802320A LINEAARIALGEBRA OSA II
LINEAR ALGEBRA PART II

Tapani Matala-aho

MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO
KEVT 2020

Contents

1 Sisätulo- ja normiavaruudet

1.1 Sisätuloavaruus/Inner product space

Määritelmä 1. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus*

$$\langle \ | \ \rangle \ : V \times V \to \mathbb{R}$$

on reaalinen sisätulo eli pistetulo/real inner product or dot product, jos

(a) $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle$ *(symmetrisyys);*

(b) $\langle v+u|w\rangle = \langle v|w\rangle + \langle u|w\rangle$*;*

(c) $\langle \lambda v|w\rangle = \lambda\langle v|w\rangle$*;*

(d) $\langle v|v\rangle > 0$*, kun* $v \neq \overline{0}$ *(positiividefiniittisyys)*

aina, kun $v, w, u \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Reaalinen sisätuloavaruus on pari/Real inner product space is a pair $(V, \langle \ | \ \rangle)$, missä V on vektoriavaruus ja $\langle \ | \ \rangle$ on sisätulo avaruudessa V. Yleensä tällöin sanotaan, että V on sisätuloavaruus/Usually we just say that V is an inner product space.

Vektoreiden v ja w sisätulolle $\langle v|w\rangle$ käytetään yleisesti merkintää $v \cdot w$ ja puhutaan pistetulosta./ It is usual to use the notation $v \cdot w$ and to use the phrase dot product for the inner product $\langle v|w\rangle$ of the vectors v ja w.

Lemma 1. *Reaalinen sisätulo on lineaarinen molempien argumenttiensa suhteen eli/*
A real inner product is linear with respect to both its arguments or

$$\langle \alpha v + \beta u|w\rangle = \alpha\langle v|w\rangle + \beta\langle u|w\rangle; \tag{1}$$

ja

$$\langle v|\alpha w + \beta z\rangle = \alpha\langle v|w\rangle + \beta\langle v|z\rangle; \tag{2}$$

$$\langle v+u|w+z\rangle = \langle v|w\rangle + \langle v|z\rangle + \langle u|w\rangle + \langle u|z\rangle \tag{3}$$

aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $v, u, w, z \in V$.

Todistus. Kohta (1): Käytetään ensin aksiomia b ja sitten aksiomia c, jolloin/ First we use the axiom b and then the axiom c, whereupon

$$V.P. = \langle \alpha v + \beta u|w\rangle = \langle \alpha v|w\rangle + \langle \beta u|w\rangle = \alpha\langle v|w\rangle + \beta\langle u|w\rangle = O.P.$$

□

Esimerkki 1. *Joukko* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *on reaalinen sisätuloavaruus, kun vektoreiden* $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo määritellään asettamalla/*
The set $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ *is a real inner product space when the dot product of the vectors* $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *is defined by setting*

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{4}$$

Todistus. Määritelmän 1 kohta a: Lasketaan/By computing

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \overline{y} \cdot \overline{x}. \quad \square$$

Kohta b: Lasketaan

$$\begin{aligned}(\overline{x} + \overline{z}) \cdot \overline{y} =& (x_1 + z_1, ..., x_n + z_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = \\ & \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i) y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i y_i = \\ & \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{z} \cdot \overline{y}. \quad \square\end{aligned}$$

Kohta c: Lasketaan

$$\begin{aligned}(\lambda \overline{x}) \cdot \overline{y} =& (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) = \\ & \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \\ & \lambda\, \overline{x} \cdot \overline{y}. \quad \square\end{aligned}$$

Kohta d: Olkoon $\overline{x} \neq \overline{0}$. Nyt ainakin yksi $x_k \neq 0$, jolloin $x_k^2 > 0$/Now at least one $x_k \neq 0$, whereupon $x_k^2 > 0$. Siten/Thus

$$\overline{x} \cdot \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq x_k^2 > 0. \quad \square \tag{5}$$

