

802320A LINEAARIALGEBRA

OSA III

Tapani Matala-aho

MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO

KEVÄT 2020

Määritelmä 1

Olkoot V ja W lineaariavaruuksia kunnan K yli. Kuvaus

$$L : V \rightarrow W$$

on lineaarinen, jos

Määritelmä 1

Olkoot V ja W lineaariavaruuksia kunnan K yli. Kuvaus

$$L : V \rightarrow W$$

on lineaarinen, jos

(a) $L(v + w) = L(v) + L(w);$

Määritelmä 1

Olkoot V ja W lineaariavaruuksia kunnan K yli. Kuvaus

$$L : V \rightarrow W$$

on lineaarinen, jos

(a) $L(v + w) = L(v) + L(w)$;

(b) $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

Määritelmä 1

Olkoot V ja W lineaariavaruuksia kunnan K yli. Kuvaus

$$L : V \rightarrow W$$

on lineaarinen, jos

(a) $L(v + w) = L(v) + L(w)$;

(b) $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

aina, kun $v, w \in V$ ja $\lambda \in K$.

Termejä: Lineaarikuvaus, Lineaarinen kuvaus, Linear mapping.

Huomautus 1

Lineaari kuvauksen argumentin ympäriltä jätetään usein sulut pois eli voidaan käyttää merkintää/we can use the shorthand notation

$$Lv := L(v).$$

Lemma 1

Olkoot V ja W lineaariavaruuksia kunnan K yli. Kuvaus

$$L : V \rightarrow W$$

on lineaarinen joss/if and only if

Huomautus 1

Lineaari kuvauksen argumentin ympäriltä jätetään usein sulut pois eli voidaan käyttää merkintää/we can use the shorthand notation

$$Lv := L(v).$$

Lemma 1

Olkoot V ja W lineaariavaruuksia kunnan K yli. Kuvaus

$$L : V \rightarrow W$$

on lineaarinen joss/if and only if

$$L(\alpha v + \beta w) = \alpha Lv + \beta Lw \tag{1}$$

aina, kun $v, w \in V$ ja $\alpha, \beta \in K$.

Merkintä 1

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia.

Identtinen kuvaus/Identity mapping

$$Id : V \rightarrow V, \quad Id(v) = v \quad \forall v \in V.$$

Nollakuvaus/zero-mapping (nollafunktio)

$$0 : V \rightarrow W, \quad 0(v) = \bar{0} \quad \forall v \in V.$$

Merkintä 1

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia.

Identtinen kuvaus/Identity mapping

$$\text{Id} : V \rightarrow V, \quad \text{Id}(v) = v \quad \forall v \in V.$$

Nollakuvaus/zero-mapping (nollafunktio)

$$0 : V \rightarrow W, \quad 0(v) = \bar{0} \quad \forall v \in V.$$

Esimerkki 1

Identtinen kuvaus ja nollakuvaus ovat lineaarisia kuvauksia.

Esimerkki 2

Kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(\bar{x}) = 3 \cdot \bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

on lineaarinen.

Esimerkki 2

Kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(\bar{x}) = 3 \cdot \bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

on lineaarinen.

Nimittäin,

$$L(\bar{x} + \bar{y}) = 3 \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = 3 \cdot \bar{x} + 3 \cdot \bar{y} = L\bar{x} + L\bar{y}; \quad (3)$$

$$L(r \cdot \bar{x}) = 3 \cdot (r \cdot \bar{x}) = r \cdot (3 \cdot \bar{x}) = r \cdot L\bar{x}, \quad (4)$$

aina, kun $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$. □

Esimerkki 3

Kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(\bar{x}) = 3 \cdot \bar{x} + \bar{e}_2, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

El ole lineaarinen.

Esimerkki 3

Kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(\bar{x}) = 3 \cdot \bar{x} + \bar{e}_2, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

El ole lineaarinen.

Nyt

$$V.P. = L(\bar{x} + \bar{y}) = 3 \cdot (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{e}_2 = 3 \cdot \bar{x} + 3 \cdot \bar{y} + \bar{e}_2;$$

$$O.P. = L\bar{x} + L\bar{y} = 3 \cdot \bar{x} + \bar{e}_2 + 3 \cdot \bar{y} + \bar{e}_2 \neq V.P.,$$

kun $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$. □

Tiedetään, että \mathbb{R}^1 on lineaariavaruus kunnan \mathbb{R} yli/ We know that \mathbb{R}^1 is a linear space over the field \mathbb{R} .

