# 802320A LINEAARIALGEBRA OSA III
# LINEAR ALGEBRA PART III

Tapani Matala-aho

MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO
KEVT 2020

# Contents

**1 Lineaarikuvaus** **3**
1.1 Määritelmä . . . . . 3
1.2 Matriisiesitys/Matrix representation . . . . . 5
1.3 Perustuloksia . . . . . 7
1.4 Ker ja Im . . . . . 8
1.5 Dimensiolause . . . . . 11
1.6 Matriisiesitys . . . . . 13
1.7 Esimerkkejä . . . . . 16
1.7.1 Hypertaso onkin Kernel . . . . . 19
1.7.2 Integraalioperaattoreita . . . . . 19

# 1 Lineaarikuvaus

## 1.1 Määritelmä

**Määritelmä 1.** *Olkoot $V$ ja $W$ lineaariavaruuksia kunnan $K$ yli. Kuvaus*

$$L : V \to W$$

*on lineaarinen, jos*

*(a)* $L(v+w) = L(v) + L(w)$*;*

*(b)* $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

*aina, kun* $v, w \in V$ *ja* $\lambda \in K$*.*

Termejä: Lineaarikuvaus, Lineaarinen kuvaus, Linear mapping.

**Huomautus 1.** *Lineaarikuvauksen argumentin ympäriltä jätetään usein sulut pois eli voidaan käyttää merkintää/we can use the shorthand notation*

$$Lv := L(v).$$

**Lemma 1.** *Olkoot $V$ ja $W$ lineaariavaruuksia kunnan $K$ yli. Kuvaus*

$$L : V \to W$$

*on lineaarinen joss/if and only if*

$$L(\alpha v + \beta w) = \alpha Lv + \beta Lw \tag{1}$$

*aina, kun* $v, w \in V$ *ja* $\alpha, \beta \in K$*.*

**Merkintä 1.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia.*
*Identtinen kuvaus/Identity mapping*

$$Id : V \to V, \quad Id(v) = v \quad \forall\ v \in V.$$

*Nollakuvaus/zero-mapping (nollafunktio)*

$$0 : V \to W, \quad 0(v) = \overline{0} \quad \forall\ v \in V.$$

**Esimerkki 1.**

Identtinen kuvaus ja nollakuvaus ovat lineaarisia kuvauksia.

**Esimerkki 2.** *Kuvaus* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*,*

$$L(\overline{x}) = 3 \cdot \overline{x}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

*on lineaarinen. Nimittäin,*

$$L(\overline{x} + \overline{y}) = 3 \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = 3 \cdot \overline{x} + 3 \cdot \overline{y} = L\overline{x} + L\overline{y}; \tag{3}$$
$$L(r \cdot \overline{x}) = 3 \cdot (r \cdot \overline{x}) = r \cdot (3 \cdot \overline{x}) = r \cdot L\overline{x}, \tag{4}$$

*aina, kun* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$ *ja* $r \in \mathbb{R}$*.* $\square$

**Esimerkki 3.** *Kuvaus* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*,*

$$L(\overline{x}) = 3 \cdot \overline{x} + \overline{e}_2, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

*EI ole lineaarinen.*

*Nyt*

$$\begin{aligned} &V.P. = L(\overline{x} + \overline{y}) = 3 \cdot (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{e}_2 = 3 \cdot \overline{x} + 3 \cdot \overline{y} + \overline{e}_2; \\ &O.P. = L\overline{x} + L\overline{y} = 3 \cdot \overline{x} + \overline{e}_2 + 3 \cdot \overline{y} + \overline{e}_2 \neq V.P., \end{aligned}$$

*kun* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$*.* $\square$

Tiedetään, että $\mathbb{R}^1$ on lineaariavaruus kunnan $\mathbb{R}$ yli/ We know that $\mathbb{R}^1$ is a linear space over the field $\mathbb{R}$.
Voidaan osoittaa, että myös $\mathbb{R}$ on lineaariavaruus kunnan $\mathbb{R}$ yli/ We can show, that also $\mathbb{R}$ is a linear space over the field $\mathbb{R}$.

Tällöin voidaan tehdä samaistus $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$./ Then we may make an indentification $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.

