

## Teknillinen matematiikka

Olavi Nevanlinna  
Matematiikan laitos  
Teknillinen korkeakoulu

Teknillisen korkeakoulun opettajaneuvoston 30. tammikuuta 1979 määrittämä tämän viran opetusala on: »Teknisten tieteiden matematiikka (mukaanlukien numeerinen analyysi) sekä sen hyödyntäminen tekniikan käyttöön.» Näinkin koukeroinen opetusala kuvastanee eräänlaista huolta ja huolenpitoa tekniikan ja matematiikan yhteispelistä korkeakoulussamme. Haluan yrittää selvittää käsityksiäni tältä osin, nyt kun niitä eivät käytännön vaatimukset vielä ole koulineet eivätkä kolhineet. Mitä siis on teknisten tieteiden matematiikka, tai teknillinen matematiikka, mitkä opetuksen ongelmat ja tutkimuksen hyvinvoinnin edellytykset?

Sopikaamme hetkeksi yhteisestä mielikuvasta: matematiikka on kuin kasvimaailma, elävä kasvimaailma, käunis, moni-ilmeinen ja kiehtova, joka imee elinvoimansa ympäristöstään. Epäilemättä se on ihmisten luomaa, sen kehittyminen on ollut ja on sidoksissa yhteisön tarpeisiin ja vallitsevaan maailmankuvaan. Mutta silti sillä on hämmästyttävä itsenäisesti elämisen, riippumattomien totuuksien tietämisen leima. Sen elinedellytyksiä on tietty loogisen perustan monimutkaisuuden salliminen – sisäisen rakenteen puhtauden korostaminen tapahtuisi sisällön merkityksen kustannuksella. Toisaalta, vaikka matematiikka tarvitseekin vuorovaikutusta ympäristönsä kanssa, sen liiallinen juurtuminen sovellutuskohteisiinsa mekanisoisi, kangistaisi, vaikeuttaisi kasvua ja kehitystä, johtaisi jo tunnettujen apuneuvojen toistamiseen. Tässä rikkaassa välimaastossa nämä kasvimme parhaiten kukoistavat.

Teknillinen matematiikka on tätä kuva kieltä käyttäen helppo määritellä: se koostuu niistä kasveista, joiden kasvu-ympäristönä on tekniikka. Olen haluton leimaamaan joitakin matematiikan aloja teknilliseen matematiikkaan kuulumattomiksi, vaikka eräät alat tai lajit tietyt viihtyvätkin tässä tekniikan kasvu-ympäristössä paremmin kuin toiset. Pikemminkin on mielenkiintoista katsoa, miten sama laji muuntuu kasvu-ympäristönsä mukaan.

Matematiikka on paljolti ollut luonnontieteiden, erikoisesti taivaanmekaniikan matematiikkaa. Tätä klassillisen fysiikan luontoahan hallitsevat luonnonlait. Ne ovat yksinkertaisia ja voimakkaita ja tuottavat kiinteän sisäisen rakenteensa avulla plastista, ehdotonta, tarkkaan ja pitkälle ennustavaa matematiikkaa.

\*) Virkaanastujaisesityelmä Teknillisessä korkeakoulussa 29.4.1980.