Voidaan osoittaa, että myös \mathbb{R} on lineaariavaruus kunnan \mathbb{R} yli/ We can show, that also \mathbb{R} is a linear space over the field \mathbb{R} .

Tällöin voidaan tehdä samaistus $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$./ Then we may make an identification $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.

Esimerkki 4

Kuvaus $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarinen jos ja vain jos on olemassa sellainen/if and only if there exists an $s \in \mathbb{R}$, että

$$L(x) = sx \quad (6)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. " \Rightarrow ": Oletetaan, että L on lineaarinen ja olkoon $L(1) := s$.

Tällöin

$$L(x) = L(x \cdot 1) = xL(1) = xs. \quad \square \quad (7)$$

Esimerkki 4

Kuvaus $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarinen jos ja vain jos on olemassa sellainen/if and only if there exists an $s \in \mathbb{R}$, että

$$L(x) = sx \quad (6)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. " \Rightarrow ": Oletetaan, että L on lineaarinen ja olkoon $L(1) := s$.

Tällöin

$$L(x) = L(x \cdot 1) = xL(1) = xs. \quad \square \quad (7)$$

" \Leftarrow ": Oletetaan, että

$$L(x) = sx. \quad (8)$$

Kotitehtävä: Osoita, että L on lineaarinen.

Merkintä 2

Merkintä

$$M_{h \times k}(K) = \{A \mid A = [a_{ij}], i = 1, \dots, h; j = 1, \dots, k; a_{ij} \in K\}$$

tarkoittaa $h \times k$ -matriisien joukkoa. Siten, jos

$$A \in M_{h \times k}(K),$$

niin matriisissa $A = [a_{ij}]$ on h riviä/rows ja k saraketta/columns ja sen alkiot/elements $a_{ij} \in K$.

Merkintä 3

Tästä lähtien merkintä \bar{x} viittaa pystyvektoriin/ From now on the notation \bar{x} indicates a column vector

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

joka voidaan tarvittaessa tulkita $n \times 1$ -matriisiksi eli/which may be interpreted as an $n \times 1$ -matrix

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Yleisemmin:

Merkintä 4

Olkoon $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ avaruuden V kanta. Koordinaattikuvaus $[\cdot]_v$ kuvaa vektorin v kantaesityksen pystyvektoriksi eli matriisin sarakkeeksi seuraavasti/The coordinate mapping $[\cdot]_v$ maps the base-expansion of the vector v in the following manner

$$[v]_v = \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right]_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_v . \quad (9)$$

Koordinaattikuvaus on lineaarinen bijektio ja siten vektori ja sen koordinaateista muodostettu pystyvektori/sarake voidaan samaistaa.

Esimerkki 5

Olkoon $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ avaruuden \mathbb{R}^3 luonnollinen kanta. Nyt

$$[3e_1 + 2e_2 - e_3]_{E_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{E_3} . \quad (10)$$

Lemma 2

Olkoon $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Määritellään kuvaus

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

asettamalla

$$L_A(\bar{x}) = A\bar{x} \tag{11}$$

kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, missä \bar{x} tulkitaan $n \times 1$ -matriisiksi.

Lemma 2

Olkoon $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Määritellään kuvaus

$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

asettamalla

$$L_A(\bar{x}) = A\bar{x} \tag{11}$$

kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, missä \bar{x} tulkitaan $n \times 1$ -matriisiksi.

Tällöin kuvaus L_A on lineaarinen.

Tarkastellaan aluksi kertolaskua

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \quad (12)$$

Nähdään, että $m \times n$ -matriisilla kertominen todellakin indusoi kuvauksen

$$\begin{aligned} \bar{x} &\rightarrow A\bar{x}; \\ \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Todistus. Osoitetaan, että kuvaus L_A on lineaarinen.

$$L_A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y} = L_A(\bar{x}) + L_A(\bar{y}), \quad (13)$$

ja

$$L_A(r\bar{x}) = A(r\bar{x}) = rA\bar{x} = rL_A(\bar{x}) \quad (14)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$ matriisitulon ominaisuuksien nojalla. \square

Esimerkki 6

Olkoon

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (15)$$

tällöin saadaan lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Todistus. Kohta a.

Lasketaan

$$\begin{aligned} V.P. = L(\bar{x} + \bar{y}) &= L(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \\ &= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O.P. = L(\bar{x}) + L(\bar{y}) &= (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) + (y_1 + y_2, 2y_1 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Havaitaan, että $V.P. = O.P.$

Kohta b. Kotitehtävä.



