TOOLS
Merkintöjä ja Algebrallisia rakenteita

Tapani Matala-aho

MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO

2020

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, GOOGOL^{10}, \ldots\} = \{\text{ei-negatiiviset kokonaisluvut}\}.$$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, GOOGOL^{10}, \ldots\} = \{\text{ei-negatiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{\text{alkuluvut}\}.$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, GOOGOL^{10}, \ldots\} = \{\text{ei-negatiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{\text{alkuluvut}\}.$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\text{kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, GOOGOL^{10}, \ldots\} = \{\text{ei-negatiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{\text{alkuluvut}\}.$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\text{kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \backslash \{0\} = \{\text{positiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, GOOGOL^{10}, \ldots\} = \{\text{ei-negatiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{\text{alkuluvut}\}.$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\text{kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{\text{positiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots\} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{\text{negatiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, GOOGOL^{10}, \ldots\} = \{\text{ei-negatiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\} = \{\text{alkuluvut}\}.$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\text{kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{\text{positiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots\} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{\text{negatiiviset kokonaisluvut}\}.$

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+\} = \{\text{rationaaliluvut}\}.$

$$\mathbb{R} = \{x \mid x = \sum_{k=l}^{\infty} a_k 10^{-k},\ l \in \mathbb{Z};\ a_k \in \{0, \ldots, 9\}\} = \{\text{reaaliluvut}\}.$$

$\mathbb{R} = \{x \mid x = \sum_{k=l}^{\infty} a_k 10^{-k},\ l \in \mathbb{Z};\ a_k \in \{0, \ldots, 9\}\} = \{\text{reaaliluvut }\}.$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \{a + ib |\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} = \{\text{ kompleksiluvut}\}$

$\mathbb{R} = \{x \mid x = \sum_{k=l}^{\infty} a_k 10^{-k},\ l \in \mathbb{Z};\ a_k \in \{0, \ldots, 9\}\} = \{\text{reaaliluvut }\}.$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \{a + ib|\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} = \{\text{ kompleksiluvut}\}$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{ Irrationaaliluvut }\}.$

$\mathbb{R} = \{x \mid x = \sum_{k=l}^{\infty} a_k 10^{-k},\ l \in \mathbb{Z};\ a_k \in \{0, \ldots, 9\}\} = \{\text{reaaliluvut}\}.$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} = \{\text{kompleksiluvut}\}$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{Irrationaaliluvut}\}.$

$\mathbb{Z}_{\geq m} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq m\}.$

$\mathbb{R} = \{x \mid x = \sum_{k=l}^{\infty} a_k 10^{-k},\ l \in \mathbb{Z};\ a_k \in \{0, \ldots, 9\}\} = \{\text{reaaliluvut }\}.$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \{a + ib|\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} = \{\text{ kompleksiluvut}\}$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{ Irrationaaliluvut }\}.$

$\mathbb{Z}_{\geq m} = \{k \in \mathbb{Z}|\ k \geq m\}.$

$\mathbb{R}_{\leq 0} = \{r \in \mathbb{R}|\ r \leq 0\}, \ldots$

$\mathbb{R} = \{x \mid x = \sum_{k=l}^{\infty} a_k 10^{-k},\ l \in \mathbb{Z};\ a_k \in \{0, \ldots, 9\}\} = \{\text{reaaliluvut }\}.$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \{a + ib |\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} = \{\text{ kompleksiluvut}\}$

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{ Irrationaaliluvut }\}.$

$\mathbb{Z}_{\geq m} = \{k \in \mathbb{Z} |\ k \geq m\}.$

$\mathbb{R}_{\leq 0} = \{r \in \mathbb{R} |\ r \leq 0\}, \ldots$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\},$

$\exists! \quad \Leftrightarrow \exists$ täsmälleen yksi.

$\exists! \quad \Leftrightarrow \exists$ täsmälleen yksi.

$\#A = |A| =$ Joukon A alkioiden lukumäärä.

$\exists! \quad \Leftrightarrow \exists$ täsmälleen yksi.

$\#A = |A| =$ Joukon A alkioiden lukumäärä.

Olkoon $A = \{a_1, ..., a_m\}$, tällöin

$$\sum_{a \in A} f(a) = f(a_1) + ... + f(a_m),$$

$$\prod_{a \in A} f(a) = f(a_1) \cdots f(a_m).$$

Jos $A = \emptyset$, niin

$$\sum_{a \in A} f(a) = 0, \quad \prod_{a \in A} f(a) = 1$$

(tyhjä summa ja tulo).

