Esim. 74. Miten funktio $f(x, y) = \sin(x + y)\sin(x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, käyttäytyy origon lähellä?

Tiedetään, että

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots,$$

joten $\sin(t) \approx t$, kun $t \in \mathbb{R}$ on pieni.

Origon lähellä $x - y$ ja $x + y$ ovat pieniä, joten

$$f(x, y) \approx (x + y)(x - y) = x^2 - y^2,$$

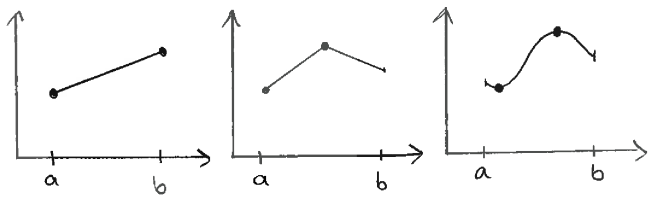
joka on satulapinta. Origon lähellä funktion määräämä pinta siis muistuttaa satulapintaa.

3. Osittaisderivaattojen sovelluksia

3.1 Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ääriarvot

Olkoon f funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Tällöin f:n ääriarvokohdat kuuluvat joukkoon

$$\{x \in [a, b] \mid f'(x) = 0 \text{ tai } f'(x) \text{ ei ole olemassa, tai } x = a \text{ tai } x = b\}.$$



Käsitteitä: Olkoon f funktio $D \to \mathbb{R}$, kun $D \subset \mathbb{R}^2$. Jos $P \in D$, niin

- P on <u>lokaali minimi</u>, jos $f(P) \leq f(x, y)$, kun (x, y) on P:n lähellä.
- P on <u>lokaali maksimi</u>, jos $f(P) \geq f(x, y)$, kun (x, y) on P:n lähellä.
- P on <u>ääriarvokohta</u>, jos se on lokaali minimi tai lokaali maksimi. Tällöin $f(P)$ on <u>ääriarvo</u>.
- P on <u>globaali minimi</u>, jos $f(P) \leq f(x, y)$ kaikilla $(x, y) \in D$.
- P on <u>globaali maksimi</u>, jos $f(P) \geq f(x, y)$ kaikilla $(x, y) \in D$.

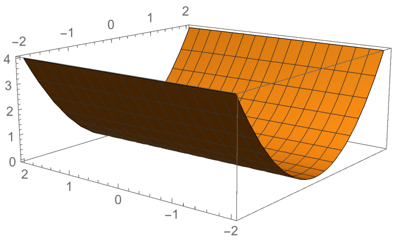
Esim. 75. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x^2 + y^2$, kun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Piste $(0, 0)$ on globaali minimi, sillä

$$f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y), \qquad \text{kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esim. 76. Vastaavasti funktiolle $f(x, y) = -x^2 - y^2$ origo on globaali maksimi.

Esim. 77. Funktiolle $f(x, y) = x^2$, kun $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, kaikki pisteet $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, ovat globaaleja minimejä, sillä

$$f(0, y) = 0 \leq x^2 = f(x, y), \qquad \text{kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

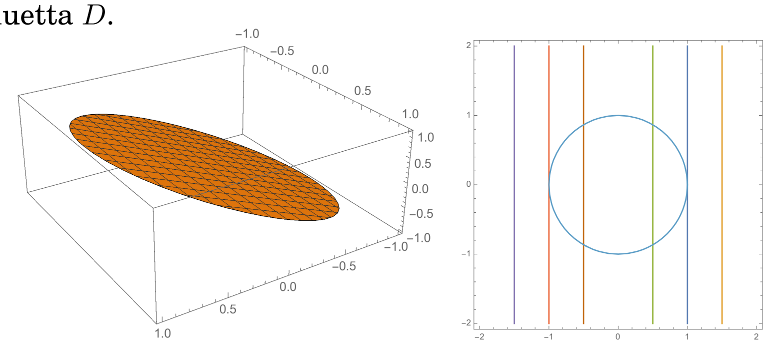


Esim. 78. Funktiolla $f(x, y) = x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ei ole ääriarvokohtia.

Esim. 79. Funktiolle $f(x, y) = x$, kun $f : D \to \mathbb{R}$, missä

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

piste $(1, 0)$ on globaali maksimi ja piste $(-1, 0)$ on globaali minimi. Ääriarvokohdat ovat siis pisteitä, joissa funktion tasa-arvokäyrät sivuavat aluetta D.



Lause 9. *Olkoon f funktio $f : D \to \mathbb{R}$ ja $D \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin f:n ääriarvokohdat kuuluvat joukkoon*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \nabla f(x, y) = 0 \textit{ tai } \nabla f(x, y) \textit{ ei ole olemassa tai } (x, y) \textit{ on } D\textit{:n reunapiste.}\}$$

Perustelu: Oletetaan, että $D = \mathbb{R}^2$ ja että $\nabla f(x, y)$ on aina olemassa. Ääriarvokohta P on joko lokaali minimi tai lokaali maksimi.

P on lokaali minimi jos ja vain jos $f(P) \leq f(x, y)$ pisteen P lähellä. Jos $\nabla f(P) \neq 0$, niin f vähenee vektorin $-\nabla f(P)$ suuntaan, joten P ei voi olla lokaali minimi. Siispä lokaalissa minimissä $\nabla f(P) = 0$.

Samoin, koska funktio kasvaa suuntaan ∇f liikuttaessa, täytyy myös lokaalissa maksimissa P olla $\nabla f(P) = 0$.

Esim. 80. Aiemmin todettiin, että funktiolla $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on globaali minimi pisteessä $(0, 0)$. Onko funktiolla muita ääriarvoja?

Koska D on koko avaruus $\mathbb{R}^2$ ja funktiolla on olemassa gradientti kaikissa tason pisteissä, kuuluvat ääriarvokohdat joukkoon

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla f(x,y) = 0\} = \{(0,0)\},$$

eli origo on ainoa ääriarvokohta.

Esim. 81. Etsitään funktio $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ääriarvokohdat.

Ääriarvokohdat kuuluvat jälleen joukkoon

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} = 0\} = \{(0,0)\}.$$

Origo on siis ainoa mahdollinen ääriarvokohta.

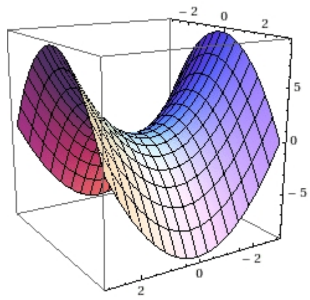
Kuitenkin huomataan, että

$$f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0), \qquad \text{kaikilla } x \neq 0$$

ja

$$f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0), \qquad \text{kaikilla } y \neq 0,$$

joten origo ei ole ääriarvokohta. (Funktio kasvaa kun liikutaan x -akselin suuntaan ja pienenee y -akselin suuntaan liikuttaessa.) Funktiolla f ei siis ole ääriarvokohtia. (Kyseessä on satulapinta.)



Huom. Kaikilla funktiolla ei siis ole ääriarvokohtia. Millä ehdoilla funktiolla on ääriarvokohta?

Seuraava lause vastaa yo. kysymykseen yhden muuttujan tapauksessa.

Lause 10. *Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, niin sillä on globaali minimi ja globaali maksimi välillä $[a,b]$.*

Seuraava lause on vastaava tulos kahden muuttujan funktiolle.

Lause 11. *Olkoon funktio $f : D \to \mathbb{R}$, kun $D \subset \mathbb{R}^2$, jatkuva funktio. Jos lisäksi D on rajoitettu ja D:n reuna kuuluu joukkoon D, niin funktiolla f on globaali minimi ja globaali maksimi D:ssä.*

Huom. Joukko D on rajoitettu, jos sen voi peittää jollakin kiekolla, jonka keskipiste on origo ja säde $R < \infty$.

Esim. 82. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 2\}$ ja olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ funktio $f(x, y) = xy$.

Tällöin f on jatkuva, D on rajoitettu ja D:n reuna $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 2\} \subset D$. Siten f:llä on globaali minimi ja maksimi joukossa D.

Lisäksi tiedetään, että f:n ääriarvokohdat kuuluvat joukkoon

$$\{(x, y) \in D \,|\, \nabla f(x, y) = 0 \text{ tai } x^2 + y^2 = 2\}.$$

Nyt $\nabla f(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = 0$ jos ja vain jos $(x, y) = (0, 0)$. Origo ei ole kuitenkaan ääriarvokohta, sillä selvästi

$$f(x, x) = x^2 > 0 = f(0, 0), \qquad \text{kaikilla } x \neq 0,$$

eli funktio kasvaa origosta suuntaan $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ liikuttaessa, ja

$$f(x, -x) = -x^2 < 0 = f(0, 0), \qquad \text{kaikilla } x \neq 0$$

eli funktio vähenee origosta suuntaan $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ liikuttaessa. Siten kaikki funktion ääriarvot ovat alueen D reunalla.

Tarkistetaan seuraavaksi reunapisteet. Reuna voidaan parametrisoida käyrällä

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\cos(t)\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{j}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Funktion arvot reunalla ovat siten

$$f(\mathbf{r}(t)) = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

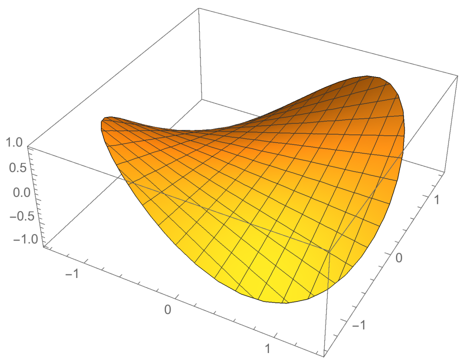
Funktio saavuttaa maksimin kun $\sin(2t) = 1$ eli $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \{0, 1\}$, ja funktio saavuttaa minimin kun $\sin(2t) = -1$ eli $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$, $n \in \{0, 1\}$.

Funktiolla on siis globaali maksimi pisteissä

$$\left(\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})\right) = (1, 1) \quad \text{ja} \quad \left(\sqrt{2}\cos(\frac{5\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{4})\right) = (-1, -1)$$

ja globaali minimi pisteissä

$$\left(\sqrt{2}\cos(\frac{7\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\frac{7\pi}{4})\right) = (1, -1) \quad \text{ja} \quad \left(\sqrt{2}\cos(\frac{3\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4})\right) = (-1, 1).$$



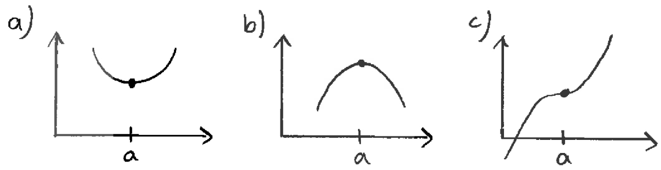
Kriittisten pisteiden luokittelu

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f'(a) = 0$. Tällöin

a) Jos $f''(a) > 0$, niin a on minimi.

b) Jos $f''(a) < 0$, niin a on maksimi.

c) Jos $f''(a) = 0$, niin a voi olla minimi, maksimi tai ei kumpikaan.



Miten tämä yleistyy kahden muuttujan funktioille?

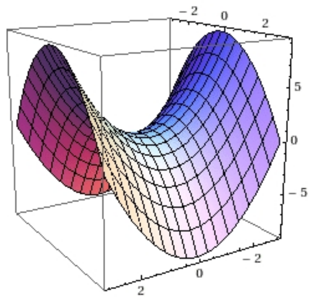
Määritelmä 10. *Olkoon f funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Piste $P \in \mathbb{R}^2$ on kriittinen piste, jos $\nabla f(P) = 0$.*

Lisäksi, piste P on satulapiste, jos

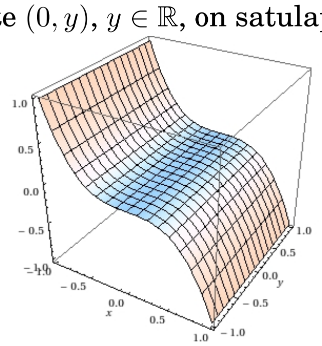
i) P on kriittinen piste ja

ii) P ei ole minimi eikä maksimi (eli P ei ole ääriarvokohta).