Tekniikassa me käytämme luontoa hyväksi omiin tarkoituksiimme. Tämä on mahdollista siltä osin kuin me tunnemme kohteemme, olemme onnistuneet selvittämään kohteen käyttäytymisen enemmän tai vähemmän matemaattisin termein. Tässä toiminnassa me harjoitamme systemaattisuutta, joka mahdollistaa ongelmien matematisoimisen. Jaan tässä näin syntyvän teknillisen matematiikan karkeasti kahteen osaan sen mukaan, katsotaanko prosessi tarkasti tunnetuksi vai ei. Useissa konstruktiivisluonteisissa tekniikan tehtävissä mallin voidaan katsoa olevan tarkka, kun taas esimerkiksi tuotannon suunnittelussa tulee esiin tilanteita, joissa epätarkkuuden mallintaminen tilan tai systeemin rakenteen kuvauksessa on keskeistä. Edellisessä tapauksessa saadaan dynaamiset systeemit tyypillisesti kuvatuiksi differentiaaliyhtälöillä, kuten taivaanmekaniikassakin, mutta nyt näillä on ihmisen luoman keinotekoisien rakenteensa johdosta vähemmän säännöllisyysominaisuuksia kuin fysiikan malleilla. Matematiikasta tulee tällöin — suurennuslasilla vivahteita etsien — kulmikkaampaa, kirveellä veistettyä, tulokseen pakotettua, mutta ei vähemmän jännittävää. Esimerkiksi taivaanmekaniikan strukturoitujen differentiaaliyhtälöiden ja sanokaamme piirisuunnittelun kooltaan suurten differentiaaliyhtälösystemien numeerinen ratkaiseminen poikkeavat olennaisesti toisistaan. Vaikka molemmissa tapauksissa sekä matemaattinen malli että käytettävät numeeriset menetelmät voidaan kuvata samaa kieltä käyttäen, ovat mallien erilaisuudesta ja ratkaisuille asetetuista vaatimuksista johtuvat ratkaisemisen vaikeudet paljolti erilaisia. Pyrkinessään selvittämään näitä vaikeuksia numeerinen analyysi käyttää molempiin erimerkki-tapauksiimme yhtenäistä kieltä, mutta tulee painottuneeksi sovellutuskohteesta riippuen hieman eri tavoin. Vastaavankaltaisia struktuurin luonteen eroja saattaisimme etsiä myös stokastiikasta siirryttäessä modernin fysiikan pienoismaailman malleista tehtaiden tuotannonohjauksen malleihin.

Vaikka teknillinen leima matematiikassa kulkeekin tällä tavoin useiden matematiikan osa-alueiden lävitse, ei tästä seuraa, että näiden vivahteiden erottavaa merkitystä tulisi pyrkiä voimallisesti korostamaan. Yhtenäisen, koko osa-alueen kattavan teorian johdosta tutkija tulee kyllä tutkimustyössään tutustuneeksi riittävästi koko osa-alueeseensa voidakseen halutessaan toimia tutkimusyhteistyössä tekniikkaan liittyvissä tehtävissä.

Korostin edellä sitä ilmeistä seikkaa, että tekniikka rakentuu ymmärretyille luonnonilmiöille. Biologiasta tapaamme korkeasti jäsentynyttä käyttäytymistä, jonka matemaattista esittämistä emme hallitse — esimerkiksi dynaamisia systeemejä, joilla on voimakkaita säilyvyysominaisuuksia ja joiden tilakäyttäytyminen voi vaihdella likimain jaksollisesta näennäisen kaottilaiseen ja takaisin. Tällaisen joustavuuden matemaattinen ymmärtäminen epäilemättä mahdollistaisi olennaisesti uudenlaisen tekniikan kehittymisen. Siinä tapahtuvat matemaattiset läpimurrot olisivat siis tärkeitä tekniikan kannalta, vaikka emme ehkä sijoittaisikaan tällaista tutkimusta ensi ajattelemalta teknillisen matematiikan piiriin.

Tässä esittelemieni kaltaisten syiden perusteella pidän tärkeänä painottaa teknillisen matematiikan leveyttä, sekä yksityisen tutkijan matemaattisen sivistyksen että tutkijoista muodostuvan laitoksen tasolla.

Tarkastelkaamme nyt lyhyesti parin esimerkin valossa, miten matemaatikkojen ja insinöörien yhteistoiminta on viime vuosina sujunut. Elementtimenetelmä on alkuaan insinöö-

rien kehittämä lujuusopin laskentamenetelmä. Se sai kehittyä varsin pitkälle ja pitkään viisi- ja kuusikymmenlukuilla, ennen kuin matemaatikot, numeeriset analyytikot, havaitsivat siinä piilevän ajattelutavan omaperäisyyden ja arvon. Lähes kultakuumeenomaisen tutkimustyön ansiosta menettelyn matemaattinen teoria kehittyi ja sen myötä sovellutukset laajenivat alkuperäisestä kovasti poikkeaviinkin teknillisiin tehtäviin. Alkuun päästyään menettelyn matemaattinen käsittely eteni nopeasti, matematiikan sisäisiä uusia struktuureja ei tarvittu. Abstraktin matematiikan puhettavan mukaan kyseessä ei ollut syvälinen kehitys, vaikkakin sen vaikutus sovellutusalueilla oli valtava.