**Esimerkki 4.** *Kuvaus* $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on lineaarinen jos ja vain jos on olemassa sellainen/if and only if there exists an* $s \in \mathbb{R}$*, että*

$$L(x) = sx \tag{6}$$

*kaikilla* $x \in \mathbb{R}$*.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Oletetaan, että $L$ on lineaarinen ja olkoon $L(1) := s$. Tällöin

$$L(x) = L(x \cdot 1) = xL(1) = xs. \quad \square \tag{7}$$

"$\Leftarrow$": Oletetaan, että

$$L(x) = sx. \tag{8}$$

Kotitehtävä: Osoita, että $L$ on lineaarinen.

## 1.2 Matriisiesitys/Matrix representation

**Merkintä 2.** *Merkintä*

$$M_{h\times k}(K)=\{A\mid A=[a_{ij}],\ i=1,...,h; j=1,...,k;\ a_{ij}\in K\}$$

*tarkoittaa* $h\times k$*-matriisien joukkoa. Siten, jos*

$$A\in M_{h\times k}(K),$$

*niin matriisissa* $A=[a_{ij}]$ *on* $h$ *riviä/rows ja* $k$ *saraketta/columns ja sen alkiot/elements* $a_{ij}\in K$*.*

**Merkintä 3.** *Tästä lähtien merkintä* $\overline{x}$ *viittaa pystyvektoriin/ From now on the notation* $\overline{x}$ *indicates a column vector*

$$\overline{x}=(x_1,...,x_n)^T=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

*joka voidaan tarvittaessa tulkita* $n\times 1$*-matriisiksi eli/which may be interpreted as an* $n\times 1$*-matrix*

$$\overline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

Yleisemmin:

**Merkintä 4.** *Olkoon* $\mathrm{v}=\{v_1,\dots,v_n\}$ *avaruuden* $V$ *kanta. Koordinaattikuvaus* $[.]_{\mathrm{v}}$ *kuvaa vektorin* $v$ *kantaesityksen pystyvektoriksi eli matriisin sarakkeeksi seuraavasti/The coordinate mapping* $[.]_{\mathrm{v}}$ *maps the base-expansion of the vector* $v$ *in the following manner*

$$[v]_{\mathrm{v}}=[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i]_{\mathrm{v}}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}_{\mathrm{v}}. \tag{9}$$

*Koordinaattikuvaus on lineaarinen bijektio ja siten vektori ja sen koordinaateista muodostettu pystyvektori/sarake voidaan samaistaa.*

**Esimerkki 5.** *Olkoon* $E_3=\{e_1,e_2,e_3\}$ *avaruuden* $\mathbb{R}^3$ *luonnollinen kanta. Nyt*

$$[3e_1+2e_2-e_3]_{E_3}=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ -1\end{bmatrix}_{E_3}. \tag{10}$$

**Lemma 2.** *Olkoon $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Määritellään kuvaus*

$$L_A : \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}^m$$

*asettamalla*

$$L_A(\overline{x}) = A\overline{x} \tag{11}$$

*kaikilla $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, missä $\overline{x}$ tulkitaan $n \times 1$-matriisiksi. Tällöin kuvaus $L_A$ on lineaarinen.*

Tarkastellaan aluksi kertolaskua

$$A\overline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m. \tag{12}$$

Nähdään, että $m \times n$-matriisilla kertominen todellakin indusoi kuvauksen

$$\begin{aligned} \overline{x} &\to A\overline{x}; \\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Todistus. Osoitetaan, että kuvaus $L_A$ on lineaarinen.

$$L_A(\overline{x} + \overline{y}) = A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y} = L_A(\overline{x}) + L_A(\overline{y}), \tag{13}$$

ja

$$L_A(r\overline{x}) = A(r\overline{x}) = rA\overline{x} = rL_A(\overline{x}) \tag{14}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$ matriisitulon ominaisuuksien nojalla. $\square$

**Esimerkki 6.** *Olkoon*

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \quad \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{15}$$

*tällöin saadaan lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

Todistus. Kohta a.
Lasketaan

$$\begin{aligned}V.P. = L(\overline{x}+\overline{y}) = L(x_1+y_1, x_2+y_2) = \\ ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), 2(x_1+y_1)-(x_2+y_2));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}O.P. = L(\overline{x})+L(\overline{y}) &= (x_1+x_2, 2x_1-x_2)+(y_1+y_2, 2y_1-y_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1-x_2+2y_1-y_2).\end{aligned}$$

Havaitaan, että V.P.=O.P. □

Kohta b. Kotitehtävä.
Esimerkin 6 lineaarikuvausta

$$L(x_1, x_2) = (x_1+x_2, 2x_1-x_2)$$

vastaa matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\ 2x_1-x_2\end{bmatrix} \tag{16}$$

eli

$$A\overline{x} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\ 2x_1-x_2\end{bmatrix}. \tag{17}$$

Pisteen $x = (x_1, x_2)$ kuva lineaarikuvauksessa $L$ voidaan siis laskea kertomalla matriisi $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ matriisilla $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.