Esim. 83. $f(x, y) = x^2 - y^2$, jolloin $(0, 0)$ on kriittinen piste sillä $\nabla f(0, 0) = 0$, mutta se ei ole ääriarvokohta. Siispä $(0, 0)$ on satulapiste.



Esim. 84. $f(x, y) = -x^3$, jolloin $\nabla f(x, y) = -3x^2\mathbf{i} = 0$ jos ja vain jos $x = 0$ ja $y \in \mathbb{R}$. Funktion kriittisiä pisteitä ovat siten kaikki y -akselin pisteet. Piste $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, ei kuitenkaan ole minimi eikä maksimi, eli jokainen piste $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, on satulapiste.



Huom. P on kriittinen piste jos ja vain jos P on minimi, maksimi tai satulapiste. Miten nämä vaihtoehdot erotetaan toisistaan?

Milloin P on minimi?

Tarkastellaan funktion Taylorin kehitelmää kriittisen pisteen $P = (a,b)$ lähellä:

$$\begin{aligned} &f(a+h,b+k) \\ &\approx f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2\right) \\ &= f(a,b)+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2\right). \end{aligned}$$

Tämän 2. asteen Taylorin kehitelmän viimeiset termit voidaan kirjoittaa matriisikertolaskun avulla määrittelemällä funktion Hessen matriisi pisteessä P

$$\mathrm{Hess}f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$f(a+h,b+k) \approx f(a,b)+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \mathrm{Hess}f(P) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}.$$

Piste P on nyt siis minimi jos ja vain jos $f(a,b) \le f(a+h,b+k)$ kaikilla tarpeeksi pienillä h ja k. Käyttämällä tähän ehtoon yo. Taylorin kehitelmää, saadaan

$$P \text{ on minimi} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \mathrm{Hess}f(P) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix},$$

kaikilla tarpeeksi pienillä h ja k.

Huom. Lineaarialgebraa: Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on

- Positiividefiniitti, jos $x^T Ax > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. ($\Leftrightarrow$ matriisin ominaisarvot ovat positiivisia)
- Negatiividefiniitti, jos $x^T Ax < 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. ($\Leftrightarrow$ matriisin ominaisarvot ovat negatiivisia)
- Indefiniitti, jos matriisilla on sekä negatiivisia, että positiivisia ominaisarvoja, ja nolla ei ole ominaisarvo.

Lause 12. *Jos P on kriittinen piste, niin*

- *P on minimi, jos Hess$f(P)$ on positiividefiniitti.*
- *P on maksimi, jos Hess$f(P)$ on negatiividefiniitti.*
- *P on satulapiste, jos Hess$f(P)$ on indefiniitti.*

Huom. Hessen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia, sillä matriisi on symmetrinen.

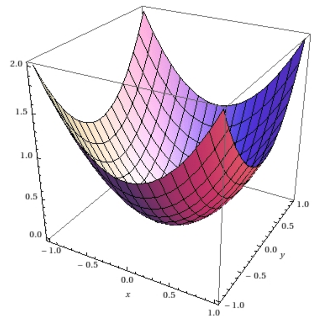
Huom. Testit soveltuvat myös funktioille $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, jolloin

$$\mathrm{Hess} f(P) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}.$$

Esim. 85. $f(x, y) = x^2 + y^2$, jolloin $P = (0, 0)$ on ainoa kriittinen piste ja

$$\mathrm{Hess} f(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

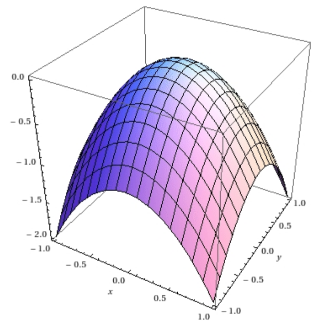
Nähdään suoraan, että Hessen matriisilla on ainoastaan ominaisarvo 2, joten P on minimi.



Esim. 86. Vastaavasti, jos $f(x, y) = -x^2 - y^2$, niin kriittinen piste $(0, 0)$ on maksimi, sillä Hessen matriisin

$$\mathrm{Hess} f(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

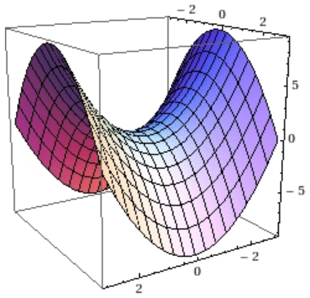
ainoa ominaisarvo -2 on negatiivinen.



Esim. 87. Jos $f(x, y) = x^2 - y^2$, niin $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} = 0$ jos ja vain jos $(x, y) = (0, 0)$. Ainoa kriittinen piste on siis origo, ja

$$\mathrm{Hess} f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

jonka ominaisarvot ovat 2 ja -2. Origo on siis satulapiste.



Huom. Jos 0 on Hessen matriisin ominaisarvo, niin kriittisen pisteen luonne ei selviä. Jos taas 0 ei ole ominaisarvo, niin kriittisen pisteen luonne aina selviää.

Esim. 88. Jos $f(x,y) = x^4 + y^4$, niin ainoa kriittinen piste on origo ja

$$\mathrm{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sama pätee myös esimerkiksi funktioille $f(x,y) = x^4 - y^4$ tai $f(x,y) = x^3 + y^5$. Tällöin kriittisen pisteen luonne ei selviä Hessen matriisista ja se pitää selvittää muuten.

Jos $f(x,y) = x^4 + y^4$, niin origo on minimi, sillä $f(0,0) = 0 < x^4 + y^4 = f(x,y)$ kaikilla $(x,y) \neq (0,0)$. Jos $f(x,y) = x^3 + y^5$, niin origo on satulapiste, sillä $f(x,x) = x^3 + x^5 < 0$, kun $x < 0$, ja $f(x,x) > 0$, kun $x > 0$.

Esim. 89. Etsi ja luokittele funktion $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ kriittiset pisteet.

Etsitään ensin kriittiset pisteet:

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y)\mathbf{i} + (6y - 6x)\mathbf{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y \text{ ja } x = y,$$

joten ainoat kriittiset pisteet ovat $(0,0)$ ja $(1,1)$.

Funktion Hessen matriisi on

$$\mathrm{Hess} f(x,y) \begin{bmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Pisteessä $(0,0)$ saadaan

$$\mathrm{Hess} f(0,0) \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix},$$

jonka ominaisarvot lasketaan determinantista

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(6-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 6\lambda - 36 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 3(1 \pm \sqrt{5}).$$

Hessen matriisin ominaisarvot ovat siis $\lambda_1 = 3(1+\sqrt{5}) > 0$ ja $\lambda_2 = 3(1-\sqrt{5}) < 0$. Piste $(0,0)$ on siis satulapiste.

Pisteessä $(1,1)$ saadaan

$$\mathrm{Hess} f(0,0) \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix},$$

jonka ominaisarvot lasketaan determinantista

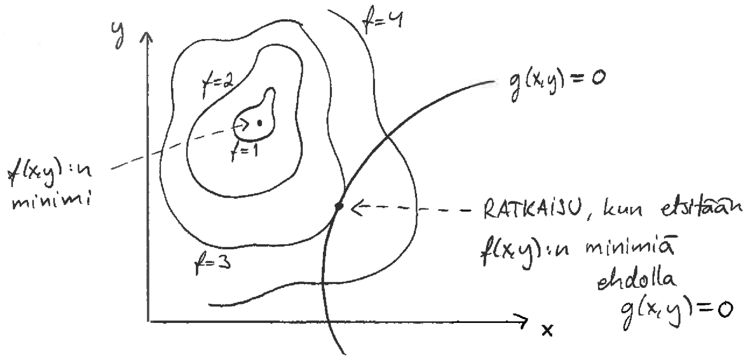
$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & -6 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)(6-\lambda)-36 = \lambda^2-18\lambda+36 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 3(3\pm\sqrt{5}).$$

Hessen matriisin ominaisarvot ovat siis molemmat positiivisia ja piste $(1,1)$ on minimi.

3.2 Lagrangen kerroin

Miten löydetään funktion $f(x,y)$ minimi, kun muuttujille x ja y on asetettu ehto $g(x,y) = 0$? Tutkimme siis funktion f arvoja funktion g tasa-arvokäyrällä $g(x,y) = 0$.

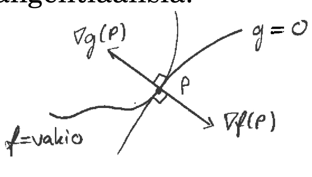
Esim. 90. Minkä muotoinen on tölkki, jonka tilavuus on 1 ja pinta-ala mahdollisimman pieni?



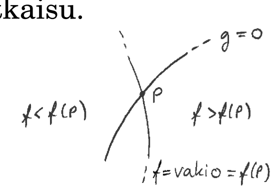
Tehdään seuraavat oletukset:

- $P \in \mathbb{R}^2$ on minimointitehtävät ratkaisu.
- $\nabla g(P) \neq 0$ (Tällöin implisiittifunktiolause sanoo, että $g = 0$ määrää käyrän pisteen P ympäristössä)
- $\nabla f(x,y) \neq 0$ (Tämä on menetelmän johtamista helpottava lisäoletus, mutta ei välttämätön)

Tällöin pisteessä P funktion f tasa-arvokäyrä ja käyrä $g(x,y) = 0$ ovat tangentiaalisia.



Syy: Jos näin ei ole, käyrät leikkaavat jossain kulmassa ja tällöin käyrällä $g(x,y) = 0$ voidaan liikkua tasa-arvokäyrältä $f(x,y) = f(P)$ pois sinne suuntaan mihin f vähenee. Tällöin P ei olisikaan minimointitehtävän ratkaisu.



Huom. Aiemmin saatiin, että ∇f on kohtisuorassa f:n tasa-arvokäyrää vastaan, josta seuraa

$$\nabla f(P) \parallel \nabla g(P) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(P) = \lambda \nabla g(P).$$

Siispä tehtävän ratkaisun P täytyy toteuttaa:

$$\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda \nabla g(P), & \text{jollain } \lambda \in \mathbb{R}, \\ g(P) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Huom. Tässä yhtälössä on kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta a, b ja λ (kun $P = (a, b)$).

Huom. Lagrangen menetelmä olettaa, että tehtävällä on ratkaisu. Siten menetelmä sopii parhaiten tehtäville, joista jo tiedetään, että ratkaisu on olemassa.

Huom. (λ, P) on yhtälöryhmän (3.1) ratkaisu jos ja vain jos (λ, P) on kriittinen piste funktiolle $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

sillä

$$\nabla L = (\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x})\mathbf{i} + (\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y})\mathbf{j} - g\mathbf{k}.$$

Kerroin λ on nimeltään Lagrangen kerroin ja funktio L on Lagrangen funktio.

Esim. 91. Tarkastellaan tölkkiä, jonka säde on $r > 0$ ja korkeus $h > 0$. Tölkin pinta-ala on

$$A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + rh)$$

ja tilavuus on

$$V(r, h) = \pi r^2 h.$$

Minimoidaan pinta-ala, kun tilavuus $V = 1$.