Toinen esimerkki, joka sekin on insinöörien — nyt sähköinsinöörien — esittämä menetelmä, sisältää jo yhteyksiä syvälle matematiikkaan. Fourier'n muunnos on matemaattinen tekniikka, joka soveltuu erinomaisesti erilaisten jaksollisten ilmiöiden kuvaamiseen ja käsittelyyn. Äärellisessä Fourier'n muunnoksessa käsitellään äärellisen määrän objekteja sisältäviä jaksoja. Vuonna 1965 julkaistiin menettely, jolla äärellinen Fourier'n muunnos saatiin lasketuksi naiivia suoraviivaista menettelyä huikaisevasti vähäisemmällä työmäärällä. Tämä ns. nopea Fourier'n muunnos sai pian sovellutuksia sekä sellaisenaan elektroniikassa että muillakin tekniikan aloilla erilaisten numeeristen menetelmien yhteydessä, menetelmien, joiden tehokkuus muihin menetelmiin nähden riippui kyseisen muunnoksen vaatimasta laskentatyöstä. Nopean Fourier'n muunnoksen yhteydet matematiikan sisäisiin kysymyksenasetteluihin tulivat esille vasta kymmenisen vuotta myöhemmin, muunnoksen minimityömäärällä suorittavaa algoritmia etsittäessä. Nykyisin tunnetaan jo edellä mainittua nopeaa Fourier'n muunnostakin nopeampia algoritmeja, ja on ehkä mielenkiintoista todeta, että tässä etsintätyössä on tärkeänä työvälineenä käytetty vanhaa kiinalaista polynomien yhtäaikaista jaollisuutta koskevaa tulosta.

Näiden esimerkkien valossa insinöörien ja numeeristen analyytikoiden sekä näiden ja matematiikan muiden alojen tutkijoiden välisten vuorovaikutussuhteitten merkitys tulee korostuneesti esille: siksi kauan kesti kummassakin tapauksessa omalla alallaan ympäri maailmaa tunnetun menettelyn pukeminen edelleen kehittelyn mahdollistavalle kielelle.

Oulussa viime tammikuun alussa pidetyillä matemaatikkopäivillä tuotiin useampaankin kertaan esille matemaatikkojen tietty vaikeus selvittää työtään ulkopuolisille. Teknillisen matematiikan kohdalla tässä ei tulisi olla ongelmia: teknillisten alojen erikoistuntijat ymmärtävät itse matemaattisen perusopin saaneina kohtuullisesti matematiikan kysymyksenasetteluita ja tunnustavat sen merkityksen tekniikalle. Keskustelua esimerkiksi opetuksesta ei esiintyisi ilman asian kokemista tärkeäksi. Määrällisesti suurin osa Teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksen toiminnasta liittyy kaikille teekkareille annettavaan perusopetukseen, ja siksi on ymmärrettävää, että tämän ympärillä syntyy ajoittain eri tekniikan alojen kanssa mielipiteidenvaihtoa. Toistamatta tässä näitä teemoja haluan poimia esiin muutamia niihin liittyviä seikkoja. Kaikille opetettava perusmatematiikka ei ole vain väline ammattiaineiden esittämisen mahdollistamiseksi, sen tavoitteena ei ole pelkästään ammattiopinnoissa tarvittavien matemaattisten valmiuksien luominen, vaan sen tavoitteet ovat laajemmat ja pitkäaikaiset: se on olennainen osa keskeistä insinöörinkoulutusta, sen kestävä, hitaasti vanhenevaa perustaa. Erikoisesti tästä seuraa, ettei matematiikan ja tekniikan sovel-

lutusten opetusjärjestyksen lomittaisuutta tule pitää pahana. Pikemminkin päinvastoin. Aivan kuten matematiikan tunteminen helpottaa tekniikan kysymysten esittämistä ja ymmärtämistä, on toisinaan vastaavasti matematiikan opetuksen kannalta edullista, että oppilailla on kysymyksenasetteluun liittyvä tekniikan sovellutus mielessään valmiina.