## 1.3 Perustuloksia

**Lause 1.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia kunnan $K$ yli sekä $L : V \to W$ lineaarinen. Tällöin*

$$L(\overline{0}) = \overline{0} \tag{18}$$

*ja*

$$L\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i L(v_i) \tag{19}$$

*kaikilla $k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ ja $v_1 \ldots, v_k \in V$.*

**Lause 2.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia kunnan $K$ yli ja*

$$T, L : V \to W$$

*lineaarikuvauksia ja $S$ avaruuden $V$ kanta.*
*Tällöin $T = L$ jos ja vain jos $Ts = Ls$ kaikilla $s \in S$.*

Muistetaan, että

$$T = L \quad \Leftrightarrow \quad Tv = Lv \quad \forall v \in V. \tag{20}$$

Siten, jos $T = L$, niin $Ts = Ls$ kaikilla $s \in S$.

"$\Leftarrow$": Todistetaan tapaus: dim $V = n < \infty$. Olkoon $S = \{s_1, ..., s_n\}$, jolloin $V = \langle s_1, ..., s_n \rangle$.

Oletetaan, että $Ts = Ls$ kaikilla $s \in S$. Nyt

$$Tv = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(s_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L(s_i) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i\right) = Lv. \quad \square \tag{21}$$

**Lause 3.** *Olkoot $V, W$ ja $U$ vektoriavaruuksia sekä $L : V \to W$ ja $S : W \to U$ lineaarikuvauksia. Tällöin*

*(a) yhdistetty kuvaus $S \circ L : V \to U$ on lineaarinen;*

*(b) jos $L$ on bijektio, niin $L^{-1} : W \to V$ on lineaarinen.*

Todistus. Kohta b:
Koska $L : V \to W$ on bijektio, niin $L^{-1} : W \to V$ $\exists$ ja $LL^{-1} = L^{-1}L = Id$. Olkoot $w_1, w_2 \in W$, tällöin $\exists$ sellaiset $v_1, v_2 \in V$, että $w_1 = Lv_1,\ w_2 = Lv_2$. Siispä

$$\begin{aligned} L^{-1}(w_1 + w_2) =& L^{-1}(Lv_1 + Lv_2) = L^{-1}L(v_1 + v_2) = \\ & v_1 + v_2 = L^{-1}w_1 + L^{-1}w_2 \end{aligned} \tag{22}$$

ja

$$L^{-1}(\lambda w) = L^{-1}(\lambda Lv) = L^{-1}L(\lambda v) = \lambda v = \lambda L^{-1}w. \qquad \square \tag{23}$$

## 1.4 Ker ja Im

**Määritelmä 2.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia sekä $L : V \to W$ lineaarinen. Kuvauksen $L$ kernel on joukko*

$$Ker\, L = \{v \in V \mid Lv = \overline{0}\}$$

*ja image on joukko*

$$Im\, L = \{w \in W \mid w = Lv \text{ jollakin } v \in V\}.$$

Terminologiaa:
Kernel eli ydin eli nollan alkukuva;
Image eli kuvajoukko eli arvojoukko

**Esimerkki 7.** *Lasketaan Esimerkin 6 lineaarikuvauksen* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \quad \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{24}$$

*kernel ja image.*

Kernel:

$$\overline{x} \in \operatorname{Ker} L \quad \Leftrightarrow \quad L\overline{x} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{x} = \overline{0} \tag{25}$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det A = -3 \neq 0. \tag{26}$$

Siten $\overline{x} = A^{-1}\overline{0} = \overline{0}$, joten

$$\operatorname{Ker} L = \{\overline{0}\}. \tag{27}$$

Image: Valitaan maaliavaruudesta mielivaltainen alkio $\overline{y} \in \mathbb{R}^2$ ja yritetään hakea sille alkukuva $\overline{x}$ lähtöavaruudesta $\mathbb{R}^2$. Asetetaan yhtälö

$$L\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad A\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = A^{-1}\overline{y} \tag{28}$$