Huomautus 1. *Koska*

$$\overline{0} \cdot \overline{0} = 0, \tag{6}$$

niin avaruuden $\mathbb{R}^n$ *sisätulolle* (4) *pätee*

$$\overline{x} \cdot \overline{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = \overline{0}. \tag{7}$$

Seuraavassa todistetaan, että (7) *on voimassa yleisemminkin./*
Next it will be proved that (7) *in fact holds more generally.*

Lemma 2. *Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus/real inner product space ja $\overline{0} \in V$ nollavektori. Tällöin/Then*

$$\langle \overline{0} | v \rangle = \langle v | \overline{0} \rangle = 0 \quad \forall\ v \in V; \tag{8}$$

$$\langle v | v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \overline{0} \tag{9}$$

ja

$$\langle v | v \rangle \geq 0 \quad \forall\ v \in V. \tag{10}$$

Todistetaan aluksi tapaus/First we prove case (8):
Koska $\overline{0} = 0 \cdot \overline{0}$, niin aksiomin

$$\langle \lambda v | w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle$$

nojalla

$$\langle \overline{0} | v \rangle = \langle 0 \cdot \overline{0} | v \rangle = 0 \langle \overline{0} | v \rangle = 0 \quad \forall\ v \in V. \tag{11}$$

Käytetään sitten aksiomia/Then we use the axiom $\langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle$, jolloin/whereupon

$$\langle v | \overline{0} \rangle = \langle \overline{0} | v \rangle = 0 \quad \forall\ v \in V. \quad \square \tag{12}$$

Todistetaan seuraavaksi tapaus (9):
Tuloksen (8) erikoistapauksena

$$\langle \overline{0} | \overline{0} \rangle = 0. \tag{13}$$

Mutta aksiomin d mukaan

$$\langle v | v \rangle > 0, \quad \text{kun} \quad v \neq \overline{0}. \tag{14}$$

Siispä

$$\langle v | v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \overline{0}. \quad \square \tag{15}$$

Esimerkki 2. *Tarkastellaan kuvausta $\langle\ |\ \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, missä*

$$\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \tag{16}$$

kaikilla vektoreilla $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^4$.

Valitaan $\overline{x} = (1, 0, 0, 0)$, jolloin

$$\langle \overline{x} | \overline{x} \rangle = -1 < 0,$$

joten ehto Määritelmän 1 ehto d) ei ole voimassa. Siten kuvaus (16) *ei ole sisätulo.*

Kuvausta (16) kutsutaan Lorentzin indefiniitiksi sisätuloksi/Lorentzian Indefinite Inner Product, ehto d) ei siis ole voimassa indefiniitille sisätulolle.

Määritelmä 2. *Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus*

$$\langle \ | \ \rangle \ : V \times V \to \mathbb{C}$$

on Hermiten (kompleksinen) sisätulo eli pistetulo//Hermitian (complex) innerproduct or dot product, jos

(a) $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$ *(konjugaatti-symmetrisyys);*

(b) $\langle v+u|w\rangle = \langle v|w\rangle + \langle u|w\rangle$*;*

(c) $\langle \lambda v|w\rangle = \lambda\langle v|w\rangle$*;*

(d) $\langle v|v\rangle > 0$*, kun* $v \neq \overline{0}$ *(positiividefiniittisyys)*

aina, kun $v, w, u \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$.

Merkintä $\overline{z}$ tarkoittaa kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ kompleksikonjugaattia/denotes the complex conjugate.