Opetettavan materiaalin muuntumisen on perusopetuksen tasolla oltava varovaisen määrätietoista. Viime aikojen suurimmat muutokset ainakin välillisesti on aiheuttanut automatiikan ja automaattisen tietojenkäsittelyn kehittyminen, joka tekniikan järjestelmien monimutkaistumisen kautta on korostanut erilaisten matemaattisten struktuurien tuntemisen tärkeyttä yleensä ja erikoisesti tietynlaisen konstrukttiivisen, numeerialgoritmisen ajattelutavan hallitsemisen merkitystä. Vastaavasti se on vähentänyt esimerkiksi analyysin eräiden vanhemman insinööripolven tuntemien laskennallisten temppujen sujuvan taitamisen osuutta. Painotus ja tietty konservatismi opetusmateriaalin valinnassa on paikallaan matematiikan struktuurin rakentumisen lainalaisuuksia selvitettyä; tämä on tarve, joka korostuu tekniikan kehityksen nopeudesta johtuvien vaatimusten vaihtumisen myötä. Käytännössä konservatismia ylläpitää myös tekniikan alojen traditio, vaikka matematiikan opetuksen tulisi pikemminkin laskuteknillisten menettelyjen osalta pyrkiä uusien ajatusten tarjontaan. Esimerkkinä tällaisesta hieman ylikorostuneesta tradition kunnioittamisesta olkoon, korkeakoulumme ulkopuolelta, logaritmitaulut, joitten käyttöä opetettiin oppikouluissamme maamme jo siirryttyä tietokoneaikaan – henkilöille, joiden työpanoksesta tuntuva osa tulee sijoittumaan ensi vuosituhanalle.

Perusopetustasolla on tietokoneen käyttöön teknismatemaattisena apuvälineenä kiinnitetty huomiota, mutta alan jatkokoulutus ja tutkimus ei nykyisellään ole riittävästi järjestetty. Matematiikan ja tietojenkäsittelyn välimaastoon sijoittuvan teknillisen laskennan tai teknillismatemaattisen tietojenkäsittelyn korkeatasoisen asiantuntemuksen tuottamiseen tarvitaan matematiikan ja tietojenkäsittelyopin laitosten sekä laskentakeskuksen nykyistä kiinteämpää yhteistyötä.

Teknilliseen korkeakouluun perustettiin 1965 teknillisen fysiikan osastolle erityinen teknillisen matematiikan linja, joka edelleen, kahden tutkintosääntöuudistuksen jälkeenkin, on asiallisesti ottaen olemassa lähes alkuperäisessä muodossaan. Vuosittain parikymmentä opiskelijaa valitsee perusopin jälkeen pääasialliseksi opintojensa kohteeksi teknillisen matematiikan sekä perehtyy tämän lisäksi hyvin johonkin tekniikan erityisalaan. Nämä tarjoavat erikois- ja diplomitöidensä avulla tärkeän matematiikan ja tekniikan alojen välisen yhteydenpitokanavan. Tämän lisäksi on syytä mitä hartaimmin toivoa, että osastot omilla koulutusohjelmissaan käyttäisivät uusimman tutkintosäännön suomaa mahdollisuutta tarjota opiskelijoille tilaisuutta valita toinen syventymiskohde matematiikan piiristä. Vuoden 1971 tutkintosäännön puitteissa tästä on hyviä kokemuksia, vaikka käytäntö eri osastoissa onkin ollut kovin erilainen.