Esimerkin 6 lineaarikuvausta

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$$

vastaa matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

eli

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Esimerkin 6 lineaarikuvausta

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$$

vastaa matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

eli

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Pisteen $x = (x_1, x_2)$ kuva lineaarikuvauksessa L voidaan siis laskea kertomalla matriisi $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ matriisilla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Lause 1

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kunnan K yli sekä $L : V \rightarrow W$ lineaarinen. Tällöin

$$L(\bar{0}) = \bar{0} \quad (18)$$

ja

$$L\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i L(v_i) \quad (19)$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ ja $v_1, \dots, v_k \in V$.

Lause 2

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kunnan K yli ja

$$T, L : V \rightarrow W$$

lineaarikuvauksia ja S avaruuden V kanta.

Lause 2

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kunnan K yli ja

$$T, L : V \rightarrow W$$

lineaarikuvauksia ja S avaruuden V kanta.

Tällöin $T = L$ jos ja vain jos

Lause 2

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kunnan K yli ja

$$T, L : V \rightarrow W$$

lineaarikuvauksia ja S avaruuden V kanta.

Tällöin $T = L$ jos ja vain jos

$Ts = Ls$ kaikilla $s \in S$.

Muistetaan, että

$$T = L \Leftrightarrow Tv = Lv \quad \forall v \in V. \quad (20)$$

Siten, jos $T = L$, niin $Ts = Ls$ kaikilla $s \in S$.

" \Leftarrow ": Todistetaan tapaus: $\dim V = n < \infty$. Olkoon $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, jolloin $V = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$.

Oletetaan, että $Ts = Ls$ kaikilla $s \in S$. Nyt

$$Tv = T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(s_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(s_i) = L\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i\right) = Lv. \quad \square \quad (21)$$

Lause 3

Olkoot V, W ja U vektoriavaruuksia sekä $L : V \rightarrow W$ ja $S : W \rightarrow U$ lineaarikuvauksia. Tällöin

- (a) yhdistetty kuvaus $S \circ L : V \rightarrow U$ on lineaarinen;*
- (b) jos L on bijektio, niin $L^{-1} : W \rightarrow V$ on lineaarinen.*

Todistus. Kohta b:

Koska $L : V \rightarrow W$ on bijektio, niin $L^{-1} : W \rightarrow V \exists$ ja $LL^{-1} = L^{-1}L = Id$.

Olkoot $w_1, w_2 \in W$, tällöin \exists sellaiset $v_1, v_2 \in V$, että $w_1 = Lv_1$, $w_2 = Lv_2$. Siispä

$$\begin{aligned} L^{-1}(w_1 + w_2) &= L^{-1}(Lv_1 + Lv_2) = L^{-1}L(v_1 + v_2) = \\ &v_1 + v_2 = L^{-1}w_1 + L^{-1}w_2 \end{aligned} \quad (22)$$

ja

$$L^{-1}(\lambda w) = L^{-1}(\lambda Lv) = L^{-1}L(\lambda v) = \lambda v = \lambda L^{-1}w. \quad \square \quad (23)$$

Määritelmä 2

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia sekä $L : V \rightarrow W$ lineaarinen. Kuvauksen L kernel on joukko

$$\text{Ker } L = \{v \in V \mid Lv = \bar{0}\}$$

ja image on joukko

$$\text{Im } L = \{w \in W \mid w = Lv \text{ jollakin } v \in V\}.$$

Määritelmä 2

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia sekä $L : V \rightarrow W$ lineaarinen. Kuvauksen L kernel on joukko

$$\text{Ker } L = \{v \in V \mid Lv = \bar{0}\}$$

ja image on joukko

$$\text{Im } L = \{w \in W \mid w = Lv \text{ jollakin } v \in V\}.$$

Terminologiaa:

Kernel eli ydin eli nollan alkukuva;

Image eli kuvajoukko eli arvojoukko

Esimerkki 7

Lasketaan Esimerkin 6 lineaarikuvauksen $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (24)$$

kernel ja image.

Esimerkki 7

Lasketaan Esimerkin 6 lineaarikuvauksen $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (24)$$

kernel ja image.

