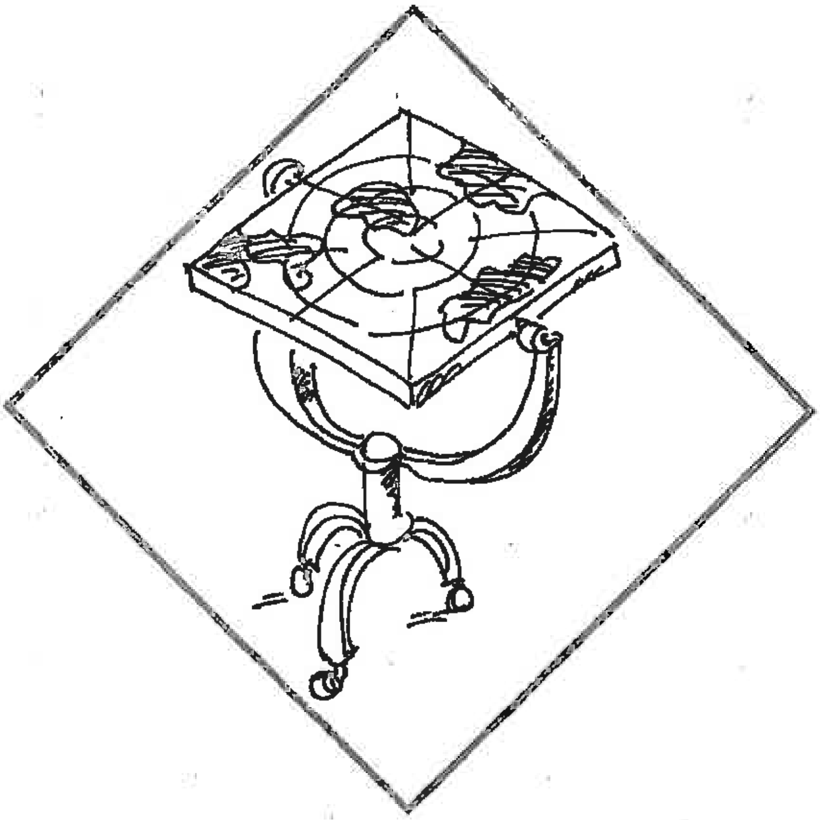
TIEDE-

1/00 POLITIIKKA



Uskomuksia ja itsestäänselvyyksiä

Irtonumero 40 mk

Olavi Nevanlinna

Matematiikan kauheudesta ja kauneudesta

Olavi Nevanlinna kuvaa tieteiden kuningattaren kaumeutta ja kauheutta. Kuningatar vaatii työhön: matemaatikon on nöyryttävä rumaan, tikkuiseen puurtamiseen, ilman sitä ei saavuteta kaunista tulosta.

Kauneus on katsojan silmissä – niin sanotaan. Vastaavasti, jonkun asian tai teon kauheus tarvitsee kokijan. Me liitämme tieteeseen yleensä totuuden etsinnän. Sellaisessakin ilmaisussa toimija ja toiminta ovat esillä.

Matematiikka on jotain mitä jotkut ihmiset tekevät, vieläpä ilokseen. Tämä ei oikein vielä kelpaa määritelmäksi. Sellainen voisi olla vaikkapa toteamus, että matematiikka on sitä mitä matemaatikot tekevät. Tällainen, tahallisen itseironinen, mutta samalla lempeän hellä suhtautuminen oman tieteenalan ontologisen pohjan heikkouteen on varsin tavallista matematiikkojen keskuudessa. Minulle se on itsestäänselvyys. Matematiikka on ihmisten tekemää – ja varsin kaunista sellaiseksi. Kuningatar tieteiden joukossa.

Tätä rikkautta ei ole muualla:

leikki – syvyys
kauneus – hyöty

Siinähän on kaikki.

Kokonaisuudet ja osat

Aloitetaan leikistä ja hyödystä. Kun matematiikkaa käytetään väärin ei mallintamisvirheitä ole aina helppo löytää. Valmiit todet asiat liitettyinä yhteen eivät aina ole tosia.