Minimoidaan siis funktiota $A(r, h)$ ehdolla $g(r, h) = V(r, h) - 1 = 0$. Tehtävän Lagrangen funktio on

$$L(r, h) = A(r, h) - \lambda g(r, h),$$

ja sen kriittiset pisteet toteuttavat

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial r}(r, h) = \lambda \frac{\partial g}{\partial r}(r, h) \\ \frac{\partial A}{\partial h}(r, h) = \lambda \frac{\partial g}{\partial h}(r, h) \\ g(r, h) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4\pi r + 2\pi h = \lambda 2\pi rh \\ 2\pi r = \lambda \pi r^2 \\ \pi r^2 h = 1, \end{cases}$$

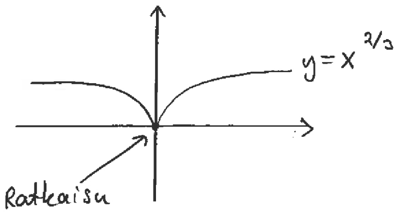
josta saadaan

$$\begin{cases} 2r+h=\lambda rh & \Rightarrow 2r+h=\frac{2}{r}rh=2h \quad \Rightarrow h=2r \\ 2r=\lambda r^2 \quad \Rightarrow \lambda=\frac{2}{r} & \\ \pi r^2 h=1 & \Rightarrow \pi r^2 2r=1 \Rightarrow r^3=\frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

Saatiin siis tölkin optimaaliset mitat

$$\begin{cases} r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \\ h=\frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}. \end{cases}$$

Esim. 92. Minimoidaan $f(x,y)=y$ ehdolla $g(x,y)=y^3-x^2=0$. Ehto $g=0$ pätee siis kun $y^3=x^2$, eli käyrällä $y=x^{2/3}$.



Kuvasta nähdään, että käyrällä $g=0$ pienin arvo funktiolle $f(x,y)=y$ saavutetaan pisteessä $(0,0)$. Siinä $f(0,0)=0$.

Yritetään ratkaista tehtävä Lagrangen kertoimen avulla: Lagrangen funktio on

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=y-\lambda(y^3-x^2).$$

Tämän kriittiset pisteet saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0 & \Leftrightarrow & \lambda 2x=0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0 & \Leftrightarrow & 1-\lambda 3y^2=0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 & \Leftrightarrow & y^3=x^2. \end{cases}$$

Jos $x\neq 0$, niin ensimmäisestä yhtälöstä seuraa $\lambda=0$, jolloin toinen yhtälö antaa $1=0$, joka on ristiriita. Jos taas $x=0$, seuraa viimeisestä yhtälöstä $y=0$, jolloin toinen yhtälö jälleen antaa $1=0$, joka on myös ristiriita. Siten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Tehtävä ei siis ratkea Lagrangen menetelmällä. Syy tähän on se, että pisteessä $(0,0)$ pätee $\nabla g(0,0)=0$.

Lagrangen kerrointen menetelmä yleisesti

Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ääriarvot rajoitusehdoilla

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ &\vdots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

löytyvät pisteistä, joissa

$$\nabla L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = 0,$$

kun Lagrangen funktio on

$$\begin{aligned} &L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \\ &\qquad = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) - \ldots - \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Tässä $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ovat Lagrangen kertoimet.

Esim. 93. Lasketaan funktion $f(x, y, z) = x + y^2 z$ ääriarvot ehdoilla $y^2 + z^2 = 2$ ja $z = x$.

Nyt $g(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2 = 0$ ja $h(x, y, z) = x - z = 0$ ovat rajoitusehdot ja

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z) = x + y^2 z - \lambda(y^2 + z^2 - 2) - \mu(x - z)$$

on tehtävän Lagrangen funktio.

Ääriarvokohdissa pätee siten

$$\nabla L(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h, \\ g = 0, \\ h = 0, \end{cases}$$

josta saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 - \mu = 0, \qquad \Rightarrow \mu = 1 \\ 2yz - 2\lambda y = 0, \qquad \Rightarrow y(z - \lambda) = 0 \qquad \Rightarrow y = 0 \text{ tai } z = \lambda, \\ y^2 - 2\lambda z + \mu = 0, \\ y^2 + z^2 - 2 = 0, \\ x - z = 0, \qquad \Rightarrow x = z. \end{cases}$$

Jos $y = 0$, niin $y^2 - z^2 - 2 = -z^2 - 2 = 0$, jolloin $z = \pm\sqrt{2}$. Kriittiset pisteet ovat tällöin $(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$.

Jos $z = \lambda$, niin $y^2 - 2\lambda z + \mu = y^2 - 2z^2 + 1 = 0 = y^2 + z^2 - 2$. Tästä seuraa $z^2 = 1$, joten $z = \pm 1$. Kriittiset pisteet ovat tällöin $(\pm 1, 1, \pm 1)$ ja $(\pm 1, -1, \pm 1)$.

Lasketaan funktion arvot kaikissa näissä kriittisissä pisteissä:

$$
\begin{aligned}
&f(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = \sqrt{2}, \\
&f(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \\
&f(1, \pm 1, 1) = 2, \quad \text{(maksimi)} \\
&f(-1, \pm 1, -1) = -2, \quad \text{(minimi)}.
\end{aligned}
$$

3.3 Pienimmän neliösumman menetelmä

Kysymys: Mikä on suureen c arvo, kun sitä mitattaessa on saatu mittaustulokset $c_1, c_2, \ldots, c_n$?

Maalaisjärki sanoo, että mittaustulosten keskiarvo olisi hyvä arvio c:lle,

$$
c \approx \bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i,
$$

mutta miksi?

PNS-menetelmä

Pienimmän NeliöSumman menetelmässä etsitään arvo c, jonka etäisyyksien neliöiden summa mittauspisteistä on pienin. Toisin sanoen, minimoidaan <u>kustannusfunktio</u>

$$
S(c) = (c - c_1)^2 + (c - c_2)^2 + \ldots + (c - c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (c - c_i)^2.
$$

Merkitään minimipistettä $\tilde{c}$. Minimi löytyy kustannusfunktion derivaatan nollakohdasta

$$
\frac{dS}{dc}(\tilde{c}) = 0.
$$

Toisaalta

$$
\frac{dS}{dc} = 2(c - c_1) + 2(c - c_2) + \ldots + 2(c - c_n) = 2 \sum_{i=1}^{n} (c - c_i),
$$

joten

$$
0 = \frac{dS}{dc}(\tilde{c}) = 2 \sum_{i=1}^{n} (\tilde{c} - c_i) = 2n\tilde{c} - 2 \sum_{i=1}^{n} c_i,
$$

josta ratkeaa

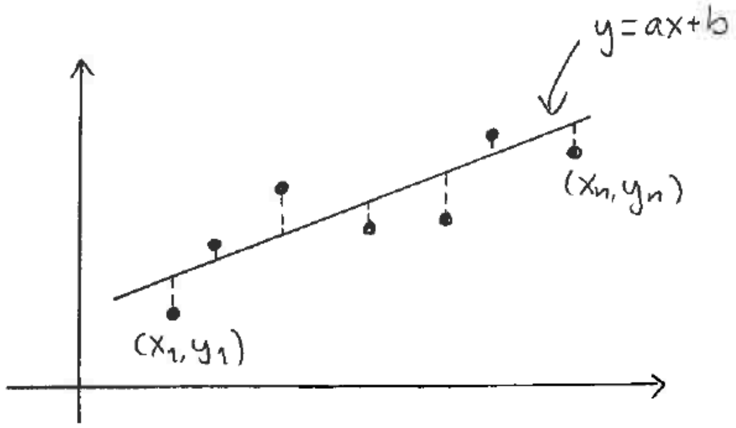
$$
\tilde{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i,
$$

eli minimipiste on mittaustulosten keskiarvo!

Lineaarinen regressio

Usein tiedetään ennakolta (tai arvellaan mittaustulosten perusteella), että tutkittava ilmiö noudattaa jotakin mallia. Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa suureet x ja y riippuvat lineaarisesti toisistaan, eli $y = ax + b$ jollakin $a \in \mathbb{R}$ ja $b \in \mathbb{R}$.

Olkoon mittaustuloksena saatu n arvoparia (x_i, y_i). Halutaan etsiä suora, joka parhaiten edustaa mitattuja arvoja.



Tässä tapauksessa pienimmän neliösumman menetelmä on minimoida pisteiden (x_i, y_i) vertikaalisen etäisyyden neliöt suorasta

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Minimipisteessä molemmat osittaisderivaatat ovat nollia:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - ax_i - b) \\ 0 = \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) \end{cases}$$

Yhtälöparista saadaan

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a & + & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b & = & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a & + & nb & = & \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases}$$

mistä voidaan ratkaista a ja b:

$$\begin{cases} a & = & \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \\ b & = & \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \end{cases}$$

(Yläviiva kuvaa kyseisen funktion keskiarvoa.) Yllä olevilla kertoimilla suora $y = ax + b$ on PNS-mielessä paras mahdollinen suora kuvaamaan ilmiötä. Sitä kutsutaan regressiosuoraksi.

Esim. 94. (Lämpölaajeneminen) Kappaleen pituuden muutosta tutkittaessa käytetään lineaarista lämpölaajenemiskerrointa α, jolle pätee

$$\Delta L = \alpha \Delta T L_0,$$

missä ΔL on pituuden muutos, ΔT lämpötilan muutos ja L_0 alkuperäinen pituus. Toisin sanoen,

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T.$$

Laboratoriomittauksessa saatiin seuraavat tulokset eräälle kappaleelle:

$\frac{\Delta L}{L_0}$	0.0	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$8.3 \cdot 10^{-5}$
$\Delta T (°C)$	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0

Sovitetaan tuloksiin suora PNS-menetelmällä. Merkitään $x = \Delta T$, $y = \frac{\Delta L}{L_0}$.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(0.0 + 5.0 + 10.0 + 15.0 + 20.0) = 10.0 \\
\overline{y} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{5}(0.0 + 1.8 + 3.4 + 6.8 + 8.3) \cdot 10^{-5} = 4.06 \cdot 10^{-5} \\
\overline{xy} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{1}{5}(0.0 \cdot 0.0 + 5.0 \cdot 1.8 + \ldots + 20.0 \cdot 8.3) \cdot 10^{-5} = 62.2 \cdot 10^{-5} \\
\overline{x^2} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{5}(0.0^2 + 5.0^2 + 10.0^2 + 15.0^2 + 20.0^2) = 150
\end{aligned}$$

Suoralle $y = ax + b$ saadaan

$$\begin{cases} a = \frac{62.2 \cdot 10^{-5} - 10.0 \cdot 4.06 \cdot 10^{-5}}{150 - 10.0^2} = 0.432 \cdot 10^{-5} \\ b = \frac{150 \cdot 4.06 \cdot 10^{-5} - 10.0 \cdot 62.2 \cdot 10^{-5}}{150 - 10.0^2} = -0.26 \end{cases}$$

Regressiosuora on siis

$$\frac{\Delta L}{L_0} \approx 0.43 \cdot 10^{-5} \Delta T - 0.26,$$

joten lämpölaajenemiskerroin $\alpha \approx 4.3 \cdot 10^{-6}$. Tarkasteltu materiaali voisi olla esimerkiksi posliinia ($\alpha = 2 \ldots 5 \cdot 10^{-6}$). Virhetarkastelua ei tässä yhteydessä tehty, joten tuloksen virhemarginaalia emme tiedä.

Muun käyrän PNS-sovitus

Suoran sovittaminen datapisteisiin on usein perusteltua, mutta toisinaan tiedetään tai oletetaan muuttujien välillä olevan erilainen riippuvuus. Tällöin muodostetaan sopiva kustannusfunktio etäisyyksien neliöiden summasta, ja etsitään sen minimiä.