Kernel:

$$\bar{x} \in \text{Ker } L \quad \Leftrightarrow \quad L\bar{x} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{x} = \bar{0} \quad (25)$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det A = -3 \neq 0. \quad (26)$$

Siten $\bar{x} = A^{-1}\bar{0} = \bar{0}$, joten

$$\text{Ker } L = \{\bar{0}\}. \quad (27)$$

Image: Valitaan maaliavaruudesta mielivaltainen alkio $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$ ja yritetään hakea sille alkukuva \bar{x} lähtöavaruudesta \mathbb{R}^2 . Asetetaan yhtälö

$$L\bar{x} = \bar{y} \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{x} = \bar{y} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = A^{-1}\bar{y} \quad (28)$$

Siten löydettiin lähtöavaruuden alkio $\bar{x} = A^{-1}\bar{y} \in \mathbb{R}^2$ (\bar{y} :n alkukuva) eli alkio jolle pätee

$$L\bar{x} = \bar{y}. \quad (29)$$

Havaitaan, että

$$\text{Im } L = \mathbb{R}^2. \quad (30)$$

Esimerkki 8

Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x, y + z)$ on lineaarinen. Määrätään sen ydin ja arvojoukko. Nyt

$$(x, y, z) \in \text{Ker } L \quad \Leftrightarrow \quad (31)$$

$$(0, 0) = L(x, y, z) = (x, y + z) \quad \Leftrightarrow \quad (32)$$

$$x = 0, \quad z = -y \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Siis y on vapaa parametri, jolloin

$$\text{Ker } L = \{(0, y, -y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, -1) \rangle; \quad (34)$$

$$\dim \text{Ker } L = 1. \quad (35)$$

Olkoon $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ ja asetetaan

$$L(x, y, z) = (x, y + z) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = b_1 \\ y + z = b_2. \end{cases} \quad (36)$$

Valitsemalla $x = b_1, y = b_2$ ja $z = 0$ saadaan

$$L(b_1, b_2, 0) = (b_1, b_2)$$

eli jokaisella maaliavaruuden \mathbb{R}^2 pisteellä on alkukuva. Arvojoukoksi tulee

$$\text{Im } L = \mathbb{R}^2. \quad (37)$$

Lause 4

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, $V' \subseteq V$ ja $W' \subseteq W$ aliavaruuksia ja $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus.

Lause 4

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, $V' \subseteq V$ ja $W' \subseteq W$ aliavaruuksia ja $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus.

Tällöin

$$L^{-1}(W') \subseteq V \quad \text{ja} \quad L(V') \subseteq W \quad (38)$$

ovat aliavaruuksia.

Lause 4

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, $V' \subseteq V$ ja $W' \subseteq W$ aliavaruuksia ja $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus.

Tällöin

$$L^{-1}(W') \subseteq V \quad \text{ja} \quad L(V') \subseteq W \quad (38)$$

ovat aliavaruuksia. Erityisesti

$$\text{Ker } L \subseteq V \quad \text{ja} \quad \text{Im } L \subseteq W \quad (39)$$

ovat aliavaruuksia ja

Lause 4

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia, $V' \subseteq V$ ja $W' \subseteq W$ aliavaruuksia ja $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus.

Tällöin

$$L^{-1}(W') \subseteq V \quad \text{ja} \quad L(V') \subseteq W \quad (38)$$

ovat aliavaruuksia. Erityisesti

$$\text{Ker } L \subseteq V \quad \text{ja} \quad \text{Im } L \subseteq W \quad (39)$$

ovat aliavaruuksia ja

$$\dim \text{Ker } L \leq \dim V, \quad \dim \text{Im } L \leq \dim W. \quad (40)$$

Todistetaan, että $\text{Ker } L$ on V :n aliavaruus.

AA1. Koska $L(\bar{0}) = \bar{0}$, niin $\bar{0} \in \text{Ker } L$ ja siten $\text{Ker } L \neq \emptyset$. □

AA2. Olkoot $x_1, x_2 \in \text{Ker } L$. Lasketaan

$$L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \quad (41)$$

joten $x_1 + x_2 \in \text{Ker } L$. □

AA3. Olkoot $k \in K$ ja $x \in \text{Ker } L$. Lasketaan

$$L(k \cdot x) = k \cdot Lx = k \cdot \bar{0} = \bar{0}, \quad (42)$$

joten $k \cdot x \in \text{Ker } L$. □

Lause 5

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia sekä $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Tällöin L on injektio jos ja vain jos

$$\text{Ker } L = \{\bar{0}\}.$$

Todistus. " \Rightarrow ": Olkoon L injektio. Valitaan $x \in \text{Ker } L$, tällöin

$$Lx = \bar{0} = L\bar{0}.$$

Siten $x = \bar{0}$ ja edelleen $\text{Ker } L = \{\bar{0}\}$. □

Lause 5

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia sekä $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus. Tällöin L on injektio jos ja vain jos