Siten löydettiin lähtöavaruuden alkio $\overline{x} = A^{-1}\overline{y} \in \mathbb{R}^2$ ($\overline{y}$:n alkukuva) eli alkio jolle pätee

$$L\overline{x} = \overline{y}. \tag{29}$$

Havaitaan, että

$$\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2. \tag{30}$$

**Esimerkki 8.** *Kuvaus* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*,* $L(x, y, z) = (x, y + z)$ *on lineaarinen. Määrätään sen ydin ja arvojoukko.*

Nyt

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} L \quad \Leftrightarrow \tag{31}$$

$$(0, 0) = L(x, y, z) = (x, y + z) \quad \Leftrightarrow \tag{32}$$

$$x = 0, \quad z = -y \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Siis $y$ on vapaa parametri, jolloin

$$\operatorname{Ker} L = \{(0, y, -y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, -1) \rangle; \tag{34}$$

$$\dim \operatorname{Ker} L = 1. \tag{35}$$

Olkoon $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ ja asetetaan

$$L(x, y, z) = (x, y + z) = (b_1, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = b_1 \\ y + z = b_2. \end{cases} \tag{36}$$

Valitsemalla $x = b_1, y = b_2$ ja $z = 0$ saadaan

$$L(b_1, b_2, 0) = (b_1, b_2)$$

eli jokaisella maaliavaruuden $\mathbb{R}^2$ pisteellä on alkukuva. Arvojoukoksi tulee

$$\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2. \tag{37}$$

**Lause 4.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia, $V' \subseteq V$ ja $W' \subseteq W$ aliavaruuksia ja $L : V \to W$ lineaarikuvaus.*

*Tällöin*

$$L^{-1}(W') \subseteq V \quad \text{ja} \quad L(V') \subseteq W \tag{38}$$

*ovat aliavaruuksia. Erityisesti,*

$$Ker\, L \subseteq V \quad \text{ja} \quad Im\ L \subseteq W \tag{39}$$

*ovat aliavaruuksia ja*

$$\dim Ker\ L \leq \dim V, \quad \dim Im\, L \leq \dim W. \tag{40}$$

Todistetaan, että $\operatorname{Ker} L$ on $V$:n aliavaruus.

AA1. Koska $L(\overline{0}) = \overline{0}$, niin $\overline{0} \in \operatorname{Ker} L$ ja siten $\operatorname{Ker} L \neq \emptyset$. □

AA2. Olkoot $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker} L$. Lasketaan

$$L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2 = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}, \tag{41}$$

joten $x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker} L$. □

AA3. Olkoot $k \in K$ ja $x \in \operatorname{Ker} L$. Lasketaan

$$L(k \cdot x) = k \cdot Lx = k \cdot \overline{0} = \overline{0}, \tag{42}$$

joten $k \cdot x \in \operatorname{Ker} L$. □

**Lause 5.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia sekä $L : V \to W$ lineaarikuvaus. Tällöin $L$ on injektio jos ja vain jos*

$$Ker\ L = \{\overline{0}\}.$$

Todistus. " $\Rightarrow$ ": Olkoon $L$ injektio. Valitaan $x \in \operatorname{Ker}\ L$, tällöin

$$Lx = \overline{0} = L\overline{0}.$$

Siten $x = \overline{0}$ ja edelleen $\operatorname{Ker}\ L = \{\overline{0}\}$. □

" $\Leftarrow$ ": Olkoon $\operatorname{Ker}\ L = \{\overline{0}\}$. Asetetaan $Lx = Ly$. Tällöin $L(x - y) = \overline{0}$, joten

$$x - y \in \operatorname{Ker}\ L = \{\overline{0}\} \quad \Rightarrow \quad x - y = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad x = y. \quad \square$$

**Lause 6.** *Olkoot $V$ vektoriavaruus, $W$ äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $L : V \to W$ lineaarinen. Tällöin*

$$\dim Im\, L = \dim W \quad \Leftrightarrow \quad L \quad \textit{on surjektio.} \tag{43}$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Assume dim Im $L = \dim W$. Because Im $L$ is a subspace of $W$, then Im $L = W$ by Corollary 2 of Theorem 10 (from the first part of lectures).
"$\Leftarrow$": Assume $L$ is surjective meaning Im $L = W$. Then
dim Im $L = \dim W$. □