Esim. 95. Jos halutaan etsiä mittauspisteisiin (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, PNS-mielessä parhaiten sopiva paraabeli $y = ax^2 + bx - c$, on kustannusfunktio

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2.$$

PNS-menetelmä funktioiden approksimoinnissa

PNS-menetelmää voidaan käyttää myös funktioiden approksimointiin. Tällöin tarkastellaan summan sijaan integraalia etäisyyden neliöstä. Voidaan etsiä esimerkiksi polynomia tai trigonometrista polynomia funktiota approksimoimaan.

Esim. 96. Mikä on paras suora $g(x) = px + q$ approksimoimaan jatkuvaa funktiota $f(x)$ välillä $[0, 1]$?

Summan sijaan minimoidaan etäisyyksien neliön integraalia, eli etsitään minimiä

$$\min_{p,q} I(p, q) = \min_{p,q} \int_0^1 (f(x) - (px - q))^2 \, dx.$$

Esim. 97. Kun PNS-menelmällä etsitään paras muotoa $\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$ oleva funktio approksimoimaan jatkuvaa funktiota $f(x)$ välillä $[0, \pi]$, eli minimoidaan integraali

$$I = \int_0^{\pi} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) \right)^2 dx,$$

saadaan ratkaisuksi

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(jx) dx$$

ja näin tullaan itse asiassa johtaneeksi funktion Fourierin sini-sarja.

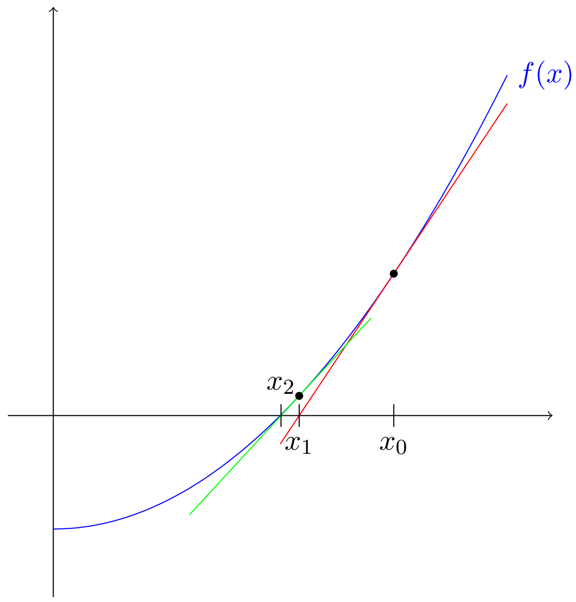
3.4 Newtonin menetelmä

Kysymys: Miten löydetään funktion juuri (eli nollakohta)?

Yhden muuttujan funktio

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, $x_0 \in \mathbb{R}$ alkuarvaus juureksi. Funktion f tangentti pisteessä x_0 on $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Tämä on arvio funktion f arvoille pisteen x_0 lähellä. Näin ollen tangentin nollakohta on arvio funktion nollakohdalle: Asetetaan

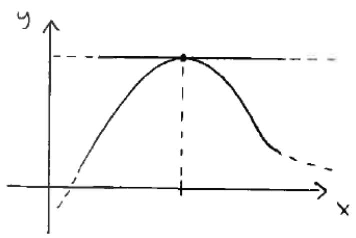
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



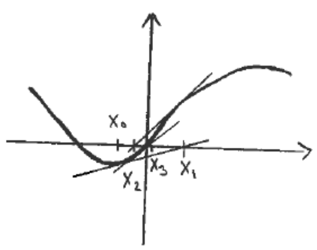
Tällöin siis $y(x_1) = 0$. Jatketaan ottaen x_1 uudeksi alkuarvaukseksi. Näin saadaan Newtonin menetelmä yhden muuttujan funktion juuren etsimiseksi:

$$\boxed{\begin{cases} x_0 & = \text{alkuarvaus} \\ x_{k+1} & = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}}$$

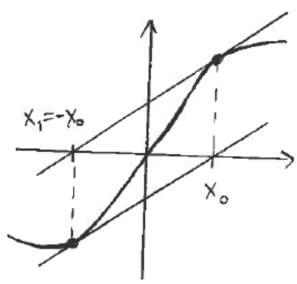
Huom. Menetelmä edellyttää, että $f'(x_k) \neq 0 \, \forall k$, sillä jos $f'(x_k) = 0$, niin tangenttisuoralla ei ole nollakohtaa!



Huom. Jos x_0 on tarpeeksi lähellä funktion juurta, niin menetelmä yleensä toimii.



Toimii, eri alkuarvauksilla löydetään eri juuret.



Ei toimi, jää kiertämään pisteitä x_0 ja $x_1 = -x_0$.

Newtonin menetelmä yhtälöryhmälle

Kysymys: Miten löydetään yhtälöryhmän

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}, \quad F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ratkaisu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$?

Ajatellaan implisiittisesti annettuja tasokäyriä $F(x,y) = 0$ ja $G(x,y) = 0$ kolmen muuttujan funktioiden $z = F(x,y)$ ja $z = G(x,y)$ ja xy-tason leikkauskäyrinä. Olkoon alkuarvaus yhtälöryhmän ratkaisulle $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Funktion $z = F(x,y)$ tangenttitaso pisteessä P_0 on

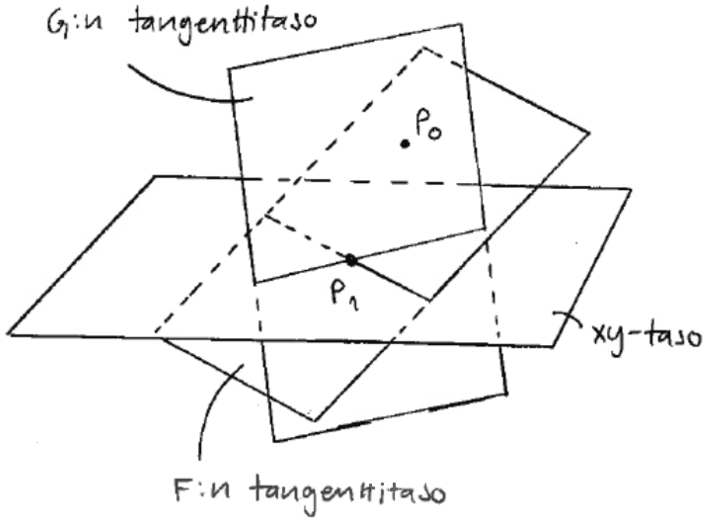
$$z_F(x,y) = F(P_0) + F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0)$$

ja funktion $z = G(x,y)$ tangenttitaso pisteessä P_0 on

$$z_G(x,y) = G(P_0) + G_x(P_0)(x - x_0) + G_y(P_0)(y - y_0).$$

Suora $z_F(x,y) = 0$ on arvio funktion $z = F(x,y)$ nollakohdille ja suora $z_G(x,y) = 0$ on arvio funktion $z = G(x,y)$ nollakohdille.

$\Rightarrow$ Suorien leikkauspiste on arvio funktioiden $z = F(x,y)$ ja $z = G(x,y)$ nollakohdalle eli alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisulle. Olkoon leikkauspiste $P_1 = (x_1, y_1)$.



Ratkaistaan sitten P_1:

$$\begin{cases} z_F(x_1, y_1) = 0 \\ z_G(x_1, y_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} F(P_0) + F_x(P_0)(x_1 - x_0) + F_y(P_0)(y_1 - x_0) = 0 \\ G(P_0) + G_x(P_0)(x_1 - x_0) + G_y(P_0)(y_1 - y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} F_x(P_0) & F_y(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F(P_0) \\ -G(P_0) \end{pmatrix}.$$

Mikäli

$$\det \begin{pmatrix} F_x(P_0) & F_y(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

eli $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \neq 0$, niin voidaan ratkaista

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_x(P_0) & F_y(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F(P_0) \\ G(P_0) \end{pmatrix}.$$

Olemme saaneet Newtonin menetelmän yhtälöryhmän juurien etsimiselle:

$$\boxed{\begin{cases} (x_0, y_0) & = \text{alkuarvaus} \\ \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_x(x_k, y_k) & F_y(x_k, y_k) \\ G_x(x_k, y_k) & G_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F(x_k, y_k) \\ G(x_k, y_k) \end{pmatrix} \end{cases},}$$

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Esim. 98. Etsitään yhtälöryhmän

$$\begin{cases} e^{x-2} = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

eräs ratkaisu.

Asetetaan

$$\begin{cases} F(x, y) = e^{x-2} - y \\ G(x, y) = y^2 - x \end{cases},$$

jolloin yhtälöryhmä saa muodon

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Nyt $F_x(x, y) = e^{x-2}$, $F_y(x, y) = -1$, $G_x(x, y) = -1$ ja $G_y(x, y) = 2y$. Otetaan alkuarvaukseksi $(x_0, y_0) = (1, 1)$, jolloin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{-1} & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-1} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{2-e} \\ \frac{1}{2-e} \end{pmatrix}.$$

Jatketaan iterointia (esim. Mathematicalla) ja saadaan

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \ldots \approx \begin{pmatrix} -1.9624 \\ 0.0087 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \ldots \approx \begin{pmatrix} 0.0009 \\ 0.0564 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \ldots \approx \begin{pmatrix} 0.0190 \\ 0.1379 \end{pmatrix}$$

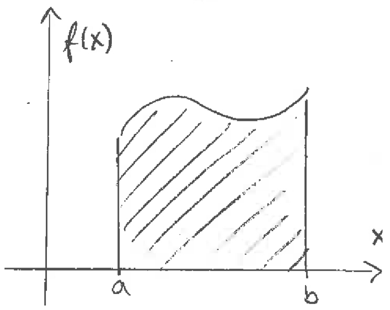
(Tämä on neljän desimaalin tarkkuudella oikein.)

4. Usean muuttujan funktioiden integrointi

4.1 Tasointegraalit

Kerrataan: Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a,b]$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{"Pinta-ala käyrän } y = f(x) \text{ ja x-akselin välissä."}$$



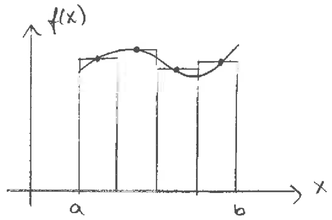
Integraali määriteltiin Riemannin summan raja-arvona seuraavasti.

1. Jaetaan integroitava väli $[a,b]$ tasavälisesti n osaan.

2. Arvoidaan käyrän rajaamaa pinta-alaa suorakulmioiden pinta-alojen summalla

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

missä x_i^* on i:nnen välin keskipiste ja Δx_i on i:nnen välin leveys.



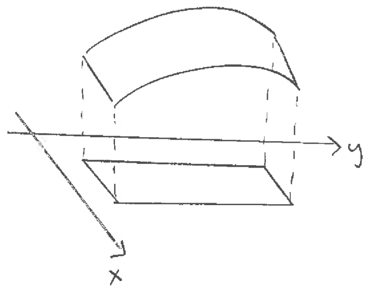
3. Annetaan välien lukumäärän $n \to \infty$. Tällöin jos f on riittävän hyvin

käyttäytyvä (esim. jatkuva), niin summa suppenee ja tällöin määritellään

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Tässä $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ on siis pinta-ala käyrän $y = f(x)$ ja x -akselin välin $[a, b]$ välillä. Samalla tavalla määritellään integraali myös funktioille joille ei päde $f(x) \geq 0$.

Kysymys: Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ funktio kun $D \subset \mathbb{R}^2$ ja $f(x, y) \geq 0$ kaikilla $(x, y) \in D$. Mikä on tilavuus f:n määräämän pinnan $z = f(x, y)$ ja (x, y) -tason alueen D välillä?