Esimerkki 3. *Joukko $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ on kompleksinen sisätuloavaruus, kun vektoreiden $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$ pistetulo määritellään asettamalla*

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \overline{w_i}. \tag{17}$$

Todistetaan Määritelmän 2 kohta a: Lasketaan/By computing

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{w} \cdot \mathbf{z}} &= \overline{\sum_{i=1}^{n} w_i \, \overline{z_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i \, \overline{z_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} \, \overline{\overline{z_i}} = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \overline{w_i} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}. \quad \square \end{aligned} \tag{18}$$

Lemma 3. *Olkoon V kompleksinen sisätuloavaruus ja $\overline{0} \in V$ nollavektori. Tällöin*

$$\langle \overline{0}|v\rangle = \langle v|\overline{0}\rangle = 0 \quad \forall \ v \in V; \tag{19}$$

$$\langle v|v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \overline{0}; \tag{20}$$

ja

$$\langle v|v\rangle \geq 0 \quad \forall \ v \in V. \tag{21}$$

Todistetaan aluksi tapaus (19):
Koska $\overline{0} = 0 \cdot \overline{0}$, niin aksiomin

$$\langle \lambda v | w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle$$

nojalla

$$\langle \overline{0} | v \rangle = \langle 0 \cdot \overline{0} | v \rangle = 0 \langle \overline{0} | v \rangle = 0 \quad \forall \ v \in V. \tag{22}$$

Otetaan tuloksesta (22) kompleksikonjugaatit, jolloin saadaan

$$\overline{\langle \overline{0} | v \rangle} = 0 \quad \forall \ v \in V. \tag{23}$$

Käytetään sitten aksiomia $\langle v | w \rangle = \overline{\langle w | v \rangle}$, jolloin

$$\langle v | \overline{0} \rangle = \overline{\langle \overline{0} | v \rangle} = 0 \quad \forall \ v \in V. \quad \square \tag{24}$$

Todistetaan seuraavaksi tapaus (20):
Tuloksen (19) erikoistapauksena

$$\langle \overline{0} | \overline{0} \rangle = 0. \tag{25}$$

Mutta aksiomin d mukaan

$$\langle v | v \rangle > 0, \quad \text{kun} \quad v \neq \overline{0}. \tag{26}$$

Siispä

$$\langle v | v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \overline{0}. \quad \square \tag{27}$$

Esimerkki 4. *Vektoriavaruuteen*

$$\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \ \textit{on jatkuva} \},$$

missä $a < b$, saadaan (reaalinen) sisätulo asettamalla

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt \tag{28}$$

kaikilla $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

Todistus. Aluksi todetaan, että suppeneva reaalinen integraali on reaaliluku. Määritelmän 1 kohdat b ja c seuraavat integraalin lineaarisuudesta seuraavasti

$$\langle \alpha f + \beta h | g \rangle = \int_a^b (\alpha f + \beta h)(t) g(t) dt =$$
$$\alpha \int_a^b f(t) g(t) dt + \beta \int_a^b h(t) g(t) dt = \alpha \langle f | g \rangle + \beta \langle h | g \rangle. \quad \square$$

Kohta d. Olkoon $f \neq \mathcal{O}$. Tällöin $f(t)^2 \geq$ vakio > 0, jollain välillä $[c,d] \subseteq [a,b]$. Siten

$$\langle f | f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt > 0. \quad \square \tag{29}$$

Esimerkki 5. *Vektoriavaruuteen*

$$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$

missä $a < b$, saadaan Hermiten sisätulo asettamalla

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \tag{30}$$

kaikilla $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.

Esimerkki 6. *Esimerkin 4 kuvaus ei ole sisätulo avaruudessa $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$, sillä funktiolle*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = a \\ 0, & \text{kun } x \in]a,b] \end{cases}$$

pätee $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ ja $f \neq 0$, mutta

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b f^2(t)dt = 0.$$

1.2 Normiavaruus

Määritelmä 3. *Olkoon V vektoriavaruus kunnan $K = \mathbb{R}$ tai $K = \mathbb{C}$ yli. Kuvaus*

$$\|\ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

on normi, jos

(a) $\|v\| \geq 0 \quad \forall\ v \in V$;

(b) $\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \overline{0}$;

(c) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \quad \forall\ v \in V$ *ja* $\lambda \in K$;

(d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall\ v, w \in V$ *(kolmioepäyhtälö).*

Normiavaruus on pari $(V, \|\ \|)$, missä V on vektoriavaruus ja $\|\ \|$ on normi avaruudessa V. Tällöin sanotaan lyhyesti, että V on normiavaruus.