Olkoon annettuna kolme väitettä

time = money,

knowledge = power,

power = work/time, ja

ratkaisemalla saadaan

$$\text{money} = \frac{\text{work}}{\text{knowledge}}$$

Suomenkieliselle päättely paljastuu välittömästi, koska väittämät tulee ainakin alitajuisesti heti kääntäneeksi suomeksi. Varsinaisesti tämä on pikemminkin nörttihuumoria, mutta kuvaa tehokkaasti automaattisten päättelytekniikoiden ja mallintamisen vaikeuksia. Monimutkaisten järjestelmien kuvaukset pitävät sisällään osioita. Kuinka voimme luottaa siihen että osat saumautuvat toisiinsa ilman tämän kaltaisia ongelmia.

Annan tähän osavastauksen, välttämättömän vaan ei riittävän ehdon: asioiden kuvaustavan, siis kielen, tulee olla hyvin pitkälle yhteistä ja ajassa kestävää. Tällaisessakin mielessä matematiikka on osa yhteistä kulttuuria.

Harmoninen taivas

Jos haluamme hetken leikkiä syvällisempiä ajatuksia, niin maallikoiden ja miksei esimerkiksi myöskin eräiden fyysikoiden maailmankuvassa matematiikka nähdään usein kaikkien tosien matematiikan väitteiden ja rutiinien kokoelmana. Matemaatikkojen tehtävänä on lähinnä löytää kaikkien totuuksien kokoelmasta hyödylliset ja ehkä myös opettaa ne muille, jotta niillä voidaan sitten tehdä jotain hyödyllistä.

Tämä on huvittavalla tavalla platonistinen ajatus. Että olisi olemassa kaikkien matemaattisten väitteiden harmoninen taivas. Meidän tehtävämme olisi hyppiä ja tarttua ideoista riippuviin naruihin ja nykäistä niitä fiksussa järjestyksessä tänne kotoisille perukoille.

Aikansa lapsia

Matematiikka kuten kaikki kulttuuri on ihmisten ja ympäristön tuote. Viime aikoina on keskusteltu kolmannesta kulttuurista. Tässä yhteydessä pidetyistä puheenvuoroista olen aistivinani, että fyysikoilla on aika voimakas usko tiedon itsensä voimaan. Teknokulttuurin saavutukset ovat monasti fysiikan saavutusten seurannaisia. Peruuttamattomasti. Siis siten, että kun fyysikko on luonnonlain paljastanut, niin ihmiskunta nauttii siitä, nyt ja tulevaisuudessa. Kuitenkin on varsin selvää, että sellainen fysiikan tulos, jonka tuottamiseen on tarvittu modernia kehittynyttä yhteiskuntaa, rapistuisi, mikäli ympäristö romahtaisi siten, että tuloksen verifiointi ei enää onnistuisi.

Otan aivan pikkuruisen esimerkin, kuitenkin matematiikan piiristä; sanottakoon tätä vaikka oikean piin kasvattamiseksi. Meidän nykyisen kulttuurimme puitteissa on aivan ymmärrettävä ajatus arvottaa sellainen kulttuuri korkealle, jossa π:lle tunnettiin monta oikeaa desimaalia.

Nopeakin tutustuminen aiheeseen osoittaa kuitenkin (esim Blatner 1997), että π:n likiarvot eivät ole koko ajan parantuneet. Jopa saman kulttuuriperinteen puitteissa käytettävä arvo on meidän silmissä joskus huonontunut: likiarvo heikentynyt tai muuttunut toiseksi ja tarkaksi ajatelluksi. Varmaan monelle on jollain tasolla tuttu eräs tapahtuma Indianan osavaltiosta noin sadan vuoden takaa: osavaltion parlamentti käsitteli lakiehdotusta, jonka mukaan $\pi = 3$. Näin karkeaan arvoon ei juuri mikään kulttuuri jossa kysymys on dokumentoidusti formuloitu ole tyytynyt.

... nykyisessä yhteiskunnassamme koulutuspolitiikasta ja kulttuurista päättävien henkilöiden piirissä tunnetaan eräänlaista matematiikkakauhua.

Matematiikan kauheudesta

Haluan ottaa tämän aiheen esille ihan yksinkertaisesti siksi, että olen aivan varma, että meidän nykyisessä yhteiskunnassamme koulutuspolitiikasta ja kulttuurista päättävien henkilöiden piirissä tunnetaan eräänlaista matematiikkakauhua. Ja että tällä tilanteella on haitallisia vaikutuksia. Tunnetusti matematiikkaan kouluissa käytetään meillä vähemmän aikaa kuin missään muussa meihin rinnastettavissa olevassa yhteiskunnassa.