- Olkoon D suorakulmio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b]\, y \in [c, d]\} = [a, b] \times [c, d].$$

- Jaetaan D molemmat sivut tasavälisesti n osaan, jolloin D jakautuu n^2 pieneen suorakulmioon. Tällöin arvio tilavuudelle on

$$\sum_{i=1}^{n^2} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

  missä x_i^* on i:nnen suorakulmion keskipiste ja Δx_i on i:nnen suorakulmion pinta-ala.

- Annetaan nyt $n \to \infty$, jolloin jos f on riittävän hyvin käyttäytyvä, niin summa suppenee. Tällöin

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n^2} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

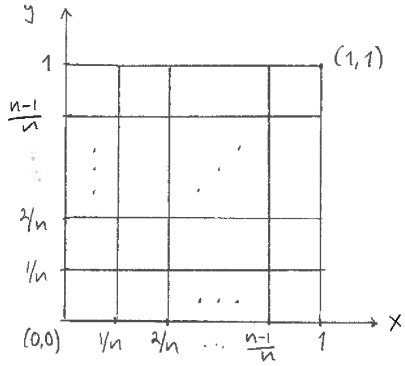
  Tässä $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}A$ on <u>f:n tasointegraali alueen D yli</u>.

- Merkitykseltään tasointegraali on siis tilavuus f:n ja D:n välillä.

- Kaava avulla määritellään tasointegraali myös silloin kun $f(x) \geq 0$ ei päde.

- Oletetaan jatkossa, että funktiot ovat riittävän hyvin käyttäytyviä, jotta niitä niitä voidaan integroida.

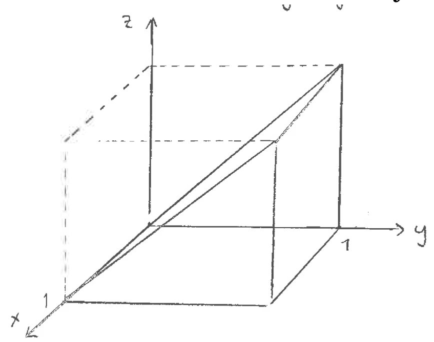
Esim. 99. Laskettava $\iint\limits_D y\mathrm{d}A$ kun $D = [0,1] \times [0,1]$. Jaetaan D:n sivut tasavälisesti n osaan.



Kun $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, niin pisteikkö $(\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{j}{n} + \frac{1}{2n}) \in \mathbb{R}^2$ käy läpi jokaisen pienen neliön keskipisteen. Näin ollen

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y\mathrm{d}A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} (\frac{j}{n} + \frac{1}{2n})(\frac{1}{n})^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} 1\right) \left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (j + \frac{1}{2})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} (j + \frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} (\frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Tämä sama voidaan todeta myös geometrisesti.



$$
\iint\limits_D y\mathrm{d}A = \text{prisman tilavuus} = \text{puolet kuution tilavuudesta} = \frac{1}{2}.
$$

Yleisemmät alueet

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu, mutta ei välttämättä suorakaide ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio.

Tällöin määritellään

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_{\widehat{D}} \widehat{f}(x,y)\mathrm{d}A,$$

missä $\widehat{D}$ on suorakaide, jolle $D \subset \widehat{D}$ ja

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{kun } x \in D \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tasointegraalin ominaisuuksia

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu ja $f, g : D \to \mathbb{R}$ funktioita.

- Jos D:n pinta-ala on 0, niin

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = 0.$$

- Alueen D pinta-ala on

$$\iint_D 1 \,\mathrm{d}A = D\text{:n pinta-ala}.$$

- Jos $L \in \mathbb{R}$, niin

$$\iint_D Lf(x,y)\mathrm{d}A = L \iint_D f(x,y)\mathrm{d}A.$$

-

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\mathrm{d}A = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}A + \iint_D g(x,y)\mathrm{d}A$$

- Jos $f(x,y) \leq g(x,y)$, niin

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A \leq \iint_D g(x,y)\mathrm{d}A$$

- Kolmioepäyhtälö:

$$\left| \iint_D f(x,y)\mathrm{d}A \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}A.$$

- Jos $D = D_1 \cup D_2$, missä $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ ja joukon $D_1 \cap D_2$ pinta-ala on 0, niin

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}A + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}A.$$

Esim. 100. Olkoon $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ yksikkökiekko. Tällöin

$$\iint\limits_{D} 5\mathrm{d}A = 5 \iint\limits_{D} 1\mathrm{d}A = 5 \cdot \pi \cdot 1^2 = 5\pi.$$

4.2 Iteroidut integraalit

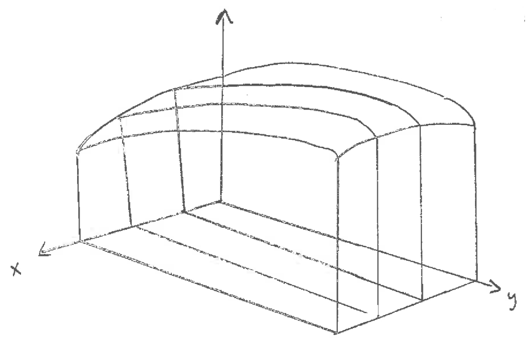
Tehtävänä on laskea $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A$, kun $D = [a,b] \times [c,d]$ ja f on funktio $f : D \to \mathbb{R}$. Integraalin arvo suoraan määritelmän (Riemannin summan raja-arvo) avulla on hankala laskea.

Lause 13. *Jos* $D = [a,b] \times [c,d]$*, niin tasointegraaleille pätee*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Yhtälön oikea puoli on iteroitu integraali.

"Perustelu": Jaetaan D tasavälisiin osiin muuttujan x suhteen.



Tällöin saadaan arvio

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A \approx \sum_{i=1}^{n} \int_c^d f(x_i,y)\mathrm{d}y \cdot \Delta x_i,$$

missä x_i on i:nnen viipaleen keskipisteen x -koordinaatti ja Δx_i on i:nnen viipaleen leveys.

Kun viipaleiden lukumäärä $n \to \infty$, saadaan

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Vastaavasti, jos D jaetaan y -akselin suuntaisiin osiin, saadaan

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Integrointijärjestyksellä ei siis ole merkitystä, vaan

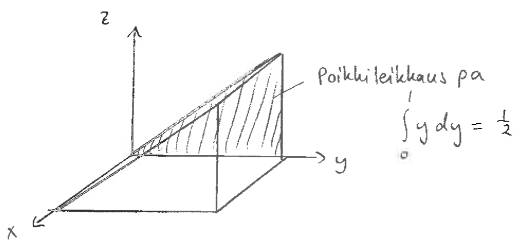
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

(Vrt. osittaisderivoinnin järjestys, jos derivoitava funktio on riittävän sileä.)

Esim. 101. Lasketaan $I = \iint\limits_D y\,\mathrm{d}A$, kun $D = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

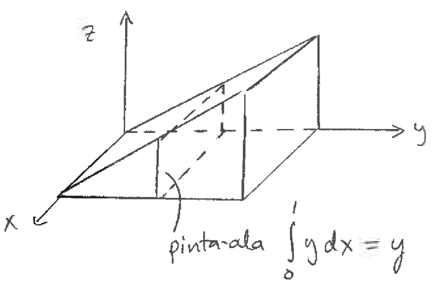
Tapa 1. Lasketaan

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 y \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

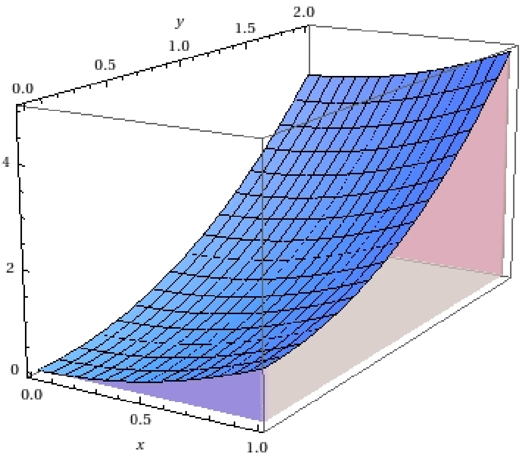


Tapa 2. Lasketaan

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 y \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(y \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$



Esim. 102. Lasketaan sen kappaleen tilavuus, jota rajaa yläpuolella pinta $z = x^2 + y^2$ ja alapuolella (x,y) -tason alue $[0,1] \times [0,2]$.



Kappaleen tilavuus on

$$\iint_D x^2 + y^2 \mathrm{d}A = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 + y^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\Big|_0^2 x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3} \right) \mathrm{d}x = \Big|_0^1 \frac{2}{3} x^3 + \frac{8}{3} x = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

Integrointi muun kuin suorakulmion yli

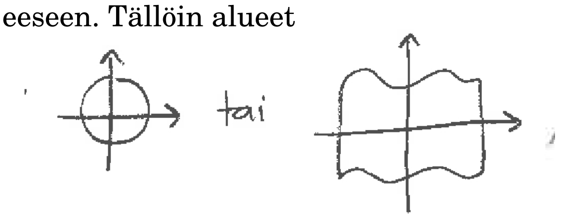
Laskettavana on nyt

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A,$$

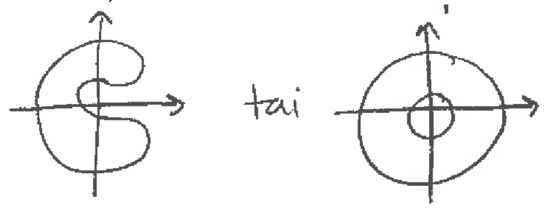
kun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]$ ja $y \in [c(x), d(x)]\}$, missä $c(x)$ ja $d(x)$ ovat jatkuvia funktioita. Tällöin

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tällaisessa alueessa y -akselin suuntaisten janojen täytyy kuulua alueeseen. Tällöin alueet



ovat ok, mutta alueet



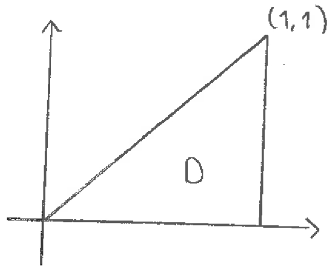
eivät ole. Alueella on siis oltava ”yläreuna” (käyrä $d(x)$) ja ”alareuna” (käyrä $c(x)$).

Vastaavasti, jos $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a(x), b(x)] \text{ ja } y \in [c,d]\}$, missä $a(x)$ ja $b(x)$ ovat jatkuvia funktioita, niin

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A = \int_c^d \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Tällaisessa alueessa on oltava siis ”vasen reuna” (käyrä $a(x)$) ja ”oikea reuna” (käyrä $b(x)$).

Esim. 103. Lasketaan alueen D pinta-ala, kun D on kolmio, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(1,1)$.



Pinta-ala on siis

$$A = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}A.$$

Tapa 1. Integraalin voi nyt laskea integroimalla ensin y-akselin suunnassa, jolloin $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ y \in [0,x]\}$ ja

$$A = \int_0^1 \int_0^x 1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Tapa 2. Integraalin voi myös laskea integroimalla ensin x-akselin suunnassa, jolloin $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [y,1],\ y \in [0,1]\}$ ja

$$A = \int_0^1 \int_y^1 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)\mathrm{d}y = \Big|_0^1 (y - \frac{y^2}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Esim. 104. Lasketaan $\iint\limits_D \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}A$, kun D on kuten edellisessä esimerkissä.