Olkoon K joukko, jossa on ainakin kaksi alkiota/Let K be a set with at least two elements. Oletetaan, että joukossa K on määritelty laskutoimitus $+$ eli kuvaus/ Suppose that there is dedined a binary-operation or a mapping $+$ in the set K:

$$+ : K \times K \to K, \quad (a, b) \to a + b,$$

missä/where $a + b \in K$, aina kun/whenever $a \in K$ ja $b \in K$ sekä

Olkoon K joukko, jossa on ainakin kaksi alkiota/Let K be a set with at least two elements. Oletetaan, että joukossa K on määritelty laskutoimitus $+$ eli kuvaus/ Suppose that there is dedined a binary-operation or a mapping $+$ in the set K:

$$+ : K \times K \to K, \quad (a, b) \to a + b,$$

missä/where $a + b \in K$, aina kun/whenever $a \in K$ ja $b \in K$ sekä

laskutoimitus $*$ eli kuvaus

$$* : K \times K \to K, \quad (a, b) \to a * b,$$

missä $a * b \in K$, aina kun $a \in K$ ja $b \in K$.

Laskutoimitus=binäärioperaatio.

Esimerkki 1

Olkoon $K = \mathbb{R}$ *ja* $*$ *tavallinen kertolasku/usual multiplication. Nyt*

$$*: \ (-2, 3.14) \to (-2) * 3.14 = -6.28.$$

Määritelmä 1

Kolmikko $(K, +, *)$ on kunta/field, jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomit eli ehdot/binary operations satisfy the following axioms:

Määritelmä 1

Kolmikko $(K, +, *)$ on kunta/field, jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomit eli ehdot/binary operations satisfy the following axioms:

1. Yhteenlaskun aksiomit/axioms of addition:

Määritelmä 1

Kolmikko $(K, +, *)$ on kunta/field, jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomit eli ehdot/binary operations satisfy the following axioms:

1. Yhteenlaskun aksiomit/axioms of addition:

(a) $a + (b + c) = (a + b) + c$ kaikilla/for all $a, b, c \in K$ (liitännäisyys/associativity).

Määritelmä 1

Kolmikko $(K, +, *)$ on kunta/field, jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomit eli ehdot/binary operations satisfy the following axioms:

1. Yhteenlaskun aksiomit/axioms of addition:

(a) $a + (b + c) = (a + b) + c$ kaikilla/for all $a, b, c \in K$ (liitännäisyys/associativity).

(b) $a + b = b + a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus/commutativity).

Määritelmä 1

Kolmikko $(K, +, *)$ on kunta/field, jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomit eli ehdot/binary operations satisfy the following axioms:

1. Yhteenlaskun aksiomit/axioms of addition:

(a) $a + (b + c) = (a + b) + c$ kaikilla/for all $a, b, c \in K$ (liitännäisyys/associativity).

(b) $a + b = b + a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus/commutativity).

(c) On olemassa nolla-alkio/there exists a zero-element $0 \in K$, jolle $0 + a = a$ kaikilla $a \in K$.

Määritelmä 1

Kolmikko $(K, +, *)$ on kunta/field, jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomit eli ehdot/binary operations satisfy the following axioms:

1. Yhteenlaskun aksiomit/axioms of addition:

(a) $a + (b + c) = (a + b) + c$ kaikilla/for all $a, b, c \in K$ (liitännäisyys/associativity).

(b) $a + b = b + a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus/commutativity).

(c) On olemassa nolla-alkio/there exists a zero-element $0 \in K$, jolle $0 + a = a$ kaikilla $a \in K$.

(d) Kaikilla $a \in K$ on olemassa vasta-alkio/inverse $-a \in K$, jolle $a + (-a) = 0$.

2. Kertolaskun aksiomit:

2. Kertolaskun aksiomit:

(a) $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in K$ (liitännäisyys).

2. Kertolaskun aksiomit:

(a) $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in K$ (liitännäisyys).

(b) $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus).

2. Kertolaskun aksiomit:

(a) $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in K$ (liitännäisyys).

(b) $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus).

(c) On olemassa ykkösalkio/unit element $1 \in K$, jolle $1 * a = a$ kaikilla $a \in K$.