Vaan katsotaan kuitenkin ensin itse peiliin. Onko matemaatikkojen omassa toiminnassa ollut piirteitä, jotka ovat saattaneet aiheuttaa tällaisia tuntemuksia. Ns. uusi matematiikka otettiin meillä kouluissa käyttöön varsin brutaalissa muodossa. Lasten piti piirtää lampaiden ympärille joukkoviivoja. Vasta ympäröivän viivan valmistuttua lampaat muodostivat joukon. Tietenkään matemaatikot tiedeyhteisönä eivät tätä halunneet, mutta samassa yhteiskunnassa koulu-uudistajien kanssa kuitenkin elelivät.

Kasvatustieteilijät toivat ihan ulkomailta asti tutkimustuloksia. Oli tutkittu pitääkö paikkansa, että aksiomaattinen geometria opettaa loogista ajattelua. Tutkimuksissa ei löydetty merkittävää eroa koululaisten loogisessa päät-

$$e^{i\pi}+1=0$$

telytaidossa. Päädyttiin ehdottamaan, että pudotetaan geometria pois, ja se siis pudotettiin.

Myöhemmin sitä on tuotu kouluihin takaisin, mutta lähinnä analyyttisen geometrian ja vektorialgebran osalta. Niinpä nykyajan ylioppilaalle suoran ja tason kohtisuoruus on helppo tai vaikea asia riippuen siitä onko taso annetussa koordinaatistossa helposti esitettävissä vai ei. Sehän täytyy nimittäin ensin laskea.

Nämä uudistukset 60- ja 70-luvun matemaatikkoyhteisö salli.

Mikä aksiomaattisessa geometriassa sitten oli niin tärkeätä? Ilman muuta tärkein asia oli se, että se oli osa eurooppalaista kulttuuria, sitä yhteistä perinnettä, jolla me yhteistä maailmaamme hahmotamme. Että kun täällä ja Pariisissa havaitaan *A* niin samalla tavalla ajatellaan *B*.

Nyt kammottavampiin asioihin. Mistä minä ensinnäkin tiedän että tällaista kammoa esiintyy. Minulla on matematiikan professorina jo yli kaksi vuosikymmentä takana. Erilaisia tiedeyhteisön ja kulttuurielämän illanistujaisia on tuohon mahtunut lukuisia. Kauhu tulee esiin kun on istuuduttu pöytään, ja naapuri on kysynyt mitä teen siviilissä. "Mä en koulussa tajunnu matikasta mitään" tms. Sen varmistamiseksi tietysti, ettei joudu kokeeseen. Meillä tämä on sosiaalisesti aivan hyväksyttävää käyttäytymistä. Siis se, että teeskennellään että ihmiset jakautuisivat kahtia, niihin jotka tajuuvat matikasta jotain ja niihin jotka eivät tajuu mitään eikä niitten tarvikaan.

Sama kokemus on ollut muillakin. Esimerkiksi Helmut Hasse kirjoittaa muutenkin mainiossa kirjassaan (Hasse 1952), että ... muss ich nur allzuoft die Antwort hören: "Ach, Mathematiker! Davon verstehe ich so gut wie gar nichts!" oder auch: "Dafür bin ich völlig unbegabt."

Sen sijaan, kun esimerkiksi eräissä säätiöissä olen työskennellyt humanistien ja taiteilijoiden kanssa pitempään yhdessä, mitään tällaista en myönnä havaitsevani. Kyseessä on siis eräänlainen sallittu pinnallinen reaktio, joka otetaan käyttöön yllättävissä tilanteissa. Ennakoitavassa tilanteessa rationaalinen käytös voittaa.

Jostain minulle käsittämättömästä syystä tällaiset sosiaaliset konstruktiot esiintyvät Suomessa hyvin voimakkaina, mustavalkoisina ja totisesti. Muutoksen mahdollisuus tässä kuitenkin itää: kun meillä tällainen konstruktio sitten romahtaa, niin uuteen asentoon siirrytään myös yhdessä ja totisina.

Tiivistän tämän aiheiston siten, että oikeastaan minusta puhe kolmannesta kulttuurista yms. on vähän turhan fiiniä. Ensinnäkin, matematiikka ja fysiikka jne. ovat keskeinen osa kulttuuriamme. Toiseksi, yhteisen hahmottamisen välineet puuttuvat valitettavasti varsin alkeellisella tasolla. Osalta nimittäin

Matematiikassa moni asia on kaunista.

jää jo yläasteen oppimäärä ymmärtämättä ja oppimatta. Ja silti myöhemmällä iällä osallistutaan niin koulutus- kuin kulttuuripolitiikkaankin.