Tapa 1.

$$\iint\limits_D \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} \left(\Big|_0^x y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \sin(x)\mathrm{d}x = \Big|_0^1 -\cos(x) = 1 - \cos(1).$$

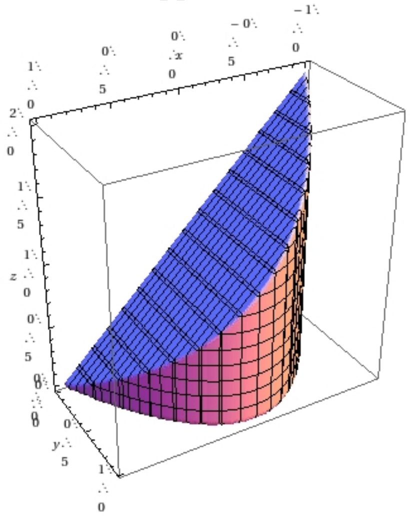
Tapa 2.

$$\iint\limits_D \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tätäpä ei voidakaan integroida, sillä integraalia $\int_y^1 \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla.

Huom. Oikea esitystapa integroitavalle alueelle voi olla ratkaisevaa laskun onnistumiselle!

Esim. 105. Lasketaan pintojen $z = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x^2$ ja $z = 1 - x$ rajoittaman kappaleen tilavuus.



Olkoon D kappaleen pohja:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [0, 1 - x^2]\}.$$

Kappaleen korkeus pisteessä $(x, y) \in D$ on tällöin $z = 1 - x$ joten tilavuus saadaan integraalina

$$\iint_D (1 - x)\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} (1 - x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1 - x)(1 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \Big|_{-1}^{1} x - x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 = \frac{4}{3}.$$

4.3 Epäoleelliset integraalit

Edellä tasointegraaleja laskettiin vain rajoitetussa alueessa. Näin ei kuitenkaan tarvitse olla. Mikäli integrointialue tai integroitava funktio on rajoittamaton, kyseessä on ns. epäoleellinen integraali.

Kysymys: Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ funktio ja alue $D \subset \mathbb{R}^2$ rajoittamaton. Miten lasketaan

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}A?$$

Kertausta: Yhden muuttujan tapauksessa esim.

$$\int_1^\infty x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^{-2}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \Big|_0^R - x^{-1} = \lim_{R\to\infty} (1 - R^{-1}) = 1.$$

Siispä

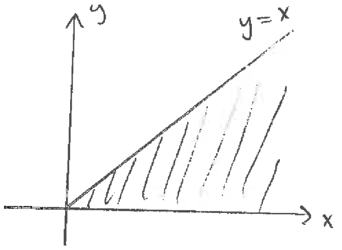
$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.1}$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^b f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)\mathrm{d}x.$$

Olkoon nyt $D \subset \mathbb{R}^2$ rajoittamaton alue ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(x,y) \geq 0$ kaikilla $(x,y) \in D$. Tällöin integraali

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$$

lasketaan iteroituna integraalina. Jos tässä tulee vastaan rajoittamattomia yhden muuttujan integraaleja, lasketaan ne kaavojen (4.1) avulla.

Esim. 106. Lasketaan $I = \iint_D e^{-x-y}\mathrm{d}A$ kun D on x -akselin ja suoran $y = x$ rajaama alue (x,y) -tason ensimmäisessä neljänneksessä, eli $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\infty),\, y \in [0,x]\}$.



Lasketaan

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^x e^{-x-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^x e^{-x-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \left(\Big|_0^x - e^{-x-y}\right)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R (e^{-x} - e^{-2x})\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty}\Big|_0^R (-e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}) = \lim_{R\to\infty}(-e^{-R} + \frac{1}{2}e^{-2R} + 1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Huom. Edellä laskettiin siis kappaleen tilavuus, jonka pohja on D ja korkeus pisteessä $(x,y) \in D$ on e^{-x-y}. Rajoittamattomalla kappaleella voi siis aivan hyvin olla äärellinen tilavuus.

Esim. 107. Lasketaan $I = \iint_D 1\,\mathrm{d}A$ kun D on x -akselin, suoran $x = 1$ ja käyrän $y = \frac{1}{x}$ rajaama alue (x,y) -tason ensimmäisessä neljänneksessä, eli $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$. Tällöin

$$I = \int_1^\infty \int_0^{1/x} 1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\Big|_0^R \ln(x) = \lim_{R\to\infty}(\ln(R) - 1) = \infty.$$

4.4 Tasointegraalin sovelluksia *

Funktion keskiarvo

Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$ funktio ja $D \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu alue, jonka pinta-ala on A. Merkitään $m =$"f:n pienin arvo alueessa D ja $M =$"f:n suurin arvo alueessa D. Tällöin $m \leq f(x,y) \leq M$ kaikilla $(x,y) \in D$ ja

$$mA = \iint_D m\mathrm{d}A \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}A \leq \iint_D M\mathrm{d}A = MA,$$

joten

$$m \leq \frac{1}{A}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A \leq M.$$

Luku

$$\overline{f}(D) = \frac{1}{A}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A$$

on funktion f keskiarvo joukossa D.

Esim. 108. Lasketaan funktion $f(x,y) = xy$ keskiarvo joukossa $D = [0,1] \times [0,1]$. Alueen D pinta-ala on $A = 1 \cdot 1 = 1$, joten

$$\overline{f}(D) = \frac{1}{A}\int_0^1\int_0^1 xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(y \Big|_0^1 \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}y = \Big|_0^1 \frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Joukon keskipiste ja kappaleen painopiste

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu, jonka pinta-ala on A. Tällöin D:n keskipiste on $(\overline{x}, \overline{y})$, missä

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}A,$$
$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}A.$$

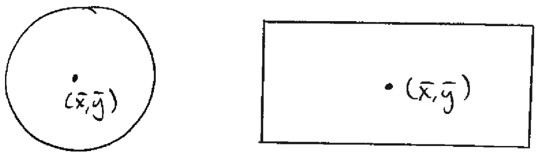
Siispä $\overline{x}$ on funktion $f(x,y) = x$ keskiarvo D:ssä ja $\overline{y}$ on funktion $f(x,y) = y$ keskiarvo D:ssä.

Jos tarkastellaan (x,y) -tason kappaletta, jonka tiheys (massa pinta-ala yksikköä kohden) pisteessä $(x,y) \in D$ on $\rho(x,y)$, niin kappaleen painopiste on $(\overline{x}_\rho, \overline{y}_\rho)$, missä

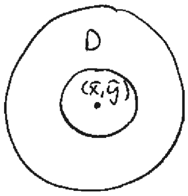
$$\overline{x}_\rho = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}A,$$
$$\overline{y}_\rho = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}A,$$

ja M on kappaleen massa, eli $M = \iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}A$. Jos kappaleen tiheys on vakio, keskipiste sama kuin painopiste.

Esim. 109.



Voi myös olla, että keskipiste ei kuulu itse kappaleeseen D:



Esim. 110. Lasketaan paraabelin $y = 1 - x^2$ ja x-akselin rajaaman kappaleen keskipiste. Alueena on siin $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [-1,1],\, y \in [0, 1-x^2]\}$ ja sen pinta-ala on

$$A = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} 1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Keskipisteen x-koordinaatti on siten

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint\limits_D x\mathrm{d}A = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1} x(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\Big|_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 = 0.$$

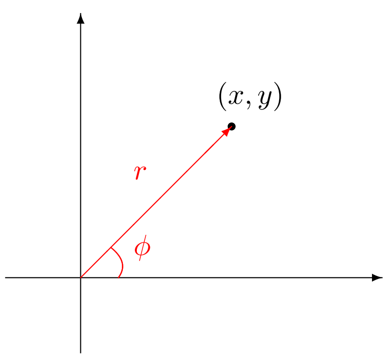
Tämä olisi voitu kyllä päätellä suoraan symmetrian perusteellakin. Vastaavasti y-koordinaatti on

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint\limits_D y\mathrm{d}A = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1}\left(\Big|_0^{1-x^2}\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)^2\mathrm{d}x$$
$$= \frac{3}{4}\frac{1}{2}\Big|_{-1}^{1}(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5) = \frac{3}{8}(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}) = \frac{2}{5}.$$

Kappaleen keskipiste on siis $(0, \frac{8}{15})$.

4.5 Tasointegraali napakoordinaateissa

Karteesiset koordinaatit (x,y) ja napakoordinaatit (r,ϕ):



Näiden koordinaattien välinen yhteys on

$$\begin{cases} x = r\cos(\phi), \\ y = r\sin(\phi) \end{cases}$$

Kysymys: Miten integroidaan funktio, joka on määritelty napakoordinaateissa?

Esim. 111. Yksikköympyrä $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in [0,1],\ \phi \in [0,2\pi]\}$.

Esim. 112. Ympyrärengas $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in [1,2],\ \phi \in [0,2\pi]\}$.

Esim. 113. Halutaan integroida funktio $f(x,y) = \arctan y/x$ alueen $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1],\ y \in [0, \sqrt{1-x^2}]\}$ yli. Integrointi karteesisissa koordinaateissa näyttää menevän hankalaksi, mutta napakoordinaateissa alue D on

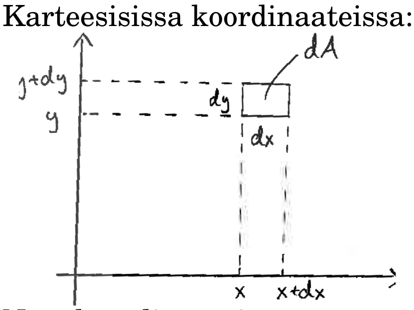
$$D = \left\{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in [0,1],\ \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

ja integroitava funktio on $g(r,\phi) = f(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = \phi$.

Jotta edellisen esimerkin integrointi voitaisiin suorittaa, pitää kuitenkin selvittää, mitä pinta-alaelementti $\mathrm{d}A$ on napakoordinaateissa.

Infinitesimaalinen pinta-alaelementti $\mathrm{d}A$ on sen alueen pinta-ala, joka muodostuu koordinaattien infinitesimaalisesta muutoksesta.

Karteesisissa koordinaateissa:

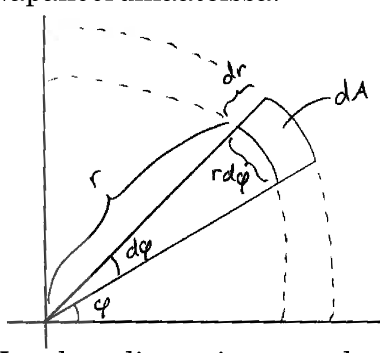


Muutos

$$x \to x + dx \text{ ja } y \to y + dy$$

antaa pinta-alan $dA = dx\,dy$.

Napakoordinaateissa:



Muutos

$$r \to r + dr \text{ ja } \phi \to \phi + d\phi$$

antaa pinta-alan $dA \approx r\,dr\,d\phi$.

Napakoordinaattien tapauksessa pinta-alaelementtiä approksimoidaan suorakulmiolla ja koska dr ja $d\phi$ ovat infinitesimaalisen pieniä, arvion virhe on häviävän pieni verrattuna dA:n kokoon.