Tärkeitä normiavaruuksia ovat sisätuloavaruudet, nimittäin sisätulon avulla saadaan normi.

Lause 1. *Olkoon V sisätuloavaruus. Määritellään kuvaus*

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R}$$

asettamalla

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\langle v|v\rangle} \quad v \in V. \tag{31}$$

Tällöin $\| \ \|$ on normi.

Todistus. Koska

$$v \cdot v \geq 0 \quad \forall v \in V, \tag{32}$$

niin neliöjuuren arvo on reaaliluku ja

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{33}$$

Siten saadaan kuvaus

$$\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

joka todistaa myös normin Määritelmän 3 kohdan a. □

Kohta b:
Tuloksen (20) nojalla

$$v \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \overline{0}, \tag{34}$$

joten

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \overline{0}. \quad \square \tag{35}$$

Kohta c: Aluksi reaalinen tapaus.
Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$. Lasketaan

$$\|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda v) \cdot (\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 v \cdot v} = |\lambda|\sqrt{v \cdot v} = |\lambda|\|v\|. \quad \square$$

Vielä kompleksitapaus.
Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$. Lasketaan

$$\|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda v) \cdot (\lambda v)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda} v \cdot v} =$$
$$= \sqrt{|\lambda|^2 v \cdot v} = |\lambda|\sqrt{v \cdot v} = |\lambda|\|v\|. \quad \square$$

Ennen kolmioepäyhtälön todistusta esitetään Cauchy-Schwarzin epäyhtälö.

Lause 2. *Kuvaukselle* (31) *pätee Cauchy-Schwarzin epäyhtälö*

$$|v \cdot w| \leq \|v\|\|w\| \tag{36}$$

kaikilla $v, w \in V$.

Todistus. Aluksi huomataan, että epäyhtälö (36) on voimassa, jos $v = \overline{0}$ tai $w = \overline{0}$.
Olkoon sitten $v \neq \overline{0}$ ja $w \neq \overline{0}$.

1) Reaalinen tapaus: Kirjoitetaan nyt

$$z := \|w\|^2 v - (v \cdot w)w.$$

Tällöin

$$z \cdot w = \|w\|^2 v \cdot w - (v \cdot w)w \cdot w = (v \cdot w)(\|w\|^2 - \|w\|^2) = 0, \tag{37}$$

joten myös $w \cdot z = 0$.

Siten

$$\begin{aligned}\|w\|^4\|v\|^2 = \|w\|^2 v \cdot \|w\|^2 v = (z + (v \cdot w)w) \cdot (z + (v \cdot w)w) = \\ z \cdot z + (v \cdot w)z \cdot w + (v \cdot w)w \cdot z + (v \cdot w)^2 w \cdot w = \\ \|z\|^2 + |v \cdot w|^2\|w\|^2 \geq |v \cdot w|^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\|w\|^2\|v\|^2 \geq |v \cdot w|^2$$

ja edelleen (36). □

2) Kompleksinen tapaus: Kirjoitetaan nytkin

$$z := \|w\|^2 v - (v \cdot w)w.$$

Tällöinkin

$$z \cdot w = \|w\|^2 v \cdot w - (v \cdot w)w \cdot w = (v \cdot w)(\|w\|^2 - \|w\|^2) = 0, \tag{38}$$

joten myös $w \cdot z = \overline{z \cdot w} = 0$.