Matemaattisesta kauneudesta

Werner Aspenström kirjoitti 1981 Saarikoskelle (Aspenström 1985):

> Selailin läpi paksun opuksen malminlouhinnasta että miten nostolaitteissa käytettiin apuna vintturelta ja muita vempeleitä, jotka puolestaan toimivat käsi-, hevos- tai vesivoimalla. Monia näistä työvaiheista nimitettiin "taiteiksi"! Taide oli tuolloin, 1500–1600-luvuilla pikemminkin malminlouhintaan liittyvä tekninen ammattitermi kuin esteettinen termi, jokainen kone jolla malmia kiskottiin ylös kaivoksesta oli taideteos se oli articum. Niin kai saksankielessäkin. Taiteilijoita olivat ne jotka hallitsivat kaivosten mekaanisten merkillisyyksien toimintaperiaatteet.

Hieman myöhemmin Aspenström esittää jo yhteenvedon, yhtälön kompaktilla kielellä:

> *Kaivos ja taiteet + historialliset edellytykset ja muutokset = makkara ja taide*

Olkoon tuo esimerkkinä inversiotehtävästä: yritä selvittää mitä tuo mahtaa tarkoittaa. Suomessa on aika hyvinkehittynyt inversiotehtäviin pureutunut yhteisö, joka on jo tuottanut esimerkiksi yhden maukkaan keittokirjan (Päivärinta & Somersalo 1999).

Matematiikassa moni asia on kaunista. Pienessä muodossa kauniiksi on sanottu esimerkiksi kaavaa

$$e^{i\pi}+1=0.$$

Kyllä eksponenttifunktion (ja sen käänteisfunktion, logaritmin) tulisi kuulua yleissivistykseen. Kari Enqvist (2000) tuntuu pitävän logaritmien erottamista osittaisderivaatoista ja Maxwellin yhtälöiden ratkaisemisen hallintaa jollakin tasolla rinnasteisina asioina. Todettakoon siis, että Maxwellin yhtälöiden ratkaisemisesta tehdään edelleen uutta tiedettä mutta logaritmien ja osittaisderivaattojen toisistaan erottamisesta ei.

Eksponenttifunktiosta kertoo seuraavakin esimerkkini. Lee A. Rubel kirjoittaa (postuumisti, 1996):

> Mathematics is a beautiful subject, and entire functions is its most beautiful branch. For example, my favorite theorem in all of mathematics is a theorem of R. Nevanlinna that two functions, meromorphic in the whole complex plane, that share five values must be identical.

Olen kirjoittanut tästä ja omasta suhteestani arvonjakautumisteoriaan muualla pitempään (Nevanlinna 1998).

Onko tuo jo sellaista, että sen ei tarvitse kuulua hyvin koulutetun, sanokaamme tuntikehyksiä miettivän virkamiehen sivistyskäsityksen piiriin. Ehkäpä. Mutta varsin pienillä sivistysopinnoilla tuokin tulisi sen verran valaistua, että sen kauneus näkyisi.

Moni on pitänyt kauneutta suorastaan eräänlaisena matemaattisen tuloksen kriteerinä. G.H. Hardyn mukaan: "There is no permanent place for ugly mathematics." Hardy myös uskoi Ramanujanin kaavoihin, koska ei ke-

Moni on pitänyt kauneutta suorastaan eräänlaisena matemaattisen tuloksen kriteerinä.

Matemaatikon on turha haaveilla kauniista tuloksista ilman että on sisua ja tarmoa kohdata rumaa, tikkuista vääntämistä.

nenkään mielikuvitus riittäisi tuottamaan mitään sellaista elleivät ne olisi tosia. (Kts. Hardy 1969, Blatner 1997).

Kaunista tulosta voi suorastaan etsiä. Annettujen pelisääntöjen puitteissa ja tunnettujen faktojen ympäristöstä voi yrittää etsiä kauniisti muotoutuvia lauseita. Ja silloin kun uusi tulos löytyy eli tuotetaan tällä tavalla, niin se tuntuu erikoisen tyydyttävältä. Huomaa, että yritän välttää antamasta sitä mielikuvaa, että matemaatikko vertailisi jo valmiiksi riippuvia narunpätkiä toisiinsa, läheskäisistä kauniimpaan tarttuen. Pikemminkin hän siis punoo uuden ja kauniin ja laittaa sen näytille.