Määritellään: $\boxed{\text{Napakoordinaateissa } dA = r\,dr\,d\phi.}$

Olkoon $f(r,\phi)$ funktio, $f : D \to \mathbb{R}$, missä D on kiekon segmentti

$$D = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in [a,b],\ \phi \in [\alpha,\beta]\}.$$

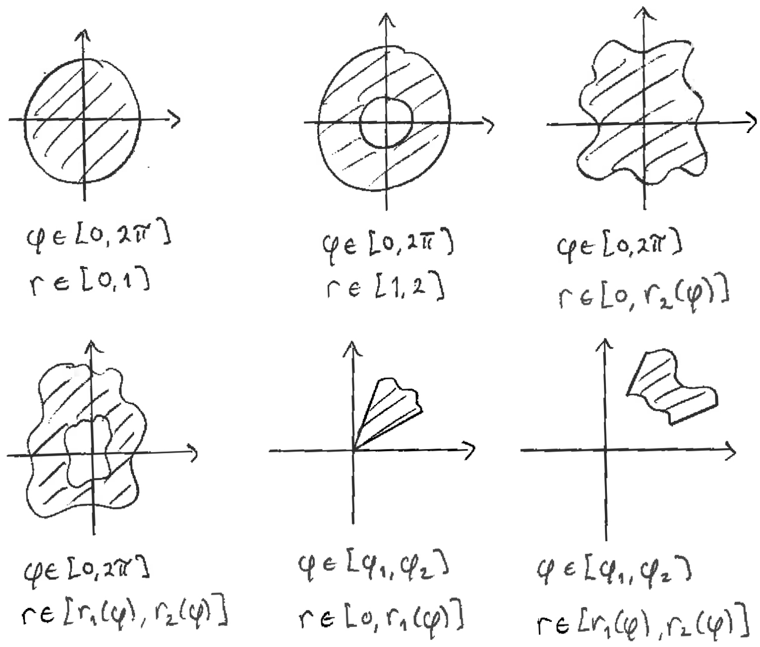
Tällöin

$$\iint\limits_D f(r,\phi)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r,\phi) r \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$

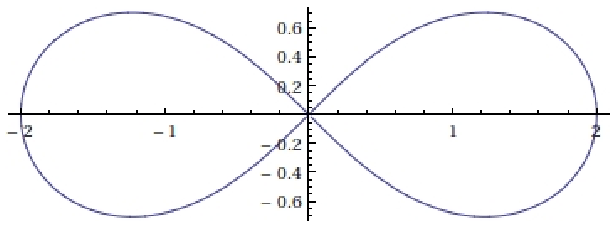
Muunlaiset alueet integroidaan iteroituina integraaleina aivan kuten karteesisissa koordinaateissakin. Eli jos $D = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \phi \in [\alpha,\beta],\ r \in [r_1(\phi), r_2(\phi)\}$, niin

$$\iint\limits_D f(r,\phi)\mathrm{d}A = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r,\phi)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

Esim. 114. Tällainen alue D voi olla esimerkiksi:



Esim. 115. Lasketaan lemniskaatan $r^2 = 4\cos(2\phi)$ sisään jäävän alueen pinta-ala.



Alue on symmetrinen, joten alueen pinta-ala on $4\times$ ensimmäiseen neljännekseen kuuluva ala:

$$\begin{aligned} A = 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{\cos(2\phi)}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi &= 4\int_0^{\pi/4} \Big|_0^{2\sqrt{\cos(2\phi)}} \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\phi \\ &= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos(2\phi)\mathrm{d}\phi = 4\Big|_0^{\pi/4}\sin(2\phi) = 4. \end{aligned}$$

Esim. 116. Lasketaan $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}\mathrm{d}A$. Napakoordinaateissa $\mathbb{R}^2 = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq 0,\ \phi \in [0, 2\pi]\}$. Siten

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \lim_{R\to\infty} -\pi \int_0^R (-2r)e^{-r^2}\mathrm{d}r = -\pi \lim_{R\to\infty} \Big|_0^R e^{-r^2} = \pi. \end{aligned}$$

Esim. 117. Lasketaan $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Lasketaan ensin integraalin neliö:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}\mathrm{d}A = \pi. \end{aligned}$$

Siten saadaan $I = \sqrt{\pi}$. (Huom. Ei voi olla $I = -\sqrt{\pi}$, sillä $e^{-x^2} > 0$.)

Muuttujanvaihto tasointegraaleissa

Kertauksena: Jos f on funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on bijektio, niin

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s))g'(s)\mathrm{d}s.$$

Tässä integraalissa tehtiin siis muuttujanvaihto $t = g(s)$, jolloin $\mathrm{d}t = g'(s)\mathrm{d}s$. Integrointirajat muuttuvat tällöin: $t = g(s) = a \Leftrightarrow s = g^{-1}(a)$ ja $t = g(s) = b \Leftrightarrow s = g^{-1}(b)$.

Kysymys: Miten tehdään muuttujanvaihto tasointegraaleissa?

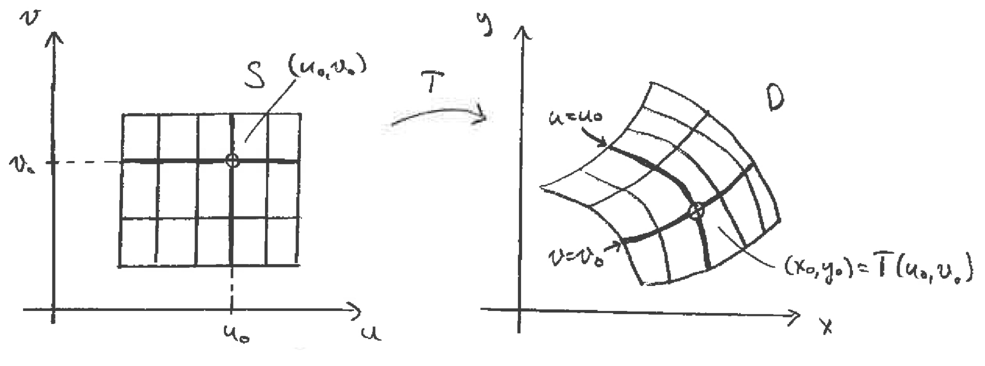
Olkoon $S, D \subset \mathbb{R}^2$ tason alueita, missä S on suorakulmio ja olkoon $T : S \to D$ bijektio, $T(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} \in D$, kun $(u,v) \in S$.

Olkoon myös f funktio $f : D \to \mathbb{R}$. Miten tasointegraali

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A$$

voidaan lausua tasointetegraalina alueen S yli?

Jaetaan alueen S sivut tasavälisesti n osaan. Siten alue S jakautuu n^2 pieneen suorakulmioon. Kun nämä suorakulmiot kuvataan kuvauksella T alueeseen D, jakautuu D vastaaviin n^2 ”kaarevaan suorakulmioon”.

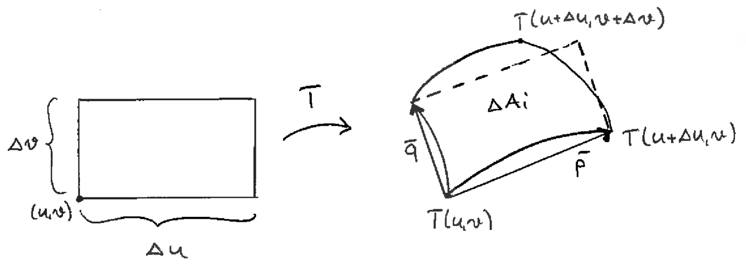


Arvioidaan alueen integraalia alueen D yli summalla

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A \approx \sum_{i=1}^{n^2} f(T(u_i^*, v_i^*))\Delta A_i,$$

missä piste (u_i^*, v_i^*) on i:nnen suorakulmion keskipiste alueessa S ja siten piste $T(u_i^*, v_i^*) \in D$ on i:nnen kaarevan suorakulmion piste alueessa D. Vastaavasti ΔA_i on i:nnen kaarevan suorakulmion pinta-ala.

Arvioidaan nyt pinta-alaa ΔA_i.



Kuvassa vektori $\mathbf{p}$ on

$$\begin{aligned}\mathbf{p} = T(u+\Delta u, v) - T(u,v) &= (x(u+\Delta u, v) - x(u,v))\mathbf{i} + (y(u+\Delta u, v) - y(u,v))\mathbf{j} \\ &= \frac{x(u+\Delta u, v) - x(u,v)}{\Delta u}\Delta u\mathbf{i} + \frac{y(u+\Delta u, v) - y(u,v)}{\Delta u}\Delta u\mathbf{j} \\ &\approx \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\mathbf{q} \approx \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v\mathbf{j}.$$

Approksimoidaan nyt pinta-alaa ΔA_i vektoreiden $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ virittämän suunnikkaan pinta-alalla, jolloin saadaan

$$\Delta A_i \approx |\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \left|\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{bmatrix}\right)\right|$$

$$= \left|\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{bmatrix}\right)\mathbf{k}\right| = \left|\det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right)\right|\Delta u\Delta v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v.$$

Näin saatiin siis arvio

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A \approx \sum_{i=1}^{n^2} f(T(u_i^*, v_i^*))\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n^2} f(T(u_i^*, v_i^*))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$$

ja kun jakopisteiden lukumäärä n lähestyy ääretöntä, saadaan

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_S f\circ T(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Tämä on muuttujanvaihtokaava tasointegraalille ja kaava pätee myös silloin kun S ei ole suorakulmio.

Esim. 118. Edellä todettiin geometrisesti, että muutettaessa karteesisista koordinaateista napakoordinaatteihin, täytyy lisätä kerroin r. Tarkistetaan, että yleinen muuttujanvaihtokaava antaa saman tuloksen.

Olkoon $S = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, 1],\ \phi \in [0, 2\pi]\}$ ja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tällöin kuvaus $T : S \to D$

$$T(r, \phi) = r\cos(\phi)\mathbf{i} + r\sin(\phi)\mathbf{j}$$

on bijektio ja kuvauksen Jacobin determinantti on

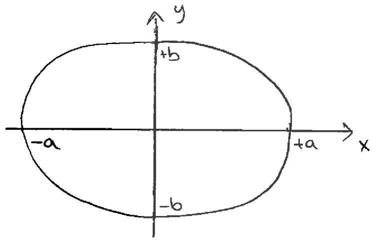
$$\frac{\partial\partial(x, y)}{\partial\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{vmatrix} = r.$$

Jos siis f on funktio $f : D \to \mathbb{R}$, niin

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}A = \iint\limits_S f \circ T(r, \phi)|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi.$$

Huom. $f(x, y)$ on f:n esitys karteeesisisissa koordinaateissa ja $f \circ T(r, \phi) = f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$ on f:n esitys napakoordinaateissa.

Esim. 119. Lasketaan ellipsin $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ pinta-ala, kun $a, b > 0$.



Asetetaan $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ja $T(u, v) = au\mathbf{i} + bv\mathbf{j}$. Tällöin T on bijektio $T : S \to D$ ja sen Jacobin determinantti on

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

Siten muuttujanvaihtokaavalla

$$D\text{:n pinta-ala} = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}A = \iint\limits_S 1\,|ab|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = ab\iint\limits_S 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \pi ab.$$

4.6 Avaruusintegraali

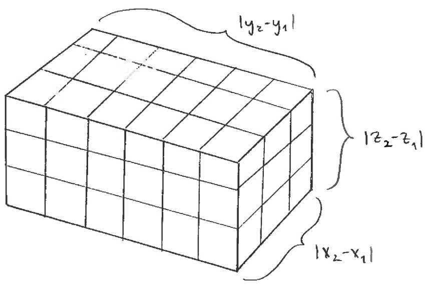
Olkoon $D \subset \mathbb{R}^3$ kappale ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio. Halutaan määritellä

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}V = \underline{\text{avaruusintegraali}} \text{ kappaleen } D \text{ yli.}$$

Idea: Tasointegraali osataan jo laskea, joten lisätään vain yksi dimensio mukaan samalla tavalla kuin edelliset.

Vaihe 1: Oletetaan, että D on suorakulmainen särmiö

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [x_1,x_2],\ y \in [y_1,y_2],\ z \in [z_1,z_2]\} = [x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\times[z_1,z_2].$$



Jaetaan D:n kaikki särmät tasavälisesti n osaan, jolloin D jakautuu n^3 suorakulmaiseen särmiöön. Tällöin integraali saadaan raja-arvona

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n^3} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i,$$

missä (x_i^*, y_i^*, z_i^*) in i:nnen suorakulmaisen särmiön keskipiste ja ΔV_i on i:nnen särmiön tilavuus.