2. Kertolaskun aksiomit:

(a) $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in K$ (liitännäisyys).

(b) $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus).

(c) On olemassa ykkösalkio/unit element $1 \in K$, jolle
$1 * a = a$ kaikilla $a \in K$.

(d) Kaikilla $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ on olemassa käänteisalkio/inverse
$a^{-1} \in K^*$, jolle
$a * a^{-1} = 1$.

2. Kertolaskun aksiomit:

(a) $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in K$ (liitännäisyys).

(b) $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus).

(c) On olemassa ykkösalkio/unit element $1 \in K$, jolle
$1 * a = a$ kaikilla $a \in K$.

(d) Kaikilla $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ on olemassa käänteisalkio/inverse
$a^{-1} \in K^*$, jolle
$a * a^{-1} = 1$.

3. Osittelulaki/distribution law:

2. Kertolaskun aksiomit:

(a) $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in K$ (liitännäisyys).

(b) $a * b = b * a$ kaikilla $a, b \in K$ (vaihdannaisuus).

(c) On olemassa ykkösalkio/unit element $1 \in K$, jolle
$1 * a = a$ kaikilla $a \in K$.

(d) Kaikilla $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ on olemassa käänteisalkio/inverse
$a^{-1} \in K^*$, jolle
$a * a^{-1} = 1$.

3. Osittelulaki/distribution law:

(a) $a * (b + c) = a * b + a * c$ kaikilla $a, b, c \in K$.

Määritelmän 1 mukaista joukkoa K kutsutaan kunnaksi/ The set compatible with the definition is called a field

Määritelmän 1 mukaista joukkoa K kutsutaan kunnaksi/ The set compatible with the definition is called a field
ja annettuja ehtoja sanotaan kunta-aksiomeiksi/and the given conditions are called field-axioms.

Määritelmän 1 mukaista joukkoa K kutsutaan kunnaksi/ The set compatible with the definition is called a field
ja annettuja ehtoja sanotaan kunta-aksiomeiksi/and the given conditions are called field-axioms.

Aksiomit 1a–d sanovat, että $(K,+)$ on Abelin ryhmä/Abelian group, jonka laskutoimitusta $+$ kutsutaan yhteenlaskuksi/addition.

Määritelmän 1 mukaista joukkoa K kutsutaan kunnaksi/ The set compatible with the definition is called a field
ja annettuja ehtoja sanotaan kunta-aksiomeiksi/and the given conditions are called field-axioms.

Aksiomit 1a–d sanovat, että $(K, +)$ on Abelin ryhmä/Abelian group, jonka laskutoimitusta $+$ kutsutaan yhteenlaskuksi/addition.
Voidaankin sanoa, että $(K, +)$ on kunnan K yhteenlaskuryhmä/addition group of the field, jonka neutraalialkio/ neutral element on nolla-alkio 0.

Määritelmän 1 mukaista joukkoa K kutsutaan kunnaksi/ The set compatible with the definition is called a field
ja annettuja ehtoja sanotaan kunta-aksiomeiksi/and the given conditions are called field-axioms.

Aksiomit 1a–d sanovat, että $(K,+)$ on Abelin ryhmä/Abelian group, jonka laskutoimitusta $+$ kutsutaan yhteenlaskuksi/addition.
Voidaankin sanoa, että $(K,+)$ on kunnan K yhteenlaskuryhmä/addition group of the field, jonka neutraalialkio/ neutral element on nolla-alkio 0.

Edelleen, aksiomit 2a–d sanovat, että $(K^*,*)$ on Abelin ryhmä, jonka laskutoimitusta $*$ kutsutaan kertolaskuksi/ multiplication.

Määritelmän 1 mukaista joukkoa K kutsutaan kunnaksi/ The set compatible with the definition is called a field
ja annettuja ehtoja sanotaan kunta-aksiomeiksi/and the given conditions are called field-axioms.

Aksiomit 1a–d sanovat, että $(K, +)$ on Abelin ryhmä/Abelian group, jonka laskutoimitusta $+$ kutsutaan yhteenlaskuksi/addition.
Voidaankin sanoa, että $(K, +)$ on kunnan K yhteenlaskuryhmä/addition group of the field, jonka neutraalialkio/ neutral element on nolla-alkio 0.