Matemaattinen todistus on usein kaunis, varsinkin jos se on ekonominen. Euklidisessa geometriassa näitä oli paljon, mutta olkoon esimerkkini $\sqrt{2}$:n irrationaalisuus. Epäsuorat päättelyt ovat usein hyvin lyhyitä ja kauniita.

Oletamme, todistaaksemme päinvastaisen, että $\sqrt{2}$ on rationaalinen (eli esitettävissä kahden kokonaisluvun suhteena).

Mutta silloin on olemassa pienin positiivinen kokonaisluku n siten, että $n\sqrt{2}$ on kokonaisluku. Kuitenkin, jos merkitsemme $m = n\sqrt{2} - n$ niin ensinnäkin tämä on positiivinen kokonaisluku, $m < n$, ja pätee

$$m\sqrt{2} = (n\sqrt{2} - n)\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2} = n - m$$

joka on itsessään kokonaisluku. Siis n ei ollutkaan pienin. Koska päättely sinänsä on tehty oikein, täytyi alkuperäisen oletuksen olla väärä.

Tämän suhde yleissivistykseen on mielestäni selvä. Tuon konstruointi tai ulkomuistista rekonstruointi ei kuulu yleissivistykseen, mutta sen sijaan tuon päättelyn ymmärtäminen, selitettynä ajan kanssa, kyllä kuuluu. Huomaa, että keskustelimme objektista n jota ei ole olemassa. Se, että hyväksymme epäsuorat päättelyt, on hyvin syvällä länsimaisessa kulttuurissa.

Nuo edellä olleet kauneuden esimerkit ovat luonteeltaan pienimuotoisia. Mieleen tulee ehkä suppeat runot. Vaan mitä olisi sinfoninen kauneus? Mitä se olisi matematiikassa?

Sinfonian kauneus rakentuu tietysti usealle tekijälle, kokonaismuodon jäntevään hallintaan, erityyppisten rakenteiden asettamiseen vastatusten, jännitteiden purkautumiseen jne.

Matematiikan syvällisyydellä tarkoitetaan usein sitä, että kaukaa erilaisista lähtökohdista johdetut rakenteet (ja minusta ne pikemminkin nousevat korkeuksiin kuin tunkeutuvat syvälle maahan...) kohtaavat ja sopivat yhteen, täydentävät toisiaan, tuottavat uutta ja yllättävää. Nyt sanon että tuollaisissa tilanteissa on sinfonista kauneutta. Tiedän että tämä on arroganttia, mutta ei sille mitään voi, ettei tätä taidetta voi vähällä opiskelulla kokea, saatikka luoda.

Tämä teksti pohjautuu äskettäin pitämääni esitelmään ja kun tarjosin kauhua ja kauneutta otsakkeeksi kyseisen tilaisuuden järjestäjälle tämä luetteli ulkomuistista Duinon ensimmäisestä elegiasta pätkän:

Ei, mitä kaunis on muuta kuin kauhean alku...

Itse ajattelin, sen lisäksi että kauheus liittyy tuohon sosiaaliseen tilanteeseen jonka jo kohtasimme, niin myös matematiikan rumuuteen, seuraavasti. Matemaatikon on turha haaveilla kauniista tuloksista ilman että on sisua ja tarmoa kohdata rumaa, tikkuista vääntämistä. Pelkät kaunosielut eivät pärjää, kuten Nietsche taiteen yhteydessä opetti. (Katso vaikka kirjaa kauneudesta ja kuvotuksesta, Ihanus 1987).

Epälineaarisuus

Olen peruskoulutukseltani diplomi-insinööri ja meille lineaarisuus liittyi esimerkiksi Hooken lakiin. Arvo Ylinen opetti Kimmo- ja lujuusopissa (1948), että sauvan pituussuunnassa syntyvä venymä ε on verrannollinen sauvassa syntyvään vetojännitykseen Σ sitä suuremmalla tarkkuudella, mitä pienempi jännitys on. Näiden välinen riippuvuussuhde ilmaistaan muodossa

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$

missä oleva vakio E on aineesta riippuva kimmokerroin. R. Hooke esitti lain vuonna 1660. Tällaisen lain yhteydessä on helppo ymmärtää että laki pätee vain pienille muutoksille – suurissa jännitystiloissa aine käyttäytyy eri lailla, lopulta murtuen. On hyvä huomata, että yleisemminkin murtuminen, romahtaminen, sortuminen, luhistuminen, katkeaminen yms. ilmiöt eivät voi esiintyä lineaarisen mallin kuvaamassa systeemissä.