$$\text{Ker } L = \{\bar{0}\}.$$

Todistus. " \Rightarrow ": Olkoon L injektio. Valitaan $x \in \text{Ker } L$, tällöin

$$Lx = \bar{0} = L\bar{0}.$$

Siten $x = \bar{0}$ ja edelleen $\text{Ker } L = \{\bar{0}\}$. □

" \Leftarrow ": Olkoon $\text{Ker } L = \{\bar{0}\}$. Asetetaan $Lx = Ly$. Tällöin $L(x - y) = \bar{0}$, joten

$$x - y \in \text{Ker } L = \{\bar{0}\} \Rightarrow x - y = \bar{0} \Rightarrow x = y. \quad \square$$

Lause 6

Olkoot V vektoriavaruus, W äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $L : V \rightarrow W$ lineaarinen. Tällöin

$$\dim \operatorname{Im} L = \dim W \iff L \text{ on surjektio.} \quad (43)$$

Todistus. " \Rightarrow ": Assume $\dim \operatorname{Im} L = \dim W$. Because $\operatorname{Im} L$ is a subspace of W , then $\operatorname{Im} L = W$ by Corollary 2 of Theorem 10 (from the first part of lectures).

" \Leftarrow ": Assume L is surjective meaning $\operatorname{Im} L = W$. Then $\dim \operatorname{Im} L = \dim W$. □

Lause 7 (Dimensiolause)

Olkoot V äärellisulotteinen vektoriavaruus, W vektoriavaruus ja $L : V \rightarrow W$ lineaarinen. Tällöin

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L. \quad (44)$$

Todistus. Olkoot

$$\dim V = n, \quad \dim \operatorname{Ker} L = k, \quad \operatorname{Ker} L = \langle v_1, \dots, v_k \rangle.$$

Täydennetään lista v_1, \dots, v_k avaruuden V :n kannaksi, jolloin

$$V = \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle, \quad v_{k+1}, \dots, v_n \notin \operatorname{Ker} L.$$

Määrätään kuva-avaruus

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L &= L(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \\ &= \{L(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \mid a_1, \dots, a_n \in K\} = \\ &= \{a_1 L v_1 + \dots + a_n L v_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\} = \\ &= \{a_{k+1} L v_{k+1} + \dots + a_n L v_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\}. \end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että $\{Lv_{k+1}, \dots, Lv_n\}$ on lineaarisesti vapaa.
Asetetaan lineaarikombinaatio nolllaksi

$$\begin{aligned}
 a_{k+1}Lv_{k+1} + \dots + a_nLv_n &= \bar{0} \quad \Rightarrow \\
 L(a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n) &= \bar{0} \quad \Rightarrow \\
 a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n &\in \text{Ker } L \quad \Rightarrow \\
 a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_nv_n &= b_1v_1 + \dots + b_kv_k \quad \Rightarrow \\
 b_1v_1 + \dots + b_kv_k + (-a_{k+1})v_{k+1} + \dots + (-a_n)v_n &= \bar{0}.
 \end{aligned}$$

Kantana joukko $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ on lineaarisesti vapaa, joten

$$b_1 = \dots = b_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0.$$

Siten $\{Lv_{k+1}, \dots, Lv_n\}$ on lineaarisesti vapaa ja kuva-avaruuden dimensioksi saadaan

$$\dim \text{Im } L = n - k. \quad \square$$

Seuraus 1

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia siten, että V on äärellisulotteinen, ja $L : V \rightarrow W$ lineaarinen. Tällöin seuraavat väitteet ovat tosia:

- (a) Jos L on injektio, niin $\dim V \leq \dim W$.*
- (b) Jos L on surjektio, niin $\dim V \geq \dim W$.*
- (c) Jos L on bijektio, niin $\dim V = \dim W$.*

Todistus. Aluksi

$$k := \dim \operatorname{Ker} L \leq n := \dim V, \quad n - k = \dim \operatorname{Im} L \leq \dim W.$$

a) kohta. Nyt $\operatorname{Ker} L = \{\bar{0}\}$, joten

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad n - k = n \leq \dim W.$$

b) kohta. Nyt $\operatorname{Im} L = W$, joten

$$n - k = m := \dim W \quad \Rightarrow \quad n = m + k \geq m.$$

c) kohta seuraa kohdista a+b.

$$\dim W \geq n \geq \dim W. \quad \square$$

Seuraus 2

Olkoot V ja W äärellisulotteisia vektoriavaruuksia siten, että niiden dimensiot ovat samat, ja olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarinen. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:

- (a) *L on bijektio.*
- (b) *L on injektio.*
- (c) *L on surjektio.*

Esimerkki 9

Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (y - z, x - z)$, on lineaarinen.
Määritään kuvauksen L ydin:

$$L(x, y, z) = \bar{0} \Leftrightarrow (y - z, x - z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Siis

$$\begin{aligned} \text{Ker } L &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1, 1, 1) : s \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 1, 1) \rangle, \end{aligned}$$

joten $\dim \text{Ker } L = 1$. Eryityisesti $\text{Ker } L \neq \{\bar{0}\}$, joten L ei ole injektio.
Dimensiolauseen nojalla $3 = 1 + \dim \text{Im } L$, joten $\dim \text{Im } L = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.
Siten $\text{Im } L = \mathbb{R}^2$ eli L on surjektio.

Esimerkki 10

Tarkastellaan derivaattakuvausta $D : \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Koska $Dp = p' = 0$ jos ja vain jos $p(x) = c$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ jollekin $c \in \mathbb{R}$ (eli p on vakiopolynomi), niin $\text{Ker } D = \langle 1 \rangle$. Näin ollen $\dim \text{Ker } D = 1$.

Dimensiolauseen nojalla $\dim \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = n + 1 = 1 + \dim \text{Im } D$, joten $\dim \text{Im } D = n < \dim \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Näin ollen D ei ole surjektio.

Olkoon $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ avaruuden V kanta. Kerrataan, että koordinaattikuvaus $[\cdot]_v$ kuvaa vektorin v kantaesityksen $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ pystyvektoriksi eli matriisin sarakkeeksi seuraavasti

$$[v]_v = \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right]_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_v. \quad (45)$$

Esimerkki 11

$$[v_1]_v = [1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n]_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_v \quad (46)$$

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kunnan K yli, missä $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ on avaruuden V kanta ja $w = \{w_1, \dots, w_m\}$ on avaruuden W kanta. Olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus, jolle kantavektoreitten v_1, \dots, v_n kuvat kannassa $w = \{w_1, \dots, w_m\}$ ovat

$$Lv_1 = a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m,$$

...

$$Lv_n = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m$$

eli

$$[Lv_1]_w = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_w, \quad [Lv_2]_w = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}_w, \quad \dots, \quad [Lv_n]_w = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}_w. \quad (47)$$

Merkitään

$$[L]_{v,w} = [[Lv_1]_w, [Lv_2]_w, \dots, [Lv_n]_w] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad (48)$$

missä sarakkeina ovat kantavektoreitten v_1, \dots, v_n kuvien Lv_1, \dots, Lv_n koordinaattivektorit kannassa w_1, \dots, w_n .

Määritelmä 3

Matriisi

$$[L]_{v,w}$$

on lineaarikuvauksen L matriisi kantojen v ja w suhteen.

Lause 8

Olkoot V ja W vektoriavaruuksia kunnan K yli, missä $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ on avaruuden V kanta ja $w = \{w_1, \dots, w_m\}$ on avaruuden W kanta. Olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus, jonka matriisi kantojen v ja w suhteen on

$$[L]_{v,w} = [a_{ij}].$$

Tällöin $[a_{ij}]$ on se yksikäsitteinen $m \times n$ -matriisi, jonka avulla kuvauksen L arvo $Lv = \sum_{j=1}^m \mu_j w_j$ pisteessä $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ saadaan matriisikertolaskuna

$$[L]_{v,w} [v]_v = [Lv]_w \quad (49)$$

eli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_v = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}_w \quad (50)$$

Todistus. Lasketaan lineaarikuvauksena

$$\begin{aligned}Lv &= L(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \\ &L\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L v_i = \\ &\lambda_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + \lambda_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) = \\ &(a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n)w_1 + \dots + (a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n)w_m = \\ &(a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n, \dots, a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n) = \\ &(\mu_1, \dots, \mu_m)\end{aligned}$$

ja

matriiseilla

$$[L]_{v,w} [v]_v = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_v = \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n \end{bmatrix}_w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}_w = [Lv]_w. \quad \square$$

Lineaarikuvausta vastaa yksikäsitteinen matriisi ja matriisin avulla voidaan määritellä lineaarikuvaus.

On siis olemassa bijektio kaikkien lineaaristen kuvauksien $L : V \rightarrow W$ ja kaikkien $m \times n$ -matriisien välillä.