Matematiikkaan pääasiallisesti perusopin jälkeen keskittyvien, matematiikan laitoksen omien opiskelijoiden ja jatko-opiskelijoiden tarvitsema ja sama opetus on ollut monopolista, ja se onkin muodostanut perusopetuksen jälkeen laitoksen toisen suuren opetuksellisen kokonaisuuden. Voidaan ehkä kuitenkin kysyä, miten onnistunut tällainen opetus-

sen kaksijakoisuus on koko korkeakoulun kannalta, onko laitoksen opetuspyramidi alhaalta leveä ja sen jälkeen kapea ja korkea, tulisiko eri insinöörialojen jatko-opetuksen ja tutkimuksen tarpeet voida ottaa entistä paremmin huomioon. Nykyinen vakio-opetusvalikoima sisältää kyllä kaikille insinöörialoille tarkoitettuja ja mitoitettuja opintojaksoja kuten lineaarisen ohjelmoinnin, koesuunnittelun tai elementtimenetelmän sekä muutaman erityisaloille kohdistetun apuneuvokokoelman. Kun käytännössä, syystä tai toisesta, muuhun matematiikan jatko-opetukseen ei juuri ole luentotasolla osallistunut muita kuin laitoksen omia oppilaita, ei tilannetta voi pitää kaikilta osiltaan hyvänä. On pystyttävä luomaan korkeakouluumme keskustelevalta ilmapiiri, jossa niin uusia matemaattisia tekniikkoja tuoreeltaan esittelevät tietoiskut kuin laajemmat, eri aloille kohdistetut ja vaikkapa vähän spekulatiivisetkin kokeilut elävät. Tekniikan erityisalan tutkijan on voitava luottaa saavansa apua matemaattiseen ongelmaansa matematiikan laitokselta aina, kun siihen ylipäättään vastaus jossain päin maailmaa tunnetaan. Näin vahva luottamus ajaa jo kysymään — ja nämä kysymykset ovat matematiikan laitokselle elintärkeitä luontevan kosketuksen säilymiseksi tekniikan sovellutuksiin. Tällainen luottamus ei pääse syntymään, ellei laitos näy eikä anna kuulua itsestään. Tähän tarvitaan halua, asian kokemista tärkeäksi ja jotakin palautetta näiden kysymysten muodossa, muuten erilaiset mahdolliset yhdysmiesjärjestelmät tms. organisointiyitytykset tulevat vastedeskin jäämään vain suunnitelmiksi paperille. Tärkeässä asemassa tässä ovat laitoksen jatko-opiskelijat, ja näiden tutkimuksen ohjaamiseen sekä jatko-opiskelijapaikkojen täyttöön tulee, kuten aina, kiinnittää huomiota siten, että uutta korkeaa asiantuntemusta syntyy monipuolisesti teknillisen matematiikan eri aloille. Erästä seikkaa on tässä yhteydessä lopuksi syytä korostaa: teknillisen matematiikan, laajastikin ymmärrettynä, lukeminen tekniikan osaksi on nuoren tutkijan suuntautumista voimakkaasti ohjaava tekijä, napanuora teknillisen matematiikan kasvupohjaan. Erikoisesti toivon, että valtion teknillistieteellinen toimikunta edelleenkin ottaa tukeakseen nuoria matemaatikonalkuja olettamatta näiden tutkimukselta välittömiä sovellutuksia tekniikkaan.

## Summary

### *Engineering mathematics*

The mathematics related to engineering problems is basically the same as the mathematics of natural sciences, but it has a more complicated structure. For a Department of Mathematics at a University of Technology this means that a broad knowledge of mathematical theory is necessary, but so is a close contact between engineers and mathematicians. The recent developments of the finite element method and the fast Fourier transform are typical fruits of such a contact.

There is a tendency of the teaching of advanced mathematics to concentrate too exclusively around the interests of mathematicians. Special efforts must be made to help the research engineer to find the most recent and most effective mathematical methods related to his problems.