Lineaarisuus-sanaa käytetään nykyisin paljon sen itsensä negaation negaationa: siis sellaisena jota epälineaarisuus ei ole. Valitettavasti.

Epälineaarinen tapahtuma voisi olla vaikkapa oven aukaiseminen:

tartut ovenkahvaan
käännät sitä ja
työnnät
menet ovesta sisään
tulet uuteen tilaan
ja ehkä suljet oven takanasi.

Tämä on epälineaariselle tapahtumalle varsin tyypillistä: että siinä on erillisiä osia, joita erikseen voi yrittää kuvata lähes lineaarisella tavalla.

Yleensä epälineaarisuudella nykyisin kuitenkin tarkoitetaan jotain ennakoimatonta, kaoottista tms. Systeemin tila on pienissä muutoksissa usein linearisoitavissa, mutta kun tilasuureet kasvavat tulevat korkeammat termit ja takaisinkytkennät merkitseviksi ja käytös muuttuu. Muodikkaat uutuudet tässä liittyvät systeemin herkkyyteen alkuarvojen suhteen (ns. perhosefekti) ja toisaalta mahdollisuudessa nähdä näennäisen holtittoman käyttäytymisen sisältävän kuitenkin säännöllisyyttä.

Yhden tällaisen ilmiön historiaan littyy suomalainen. P. J. Myrberg nimittäin havaitsi ns. jakson kahdentumisessa säännöllisyyttä, joka tuli kuitenkin laajemmin tunnetuksi vasta kun fyysikot havaitsivat ilmiön uudelleen.

Lineaarisuus esiintyy myös "juutalais-kristillisen" aikakäsityksen yhteydessä, lähinnä jaksollisuutta korostavan, luontoa seuraavan aikakäsityksen käsiteparina. Onko sillä mitä epälineaarisuudella tarkoitetaan paljoakaan väliä? Miksi matemaatikoilla olisi joku muita suurempi oikeus sanoa mitä sillä tarkoitetaan?

Tieteessä on aivan keskeistä että tulokset ovat kommunikoitavissa ja haluttaessa toistettavissa. Kielen tulee olla yhteistä ja koska epälineaarinen tarkoittaa sellaista joka ei ole lineaarinen, niin havaitsemme arveluttavaksi liittää siihen tätä tarkempia sisältöjä. Ne ovat alttiina alussa esittämäni *valta = power = teho* -tyyppisille erehdyksille.

Lopetan Aspenströmin sanoin:

Kysymys
Täytyykö sen joka istuu junassa
ajatella raiteita pitkin?

Kirjallisuutta

Aspenström, Werner (1985) Hamletin olisi pitänyt kuolla ensimmäisessä näytöksessä, suom. P. Saarikoski, Otava, 1985

Blatner, David (1997) The Joy of Pi, Walker and Co.

Enqvist, Kari (2000) Onko kolmas kulttuuri olemassa?, Tieteessä tapahtuu, 2000/2.

Hardy, G.H. (1969, alkup. 1948) A Mathematician's Apology (with a foreword by C.P. Snow) Cambridge University Press.

Hasse, Helmut (1952) Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht, Verlag für angewandte Wissenschaften, Wiesbaden.

Ihanus, Juhani (1987) Kauneus ja kuvotus, Gaudeamus.

Myrberg, P.J. (1963) Iteration der reellen Polynome zweiten Grades. III. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A I. 336/3.

Nevanlinna, Olavi (1998) Juhlien jälkeen, Arkhimedes, 3/1998, 12–19.

Päivärinta, Lassi & Somersalo, Erkki (1999) Epälineaarinen keittokirja, Tammi.

Rilke, Rainer Maria (1974) Duinon Elegiat, WSOY.

Rubel, Lee A. (1996) Entire and meromorphic functions, Springer. .

Ylinen, Arvo (1948) Kimmo- ja lujuusoppi, WSOY.