## 1.5 Dimensiolause

**Lause 7** (Dimensiolause)**.** *Olkoot $V$ äärellisulotteinen vektoriavaruus, $W$ vektoriavaruus ja $L : V \to W$ lineaarinen. Tällöin*

$$\dim V = \dim Ker\ L + \dim Im\ L. \tag{44}$$

Todistus. Olkoot

$$\dim V = n, \quad \dim \mathrm{Ker}\ L = k, \quad \mathrm{Ker}\ L = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Täydennetään lista $v_1, \ldots, v_k$ avaruuden $V$:n kannaksi, jolloin

$$V = \langle v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, ..., v_n \rangle, \quad v_{k+1}, ..., v_n \notin \mathrm{Ker}\ L.$$

Määrätään kuva-avaruus

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\ L = L(\langle v_1, ..., v_n \rangle) = \\ \{L(a_1 v_1 + ... + a_n v_n) \mid a_1, ..., a_n \in K\} = \\ \{a_1 L v_1 + ... + a_n L v_n |\ a_1, ..., a_n \in K\} = \\ \{a_{k+1} L v_{k+1} + ... + a_n L v_n |\ a_1, ..., a_n \in K\}. \end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että $\{Lv_{k+1}, ..., Lv_n\}$ on lineaarisesti vapaa.
Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi

$$\begin{aligned} a_{k+1} L v_{k+1} + ... + a_n L v_n = \overline{0} \quad \Rightarrow \\ L(a_{k+1} v_{k+1} + ... + a_n v_n) = \overline{0} \quad \Rightarrow \\ a_{k+1} v_{k+1} + ... + a_n v_n \in \mathrm{Ker}\ L \quad \Rightarrow \\ a_{k+1} v_{k+1} + ... + a_n v_n = b_1 v_1 + ... + b_k v_k \quad \Rightarrow \\ b_1 v_1 + ... + b_k v_k + (-a_{k+1}) v_{k+1} + ... + (-a_n) v_n = \overline{0}. \end{aligned}$$

Kantana joukko $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ on lineaarisesti vapaa, joten

$$b_1 = ... = b_k = a_{k+1} = ... = a_n = 0.$$

Siten $\{Lv_{k+1}, ..., Lv_n\}$ on lineaarisesti vapaa ja kuva-avaruuden dimensioksi saadaan

$$\dim \mathrm{Im}\ L = n - k. \quad \square$$

**Seuraus 1.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia siten, että $V$ on äärellisulotteinen, ja $L : V \to W$ lineaarinen. Tällöin seuraavat väitteet ovat tosia:*

*(a) Jos L on injektio, niin* $\dim V \leq \dim W$*.*

*(b) Jos L on surjektio, niin* $\dim V \geq \dim W$*.*

*(c) Jos L on bijektio, niin* $\dim V = \dim W$*.*

Todistus. Aluksi

$$k := \dim \mathrm{Ker}\, L \leq n := \dim V, \quad n - k = \dim \mathrm{Im}\ L \leq \dim W.$$

a) kohta. Nyt Ker $L = \{\overline{0}\}$, joten

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad n - k = n \leq \dim W.$$

b) kohta. Nyt Im $L = W$, joten

$$n - k = m := \dim W \quad \Rightarrow \quad n = m + k \geq m.$$

c) kohta seuraa kohdista a+b.

$$\dim W \geq n \geq \dim W. \quad \square$$

**Seuraus 2.** *Olkoot $V$ja $W$ äärellisulotteisia vektoriavaruuksia siten, että niiden dimensiot ovat samat, ja olkoon $L : V \to W$ lineaarinen. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

*(a) L on bijektio.*

*(b) L on injektio.*

*(c) L on surjektio.*

**Esimerkki 9.**

Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x,y,z) = (y-z, x-z)$, on lineaarinen. Määrätään kuvauksen $L$ ydin:

$$L(x,y,z) = \overline{0} \Leftrightarrow (y-z, x-z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Siis

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} L &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z,\ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,1,1) : s \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,1,1) \rangle, \end{aligned}$$

joten $\dim \operatorname{Ker} L = 1$. Erityisesti $\operatorname{Ker} L \neq \{\overline{0}\}$, joten $L$ ei ole injektio. Dimensiolauseen nojalla $3 = 1 + \dim \operatorname{Im} L$, joten $\dim \operatorname{Im} L = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Siten $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2$ eli $L$ on surjektio.