Esimerkki 12

Olkoot $V = W = \mathbb{R}^2$, $e = \{e_1, e_2\} \in V$ ja $f = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2\} \in W$. Tarkastellaan lineaarikuvausta $L: V \rightarrow W$, joka kuvaa kantavektorit e_1, e_2 kuvavektoreiksi

$$\begin{cases} Le_1 = -e_1 + e_2 = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_f ; \\ Le_2 = e_1 + e_2 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_f . \end{cases} \quad (52)$$

Tällöin L :n matriisi kantojen e ja f suhteen on

$$[L]_{e,f} = [[Le_1]_f, [Le_2]_f] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{e,f}, \quad (53)$$

missä sarakkeina ovat kantavektoreitten e_1, e_2 kuvien Le_1, Le_2 koordinaattivektorit kannassa f_1, f_2 .

Esimerkki 13

Määritellään lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, asettamalla $L(x, y, z) = (z - y, x - z + y, x)$ aina, kun $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- 1 Määrää $\text{Ker } L$.
- 2 Onko L injektio?
- 3 Määrää $\dim \text{Ker } L$.
- 4 Määrää $\dim \text{Im } L$ (käytä dimensiokaavaa).
- 5 Onko L surjektio?
- 6 Onko L bijektio?
- 7 Määrää $\text{Im } L$.

1. Ker L . Ratkaisu:

Asetetaan

$$L\bar{x} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (54)$$

$$(z - y, x - z + y, x) = (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (55)$$

$$z - y = x - z + y = x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, z = y \quad \Leftrightarrow \quad (56)$$

$$\bar{x} = (0, y, y) \quad \Rightarrow \quad (57)$$

$$\text{Ker } L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L\bar{x} = \bar{0}\} = \quad (58)$$

$$\{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 1) \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (59)$$

1. Ker L . Ratkaisu:

Asetetaan

$$L\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \quad (54)$$

$$(z - y, x - z + y, x) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \quad (55)$$

$$z - y = x - z + y = x = 0 \Leftrightarrow x = 0, z = y \Leftrightarrow \quad (56)$$

$$\bar{x} = (0, y, y) \Rightarrow \quad (57)$$

$$\text{Ker } L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L\bar{x} = \bar{0}\} = \quad (58)$$

$$\{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 1) \rangle_{\mathbb{R}}. \quad (59)$$

2. Injektio? Ei, koska

$$\text{Ker } L \neq \{\bar{0}\}. \quad (60)$$

3.

$$\dim \operatorname{Ker} L = 1. \quad (61)$$

3.

$$\dim \operatorname{Ker} L = 1. \quad (61)$$

4. Dimensiokaavalla (44):

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 + \dim \operatorname{Im} L. \quad (62)$$

Siten

$$\dim \operatorname{Im} L = 2. \quad (63)$$

3.

$$\dim \operatorname{Ker} L = 1. \quad (61)$$

4. Dimensiokaavalla (44):

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 + \dim \operatorname{Im} L. \quad (62)$$

Siten

$$\dim \operatorname{Im} L = 2. \quad (63)$$

5. Ei ole surjektio, koska $\dim \operatorname{Im} L = 2$ ja maaliavaruuden \mathbb{R}^3 dimensio=3.

3.

$$\dim \operatorname{Ker} L = 1. \quad (61)$$

4. Dimensiokaavalla (44):

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 + \dim \operatorname{Im} L. \quad (62)$$

Siten

$$\dim \operatorname{Im} L = 2. \quad (63)$$

5. Ei ole surjektio, koska $\dim \operatorname{Im} L = 2$ ja maaliavaruuden \mathbb{R}^3 dimensio=3.

6. Ei ole bijektio.

7. $\text{Im } L$.

$$\begin{aligned}
 L\bar{x} &= (z - y, x - z + y, x) = \\
 &= (z - y)e_1 + (x - z + y)e_2 + xe_3 = \\
 &= (z - y)e_1 + (-z + y)e_2 + x(e_2 + e_3) = \\
 &= (z - y)(e_1 - e_2) + x(e_2 + e_3),
 \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
 \text{Im } L &= \{L\bar{x} \mid \bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \\
 &= \{(z - y)(e_1 - e_2) + x(e_2 + e_3) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{t(e_1 - e_2) + x(e_2 + e_3) \mid x, t \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \langle e_1 - e_2, e_2 + e_3 \rangle_{\mathbb{R}},
 \end{aligned}$$

missä $e_1 - e_2$ ja $e_2 + e_3$ ovat lineaarisesti vapaita. Tästäkin voidaan päätellä, että L ei ole surjektio sekä $\dim \text{Im } L = 2$.