Edelleen, aksiomit 2a–d sanovat, että $(K^*, *)$ on Abelin ryhmä, jonka laskutoimitusta $*$ kutsutaan kertolaskuksi/ multiplication.
Sanotaan siis, että $(K^*, *)$ on kunnan K kertolaskuryhmä/multiplication group, jonka neutraalialkio on ykkös-alkio 1.

Merkintä 1

Yleensä kertolasku $*$ jätetään merkitsemättä eli tehdään samaistus:

$$a * b = ab.$$

Erikoistapauksia/special cases:

Esimerkki 2

Reaalilukujen kunta/the field of real numbers $\mathbb{R}$.

Huomautus 1

Identiteetin

$$a = b$$

molemmille puolin saa lisätä saman alkion c*/you may add the same element to the both sides of the identity relation, jolloin*

$$a + c = b + c.$$

Huomautus 2

Identiteetin

$$a = b$$

molemmat puolet saa kertoa samalla alkiolla c*, jolloin*

$$ca = cb.$$

Esimerkki 3

Kompleksilukujen kunta/The field of complex numbers

$$\mathbb{C} := \{a + ib |\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$$

Luvun $z = a + ib$ kompleksikonjugaatti on luku $\bar{z} = a - ib$ ja pituus/lenght $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}, \quad z\bar{z} = |z|^2. \tag{1}$$

$$\bar{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

$$a = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{3}$$

$$|z + \bar{z}| \le 2|z|, \quad |z - \bar{z}| \le 2|z|. \tag{4}$$

$$z + \bar{z} \le 2|z|. \tag{5}$$

Kvaterniot/Quaternions

Määritelmä 2

Kvaternioitten joukko

$$\mathbb{H} := \{a+bi+cj+dk \mid i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j;\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Hamilton 1843

Kvaterniot/Quaternions

Määritelmä 3

Kvaternioille asetetaan laskusäännöt

(a) $(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$
$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$
aina, kun $a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 \in \mathbb{H}$;

(b) $a * (b * c) = (a * b) * c$ kaikilla $a, b, c \in \mathbb{H}$;

(c) $a * (b + c) = a * b + a * c$ kaikilla $a, b, c \in \mathbb{H}$;

(d) $(a + b) * c = a * c + b * c$ kaikilla $a, b, c \in \mathbb{H}$.

(e) $ai = ia,\ aj = ja,\ ak = ka$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

Kvaterniot/Quaternions

Nyt määrittelyrelaatioista $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$, seuraa mm.

$$ji = -k, \; kj = -i, \; ik = -j. \tag{6}$$

Siten kvaternioitten kertolasku ei ole kommutatiivinen!! Edelleen $\mathbb{H}$ EI ole kunta.

Esimerkki 4

$$(2+3j)(5+k) = 2 \cdot 5 + 2k + (3j)5 + (3j)k = 10 + 2k + 15j + i. \tag{7}$$

Kurssilta Johdatus matemaattiseen päättelyyn löytyy peruskäsitteet, kuten injektio, surjektio ja bijektio.

Kurssilta Johdatus matemaattiseen päättelyyn löytyy peruskäsitteet, kuten injektio, surjektio ja bijektio.

Kuvaus $f : A \to B$ on

Kurssilta Johdatus matemaattiseen päättelyyn löytyy peruskäsitteet, kuten injektio, surjektio ja bijektio.

Kuvaus $f : A \to B$ on

INJEKTIO: $f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2;$

Kurssilta Johdatus matemaattiseen päättelyyn löytyy peruskäsitteet, kuten injektio, surjektio ja bijektio.

Kuvaus $f : A \to B$ on

INJEKTIO: $f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2$;

SURJEKTIO: $f(A) = B$;

Kurssilta Johdatus matemaattiseen päättelyyn löytyy peruskäsitteet, kuten injektio, surjektio ja bijektio.

Kuvaus $f : A \to B$ on

INJEKTIO: $f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2$;

SURJEKTIO: $f(A) = B$;

BIJEKTIO=INJEKTIO+SURJEKTIO.

Lemma 1

Olkoon

$$\#A = \#B < \infty$$

ja

$$f : A \to B$$

injektio.

Lemma 1

Olkoon

$$\#A = \#B < \infty$$

ja

$$f : A \to B$$

injektio.

Tällöin $f : A \to B$ *on bijektio.*