**Esimerkki 10.** *Tarkastellaan derivaattakuvausta* $D : \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Koska* $Dp = p' = 0$ *jos ja vain jos* $p(x) = c$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *jollekin* $c \in \mathbb{R}$ *(eli* $p$ *on vakiopolynomi), niin* $Ker D = \langle 1 \rangle$. *Näin ollen* $\dim Ker D = 1$. *Dimensiolauseen nojalla* $\dim Pol_n(\mathbb{R},\mathbb{R}) = n + 1 = 1 + \dim Im D$, *joten* $\dim Im D = n < \dim Pol_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Näin ollen* $D$ *ei ole surjektio.*

## 1.6 Matriisiesitys

Olkoon $\mathrm{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avaruuden $V$ kanta. Kerrataan, että koordinaattikuvaus $[.]_\mathrm{v}$ kuvaa vektorin $v$ kantaesityksen $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ pystyvektoriksi eli matriisin sarakkeeksi seuraavasti

$$[v]_\mathrm{v} = [\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i]_\mathrm{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_\mathrm{v}. \tag{45}$$

**Esimerkki 11.**

$$[v_1]_\mathrm{v} = [1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + ... + 0 \cdot v_n]_\mathrm{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_\mathrm{v} \tag{46}$$

Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia kunnan $K$ yli, missä $\mathrm{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ on avaruuden $V$ kanta ja $\mathrm{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ on avaruuden $W$ kanta. Olkoon $L : V \to W$ lineaarikuvaus, jolle kantavektoreitten $v_1, ..., v_n$ kuvat kannassa $\mathrm{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ ovat

$$\begin{aligned} Lv_1 =& a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m, \\ & ... \\ Lv_n =& a_{1n}w_1 + ... + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

eli

$$[Lv_1]_\mathrm{w} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_\mathrm{w}, \ [Lv_2]_\mathrm{w} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}_\mathrm{w}, \ ..., [Lv_n]_\mathrm{w} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}_\mathrm{w}. \tag{47}$$

Merkitään

$$[L]_{\mathrm{v},\mathrm{w}} = [[Lv_1]_\mathrm{w}, [Lv_2]_\mathrm{w}, ..., [Lv_n]_\mathrm{w}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \tag{48}$$

missä sarakkeina ovat kantavektoreitten $v_1, ..., v_n$ kuvien $Lv_1, ..., Lv_n$ koordinaattivektorit kannassa $w_1, ..., w_n$.

**Määritelmä 3.** *Matriisi*

$$[L]_{\mathrm{v},\mathrm{w}}$$

*on lineaarikuvauksen $L$ matriisi kantojen* v *ja* w *suhteen.*

**Lause 8.** *Olkoot $V$ ja $W$ vektoriavaruuksia kunnan $K$ yli, missä $\mathrm{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ on avaruuden $V$ kanta ja $\mathrm{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ on avaruuden $W$ kanta. Olkoon $L : V \to W$ lineaarikuvaus, jonka matriisi kantojen* v *ja* w *suhteen on*

$$[L]_{\mathrm{v},\mathrm{w}} = [a_{ij}].$$

*Tällöin $[a_{ij}]$ on se yksikäsitteinen $m \times n$-matriisi, jonka avulla kuvauksen $L$ arvo $Lv = \sum_{j=1}^m \mu_j w_j$ pisteessä $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ saadaan matriisikertolaskuna*

$$[L]_{\mathrm{v},\mathrm{w}} [v]_\mathrm{v} = [Lv]_\mathrm{w} \tag{49}$$

*eli*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_\mathrm{v} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}_\mathrm{w} \tag{50}$$

Todistus. Lasketaan lineaarikuvauksena

$$\begin{aligned}Lv =& L(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \\ & L(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L v_i = \\ & \lambda_1(a_{11}w_1 + ... + a_{m1}w_m) + ... + \lambda_n(a_{1n}w_1 + ... + a_{mn}w_m) = \\ & (a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n)w_1 + ...(a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_n)w_m = \\ & (a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n, ..., a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_n) = \\ & (\mu_1, ..., \mu_m)\end{aligned}$$

ja matriiseilla

$$[L]_{\mathrm{v,w}}\,[v]_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{\mathrm{v}} = \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_n \end{bmatrix}_{\mathrm{w}} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}_{\mathrm{w}} = [Lv]_{\mathrm{w}}. \quad \square$$

Lineaarikuvausta vastaa yksikäsitteinen matriisi ja matriisin avulla voidaan määritellä lineaarikuvaus.

On siis olemassa bijektio kaikkien lineaaristen kuvauksien $L : V \to W$ ja kaikkien $m \times n$-matriisien välillä.