Esimerkki 14

Jatketaan lineaarikuvauksen $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$L(x, y, z) = (z - y, x - z + y, x)$ tarkastelua. Määrää L :n matriisi

- 1 $A_1 = [L]_{e,e}$ luonnollisen kannan $e = E_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ suhteen.
- 2 $A_2 = [L]_{f,f}$ kannan $f = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_2 + e_3, f_3 = e_3 + e_1\}$ suhteen.
- 3 $A_3 = [L]_{e,f}$.
- 4 $A_4 = [L]_{f,e}$.
- 5 Laske determinantit $\det A_1$ ja $\det A_2$.

Lasketaan kantavektoreitten e_1, e_2, e_3 kuvat:

$$Le_1 = L(1, 0, 0) = (0, 1, 1) = e_2 + e_3 = f_2;$$

$$Le_2 = L(0, 1, 0) = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2 = f_2 - f_3;$$

$$Le_3 = L(0, 0, 1) = (1, -1, 0) = e_1 - e_2 = -f_2 + f_3.$$

Joista saadaan

$$A_1 = [L]_{e,e} = [[Le_1]_e, [Le_2]_e, [Le_3]_e] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e,e} \quad (64)$$

ja

$$A_3 = [L]_{e,f} = [[Le_1]_f, [Le_2]_f, [Le_3]_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{e,f} \quad (65)$$

Lasketaan kantavektoreitten f_1, f_2, f_3 kuvat:

$$Lf_1 = L(e_1) + L(e_2) = -e_1 + 2e_2 + e_3 = 2f_2 - f_3;$$

$$Lf_2 = L(e_2) + L(e_3) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3;$$

$$Lf_3 = L(e_3) + L(e_1) = e_1 + e_3 = f_3;$$

Joista saadaan

$$A_2 = [L]_{f,f} = [[Lf_1]_f, [Lf_2]_f, [Lf_3]_f] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{f,f} \quad (66)$$

ja

$$A_4 = [L]_{f,e} = [[Lf_1]_e, [Lf_2]_e, [Lf_3]_e] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{f,e} \quad (67)$$

Esimerkki 15

Kotitehtävä 37.

Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus, $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$ ja $n \in V$ annettu. Määritellään kuvaus $L : V \rightarrow \mathbb{R}$, asettamalla

$$L(x) = n \cdot x \quad (68)$$

aina, kun $x \in V$.

- 1 Osoita, että kuvaus L on lineaarinen.
- 2 Määrää $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im } L$.
- 3 Määrää $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } L$.

Ratkaisu. Tapaus $n \neq \bar{0}$.

Lineaarikuvauksen maaliavaruus on \mathbb{R} , jolla on vain triviaalit aliavaruudet $\{0\}$ ja \mathbb{R} . Lisäksi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$.

Koska

$$L(n) = n \cdot n > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{Im } L \neq \{0\} \quad (69)$$

ja $\text{Im } L$ on \mathbb{R} :n aliavaruus, niin

$$\text{Im } L = \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } L = 1. \quad (70)$$

Edelleen dimensiokaavalla (44):

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } L + \dim_{\mathbb{R}} \text{Im } L \quad \Leftrightarrow \quad k = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } L + 1. \quad (71)$$

Siten

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } L = k - 1. \quad (72)$$

Hypertaso onkin Kernel

Siispä $\text{Ker } L$ eli joukko

$$N := \{x \in V \mid n \cdot x = 0\} \quad (73)$$

on hypertaso.

Integraalioperaattoreita

Käytetään välillä $[a, b]$ integroituville funktioille merkintää $\mathcal{I} := \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$. Funktioavaruus \mathcal{I} on lineaariavaruus.

Esimerkki 16

Määritellään kuvaus $R : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$Rf = \int_a^b f(t)dt, \quad f \in \mathcal{I}. \quad (74)$$

Integraalin ominaisuuksilla saadaan

$$R(\alpha f + \beta g) = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt = \alpha Rf + \beta Rg, \quad (75)$$

aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in \mathcal{I}$.

Siten $R : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarikuvaus.

Integraalioperaattoreita

Esimerkki 17

Määritellään kuvaus $L : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ asettamalla

$$(Lf)(x) = \int_a^b f(t)e^{xt} dt, \quad f \in \mathcal{I}. \quad (76)$$

Integraalin ominaisuuksilla saadaan

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg, \quad (77)$$

aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in \mathcal{I}$.

Siten $L : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ on lineaarikuvaus.