Vaihe 2: Jos $D \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu (mutta ei suorakulmainen särmiö), niin määritellään

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\widehat{D}} \widehat{f}(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

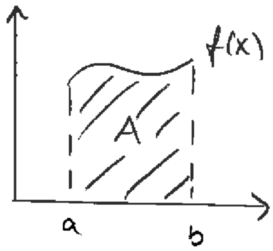
missä $\widehat{D}$ on suorakulmainen särmiö ja $D \subset \widehat{D}$ ja

$$\widehat{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{kun } (x,y,z) \in D \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Huom. Vastaavasti kuin yksi- ja kaksiulotteisessa tapauksessa (kun $D \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu)

$$\iiint_D 1\,\mathrm{d}V = D\text{:n tilavuus.}$$

Huom. Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x) =$ käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin rajoittama pinta-ala välillä $[a,b]$.



Jos $f(x) \geq 0$, niin $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}A$ on pinnan $z = f(x,y)$ ja (x,y)-tason alueen D rajoittama tilavuus.

Samoin $\iiint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}V$ on sen neliulotteisen kappaleen tilavuus, jota rajoittaa hyperpinta $w = f(x,y,z)$ ja kolmiulotteinen "pohja" D. Käytännöllisempiä tulkintoja seuraa kuitenkin sovelluksista.

Esim. 120. Jos $f(x,y,z)$ on kappaleen massajakauma (paikallinen tiheys, yksikkönä kg/m^3) jossakin kappaleessa D, niin $\iiint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}V$ on D:n kokonaismassa.

Huom. Avaruusintegraalille pätee samat laskukaavat kuin tasointegraalille, esim.

$$\iiint\limits_D Cf(x,y,z)\mathrm{d}V = C\iiint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

kun C on vakio.

Huom. $\boxed{\text{Avaruusintegraali voidaan laskea myös iteroituna integraalina!}}$

Esim. 121. Olkoon $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c]\}$ ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio. Tällöin

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_0^a \int_0^b \int_0^c f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^c \int_0^a \int_0^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \ldots$$

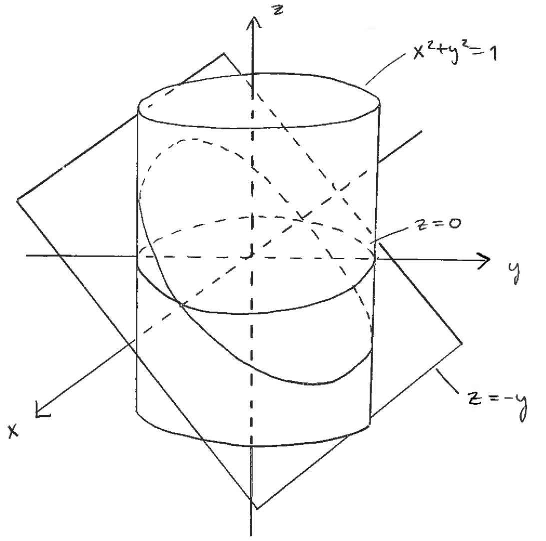
Integroinnin voi suorittaa $3! = 6$ eri järjestyksessä. Integroimisjärjestyksellä ei ole lopputuloksen kannalta väliä, mutta laskujen vaikeuteen se voi vaikuttaa ratkaisevastikin.

Huom. Iteroituna integraalina voidaan laskea tätäkin korkeampiulotteiset integraalit

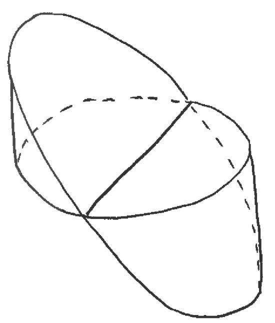
$$\iiint \cdots \iint f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

vastaavalla tavalla, muuttuja kerrallaan edeten.

Esim. 122. Lasketaan pintojen $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ ja $z = -y$ rajoittaman kappaleen tilavuus.



Kappale koostuu kahdesta samanmuotoisesta kiilasta, joten riittää laskea näistä toisen tilavuus ja kertoa kahdella.



Toisen kiilan pohja on $z = 0$ tasossa alue

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [0, -\sqrt{1 - x^2}\}$$

ja ”katto” on pinta $z = -y$. Kiila on siis kappale

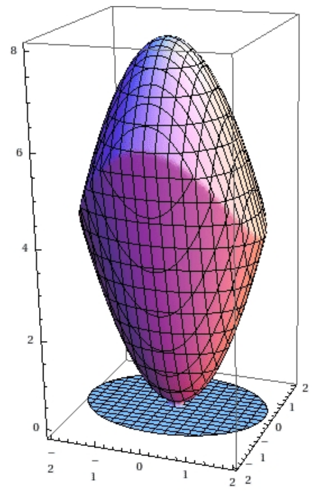
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [0, -\sqrt{1 - x^2},\ z \in [0, -y]\}.$$

Koko kappaleen tilavuus on siten

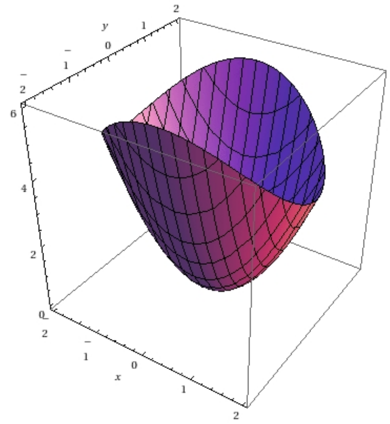
$$\begin{aligned}
2 \iiint\limits_D 1 \,\mathrm{d}V &= 2 \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \int_{0}^{-y} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} (-y) \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 2 \int_{-1}^{1} \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} (-\frac{1}{2} y^2) \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1 - x^2) \,\mathrm{d}x = 2 \Big|_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}x^3) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

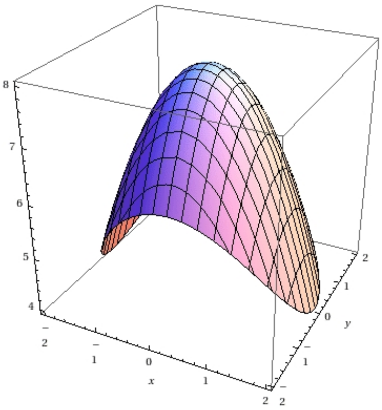
Esim. 123. Lasketaan sen kappaleen D tilavuus, jota rajaavat pinnat $z = x^2 + 3y^2$ ja $z = 8 - x^2 - y^2$.

Kappale näyttää tältä:



Sitä rajaavat ala- ja yläpinnat:





Etsitään ensin integrointirajat. Pinnat leikkaavat toisensa, kun

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Leikkauskäyrän projektio (x, y) -tasoon on siis ellipsi ja koko kappaleen D projektio (x, y)-tasoon on tämän ellipsin sisäpuoli

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2],\ y \in [-\sqrt{2 - x^2/2}, \sqrt{2 - x^2/2}]\}. \end{aligned}$$

Tämä R on siten alue, jonka yli integroidaan muuttujien x ja y suhteen.

Jokaisessa pisteessä $(x, y) \in R$ kappale ulottuu nyt siis pinnalta $z = x^2 + 3y^2$ pinnalle $z = 8 - x^2 - y^2$ ja siten kappaleen tilavuus on

$$V = \iiint\limits_D 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2-x^2/2}}^{\sqrt{2-x^2/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{2-x^2/2}}^{\sqrt{2-x^2/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2) \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \Big|_{-\sqrt{2-x^2/2}}^{\sqrt{2-x^2/2}} \left(8y - 2x^2 y - \frac{4}{3} y^3\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2(8 - 2x^2)\sqrt{2 - x^2/2} - \frac{8}{3}(2 - x^2/2)^{3/2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8(2 - x^2/2)^{3/2} - \frac{8}{3}(2 - x^2/2)^{3/2}\right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{4\sqrt{2}}{3}(2 - x^2)^{3/2} \mathrm{d}x.$$

Tehdään nyt muuttujanvaihto $x = 2\sin(u)$, jolloin $\mathrm{d}x = 2\cos(u)\mathrm{d}u$ ja integrointirajat muuttuvat $x = -2 \Rightarrow u = -\pi/2$ ja $x = 2 \Rightarrow u = \pi/2$. Tällöin

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-pi/2}^{\pi/2}(4-4\sin^2(u))^{3/2}2\cos(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 4^{3/2}\cdot 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2(u))^{3/2}\cos(u)\mathrm{d}u = \frac{64\sqrt{2}}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Nyt kaksinkertaisen kulman kaavalla saadaan

$$\begin{aligned} \cos^4(u) &= \frac{1}{2^2}(1+\cos(2u))^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos(2u)+\cos^2(2u)) \\ &= \frac{1}{4}(1+2\cos(2u)+\frac{1}{2}(1+\cos(4u))) = \frac{1}{8}(3+4\cos(2u)+\cos(4u)) \end{aligned}$$

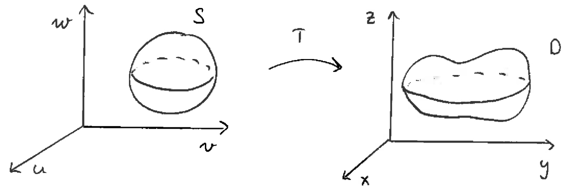
ja siten

$$V = \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(3+4\cos(2u)+\cos(4u))\mathrm{d}u = \frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot 3\cdot\pi = 8\sqrt{2}\pi.$$

Muuttujanvaihto avaruusintegraaleissa

Muuttujanvaihto yleistyy tasointegraaleista suoraan avaruusintegraaleihin ja vielä korkeampiulotteisiin integraaleihinkin.

Olkoon $S, D \subset \mathbb{R}^3$ kappaleita ja $T : S \to D$ bijektio.



Merkitään $T(u,v,w) = x(u,v,w)\mathbf{i}+y(u,v,w)\mathbf{j}+z(u,v,w)\mathbf{k}$. Jos f on funktio $D \to \mathbb{R}$, niin muuttujanvaihtokaava avaruusintegraalille on

$$\boxed{\iiint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_S f\circ T(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.}$$

Merkintä $f\circ T(u,v,w)$ tarkoittaa yksinkertaisesti funktiota kirjoitettuna uusilla muuttujilla, ja muunnoksen suurennussuhde $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$ saadaan Jacobin determinantin

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

avulla.

Esim. 124. Lasketaan integraali

$$\int_0^3\int_0^4\int_{y/2}^{y/2+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Integraali voitaisiin toki laskea suoraankin, mutta muutetaan se harjoituksen vuoksi vielä yksinkertaisempaan muotoon: tehdään muuttujanvaihto $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ ja $w = \frac{z}{3}$. Nyt (x, y, z)-avaruuden integrointialue on

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in [y/2, y/2+1],\ y \in [0,4],\ z \in [0,3]\}.$$

Uusi integrointialue saadaan tästä:

$$\begin{aligned}
&x = \frac{y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0\\
&x = \frac{y}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-y}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1\\
&y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0\\
&y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad v = 2\\
&z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = 0\\
&z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad w = 1.
\end{aligned}$$

ja siten uusi integrointialue on

$$S = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, u \in [0,1],\ v \in [0,2],\ w \in [0,1]\}.$$

Muuttujanvaihdon Jacobin determinantti on

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Siten haluttu integraali on

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{y/2+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w) 6 \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\
&= 6 \int_0^1 \int_0^2 (\frac{1}{2} + w) \mathrm{d}v\mathrm{d}w = 12 \int_0^1 (\frac{1}{2} + w) \mathrm{d}w = 12.
\end{aligned}$$

Huom. Karteesisen koordinaatiston ohella tyypillisimmät kolmiulotteiset koordinaatistot ovat sylinteri- ja pallokoordinaatisto. Näitä, ja niissä integrointia, tarkastellaan kurssin Differentiaali- ja integraalilaskenta 3 alussa.

Hakemisto