**Esimerkki 12.**

Olkoot $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e} = \{e_1, e_2\} \in V$ ja $\mathrm{f} = \{f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2\} \in W$. Tarkastellaan lineaarikuvausta $L : V \to W$, joka kuvaa kantavektorit $e_1, e_2$ kuvavektoreiksi

$$\begin{cases} Le_1 = -e_1 + e_2 = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{f}}; \\ Le_2 = e_1 + e_2 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{f}}. \end{cases} \tag{52}$$

Tällöin $L$:n matriisi kantojen e ja f suhteen on

$$[L]_{\mathrm{e,f}} = [[Le_1]_{\mathrm{f}}, [Le_2]_{\mathrm{f}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{e,f}}, \tag{53}$$

missä sarakkeina ovat kantavektoreitten $e_1, e_2$ kuvien $Le_1, Le_2$ koordinaattivektorit kannassa $f_1, f_2$.

## 1.7 Esimerkkejä

**Esimerkki 13.** *Määritellään lineaarikuvaus* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *asettamalla* $L(x, y, z) = (z - y, x - z + y, x)$ *aina, kun* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. *Määrää Ker* $L$.

2. *Onko* $L$ *injektio?*

3. *Määrää* dim *Ker* $L$.

4. *Määrää* dim *Im* $L$ *(käytä dimensiokaavaa).*

5. *Onko* $L$ *surjektio?*

6. *Onko* $L$ *bijektio?*

7. *Määrää Im* $L$.

1. Ker $L$. Ratkaisu:
Asetetaan

$$
\begin{aligned}
L\overline{x} =& \overline{0} \quad \Leftrightarrow && (54)\\
& (z - y, x - z + y, x) = (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow && (55)\\
& z - y = x - z + y = x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, z = y \quad \Leftrightarrow && (56)\\
& \overline{x} = (0, y, y) \quad \Rightarrow && (57)\\
& \text{Ker } L = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^3 | \ L\overline{x} = \overline{0}\} = && (58)\\
& \{(0, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1, 1) \rangle_{\mathbb{R}}. && (59)
\end{aligned}
$$

2. Injektio? EI, koska

$$\text{Ker } L \neq \{\overline{0}\}. \tag{60}$$

3.

$$\dim \text{Ker } L = 1. \tag{61}$$

4. Dimensiokaavalla (44):

$$\dim V = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 + \dim \text{Im } L. \tag{62}$$

Siten

$$\dim \text{Im } L = 2. \tag{63}$$

5. EI ole surjektio, koska $\dim \text{Im } L = 2$ ja maaliavaruuden $\mathbb{R}^3$ dimensio=3.

6.EI ole bijektio.

7. Im $L$.

$$\begin{aligned} L\overline{x} =&(z-y, x-z+y, x) = \\ &(z-y)e_1 + (x-z+y)e_2 + xe_3 = \\ &(z-y)e_1 + (-z+y)e_2 + x(e_2+e_3) = \\ &(z-y)(e_1-e_2) + x(e_2+e_3), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \text{Im } L =&\{L\overline{x} \mid \overline{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \\ &\{(z-y)(e_1-e_2) + x(e_2+e_3) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &\{t(e_1-e_2) + x(e_2+e_3) \mid x,t \in \mathbb{R}\} = \\ &\langle e_1-e_2, e_2+e_3\rangle_{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

missä $e_1 - e_2$ ja $e_2 + e_3$ ovat lineaarisesti vapaita. Tästäkin voidaan päätellä, että $L$ ei ole surjektio sekä $\dim \text{Im } L = 2$.

**Esimerkki 14.** *Jatketaan lineaarikuvauksen* $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z) = (z-y, x-z+y, x)$ *tarkastelua. Määrää L:n matriisi*

1. $A_1 = [L]_{\mathrm{e,e}}$ *luonnollisen kannan* $\mathrm{e} = E_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *suhteen.*
2. $A_2 = [L]_{\mathrm{f,f}}$ *kannan* $\mathrm{f} = \{f_1 = e_1+e_2, f_2 = e_2+e_3, f_3 = e_3+e_1\}$ *suhteen.*
3. $A_3 = [L]_{\mathrm{e,f}}$.
4. $A_4 = [L]_{\mathrm{f,e}}$.
5. *Laske determinantit* $\det A_1$ *ja* $\det A_2$.