Siten

$$\begin{aligned}\|w\|^4\|v\|^2 = \|w\|^2 v \cdot \|w\|^2 v = (z + (v \cdot w)w) \cdot (z + (v \cdot w)w) = \\ z \cdot z + (v \cdot w)z \cdot w + (v \cdot w)w \cdot z + v \cdot w\,\overline{v \cdot w}\,w \cdot w = \\ \|z\|^2 + |v \cdot w|^2\|w\|^2 \geq |v \cdot w|^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\|w\|^2\|v\|^2 \geq |v \cdot w|^2$$

ja edelleen (36). □

Nyt voidaan todistaa Määritelmän 3 kohta d: Aluksi reaalinen tapaus. Tarkastellaan lauseketta

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + v\cdot w + w\cdot v + w\cdot w = \\ \|v\|^2 + 2v\cdot w + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|v\cdot w| + \|w\|^2 \leq \\ \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

mistä saadaan

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

aina, kun $v, w \in V$. □

Sitten kompleksitapaus, missä tarvitaan tulosta

$$z + \overline{z} \leq 2|z|. \tag{39}$$

Nyt

$$\|v+w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) = v\cdot v + v\cdot w + w\cdot v + w\cdot w = \\ \|v\|^2 + v\cdot w + \overline{v\cdot w} + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|v\cdot w| + \|w\|^2 \leq \\ \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

mistä saadaan

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

aina, kun $v, w \in V$. □

Seurauksena saadaan sisätulonormin kolmioepäyhtälöt

Lemma 4. *Sisätulonormille pätee*

$$\big|\, \|v\| - \|w\| \,\big| \leq \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \tag{40}$$

Esimerkki 7.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ vektorin $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ sisätulonorminormi

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \tag{41}$$

antaa vektorin pituuden (Eukleideen pituuden).

Lauseen 1 mukaan sisätulonormi ja siten myös Eukleideen pituus-funktio (41) toteuttavat normin aksiomit - erityisesti kolmioepäyhtälön

$$\big|\, \|\overline{x}\| - \|\overline{y}\| \,\big| \leq \|\overline{x}+\overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\| \tag{42}$$

- lisäksi pätee Cauchy-Schwarzin epäyhtälö

$$|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq \|\overline{x}\| \|\overline{y}\|. \tag{43}$$

Consequences of the inequality

$$|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq \|\overline{x}\| \|\overline{y}\|. \tag{44}$$

Substituting $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ and $\overline{y} = (y_1, ..., y_n)$ into (44) gives

$$|x_1 y_1 + ... + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}; \tag{45}$$

$$(x_1 y_1 + ... + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + ... + x_n^2)\,(y_1^2 + ... + y_n^2); \tag{46}$$

$$\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}. \tag{47}$$

Esimerkki 8.

Avaruudessa $\mathbb{R}^2$ vektorin (x, y) Eukleideen pituus

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{48}$$

antaa (suorakulmaisen) nelikulmion lävistäjän pituuden sekä yleistää perinteisen Pythagoraan lauseen.

Cauchy-Schwarzin seurauksia

$$(a\alpha + b\beta)^2 \leq (a^2 + b^2)\,(\alpha^2 + \beta^2); \tag{49}$$

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \tag{50}$$

Esimerkki 9.

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ vektorin (x, y, z) Eukleideen pituus

$$\|(x, y, y)\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{51}$$

antaa (suorakulmaisen) suuntaissärmiön lävistäjän pituuden yleistäen kaksiulotteisen Pythagoraan lauseen.

Cauchy-Schwarzin seurauksia

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2); \tag{52}$$

$$\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \tag{53}$$

Esimerkki 10.

Vektoriavaruudessa

$$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$

missä $a < b$, saadaan (reaalinen) sisätulonormi asettamalla

$$\|f\| := \sqrt{\langle f|f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}. \tag{54}$$

Tällöin pätee Cauchy-Schwarzin epäyhtälö

$$|\langle f|g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$$

eli

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}. \tag{55}$$

Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus. Jos $v, w \in V \setminus \{\overline{0}\}$, niin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$-1 \leq \frac{\langle v|w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1 \tag{56}$$

Tämä antaa mahdollisuuden määritellä vektorien v ja w välinen kulma α asettamalla

$$\cos\alpha = \frac{\langle v|w\rangle}{\|v\|\|w\|}. \tag{57}$$

Tällöin kosinilause saadaan yleistettyä sisätuloavaruuksiin.