Lasketaan kantavektoreitten $e_1, e_2, e_3$ kuvat:

$$\begin{aligned} Le_1 =&L(1,0,0) = (0,1,1) = e_2 + e_3 = f_2; \\ Le_2 =&L(0,1,0) = (-1,1,0) = -e_1 + e_2 = f_2 - f_3; \\ Le_3 =&L(0,0,1) = (1,-1,0) = e_1 - e_2 = -f_2 + f_3. \end{aligned}$$

Joista saadaan

$$A_1 = [L]_{\mathrm{e,e}} = [[Le_1]_{\mathrm{e}}, [Le_2]_{\mathrm{e}}, [Le_3]_{\mathrm{e}}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{e,e}} \tag{64}$$

ja

$$A_3 = [L]_{\mathrm{e,f}} = [[Le_1]_{\mathrm{f}}, [Le_2]_{\mathrm{f}}, [Le_3]_{\mathrm{f}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{e,f}} \tag{65}$$

Lasketaan kantavektoreitten $f_1, f_2, f_3$ kuvat:

$$\begin{aligned} Lf_1 =& L(e_1) + L(e_2) = -e_1 + 2e_2 + e_3 = 2f_2 - f_3; \\ Lf_2 =& L(e_2) + L(e_3) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3; \\ Lf_3 =& L(e_3) + L(e_1) = e_1 + e_3 = f_3; \end{aligned}$$

Joista saadaan

$$A_2 = [L]_{\mathrm{f,f}} = [[Lf_1]_{\mathrm{f}}, [Lf_2]_{\mathrm{f}}, [Lf_3]_{\mathrm{f}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{f,f}} \tag{66}$$

ja

$$A_4 = [L]_{\mathrm{f,e}} = [[Lf_1]_{\mathrm{e}}, [Lf_2]_{\mathrm{e}}, [Lf_3]_{\mathrm{e}}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{f,e}} \tag{67}$$

**Esimerkki 15.** *Kotitehtävä 37.*
*Olkoon $V$ reaalinen sisätuloavaruus, $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$ ja $n \in V$ annettu. Määritellään kuvaus $L : V \to \mathbb{R}$, asettamalla*

$$L(x) = n \cdot x \tag{68}$$

*aina, kun $x \in V$.*

1. *Osoita, että kuvaus $L$ on lineaarinen.*
2. *Määrää $\dim_{\mathbb{R}}$ Im $L$.*
3. *Määrää $\dim_{\mathbb{R}}$ Ker $L$.*

Ratkaisu. Tapaus $n \neq \overline{0}$.

Lineaarikuvauksen maaliavaruus on $\mathbb{R}$, jolla on vain triviaalit aliavaruudet $\{0\}$ ja $\mathbb{R}$. Lisäksi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$.
Koska

$$L(n) = n \cdot n > 0, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\ L \neq \{0\} \tag{69}$$

ja Im $L$ on $\mathbb{R}$:n aliavaruus, niin

$$\mathrm{Im}\ L = \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\ L = 1. \tag{70}$$

Edelleen dimensiokaavalla (44):

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\ L + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\ L \quad \Leftrightarrow \quad k = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\ L + 1. \tag{71}$$

Siten

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}\ L = k - 1. \tag{72}$$

### 1.7.1 Hypertaso onkin Kernel

Siispä Ker $L$ eli joukko

$$N := \{x \in V \mid n \cdot x = 0\} \tag{73}$$

on hypertaso.

### 1.7.2 Integraalioperaattoreita

Käytetään välillä $[a, b]$ integroituville funktioille merkintää $\mathcal{I} := \mathcal{I}([a, b], \mathbb{R})$. Funktioavaruus $\mathcal{I}$ on lineaariavaruus.

**Esimerkki 16.** *Määritellään kuvaus $R : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ asettamalla*

$$Rf = \int_a^b f(t)dt, \quad f \in \mathcal{I}. \tag{74}$$

*Integraalin omainaisuuksilla saadaan*

$$R(\alpha f + \beta g) = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt = \alpha Rf + \beta Rg, \tag{75}$$

*aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in \mathcal{I}$.*

*Siten $R : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ on lineaarikuvaus.*

**Esimerkki 17.** *Määritellään kuvaus $L : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ asettamalla*

$$(Lf)(x) = \int_a^b f(t)e^{xt}dt, \quad f \in \mathcal{I}. \tag{76}$$

*Integraalin omainaisuuksilla saadaan*

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg, \tag{77}$$

*aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in \mathcal{I}$.*

*Siten $L : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ on lineaarikuvaus.*