Lemma 5. *Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus ja $v, w \in V \setminus \{\overline{0}\}$. Tällöin*

$$\begin{aligned}\|v - w\|^2 &= \langle v - w|v - w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v|w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \, \|w\| \cos\alpha.\end{aligned}$$

Määritelmä 4. *Olkoon V normiavaruus ja $\emptyset \neq S \subseteq V$. Tällöin pisteen $t \in V$ etäisyys joukosta S on/Now the distance of the point $t \in V$ from the set S is*

$$\inf_{s \in S} \|t - s\|. \tag{58}$$

Esimerkki 11. *Pisteen t etäisyys pisteestä s/The distance of the point t from the point s. Nyt $S = \{s\}$, joten*

$$\inf_{s \in S} \|t - s\| = \|t - s\|. \tag{59}$$

Lauseke $\|t - s\|$ antaa vektoreiden t ja s välisen etäisyyden./ The expression $\|t - s\|$ gives the distance between the vectors t and s.

On olemassa muitakin kuin sisätulonormeja. Esimerkiksi p-normit:

$$\|\overline{x}\|_p = (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{60}$$

$p = 1$:

$$\|\overline{x}\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{61}$$

$p = 2$:

$$\|\overline{x}\|_2 = \left(|x_1|^2 + ... + |x_n|^2\right)^{1/2}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{62}$$

$p = \infty$:

$$\|\overline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{63}$$

HUOM: $\| \;\|_2$ on kuitenkin sisätulonormi.

1.3 Ortogonaalisuus

Määritelmä 5. *Olkoon V sisätuloavaruus ja $v, w \in V$. Vektorit v ja w ovat ortogonaaliset/orthogonal, jos*

$$\langle v|w\rangle = 0.$$

Tällöin käytetään merkintää $v \perp w$.
Epätyhjä joukko $T \subseteq V$ on ortogonaalinen, jos

$$\begin{aligned} &\overline{0} \notin T; \\ &v \perp w \quad \forall\, v, w \;\in T,\; v \neq w. \end{aligned}$$

Epätyhjä joukko $T \subseteq V$ on ortonormaali/orthonormal, jos se on ortogonaalinen ja $\|v\| = 1$ kaikilla $v \in T$.

Vektorit v ja w ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan; Vektori v on kohtisuorassa vektoria w vastaan;

Esimerkki 12. *Koska*

$$\langle \overline{0}|w\rangle = 0 \quad \forall w \;\in V \quad \textit{eli} \quad \overline{0} \perp w \quad \forall\, w \in V,$$

niin nollavektori on kohtisuorassa kaikkia avaruuden vektoreita vastaan.

Edelleen, koska nollavektorin sisältävä joukko on lineaarisesti sidottu, niin nollavektoria ei haluta mukaan ortogonaaliseen joukkoon. Nimittäin, ortogonaalisista joukoista on tarkoitus muodostaa kantoja, joiden on syytä olla lineaarisesti vapaita.

Olkoon K kunta ja $n \in \mathbb{Z}^+$, tällöin K^n on lineaariavaruus kunnan K yli.

Merkitään

$$\overline{e}_k = (0, ..., 1, ..., 0) \in K^n,$$

missä k:s koordinaatti on 1 ja muut nollia aina, kun $k = 1, 2, ..., n$. Tiedetään, että vektorit $\overline{e}_1$, ..., $\overline{e}_n$ ovat lineaarisesti vapaita kunnan K yli.

Olkoon nyt $K^n = \mathbb{R}^n$, missä sisätulona on (4) tai $K^n = \mathbb{C}^n$, missä sisätulona on (17).

Esimerkki 13. *Luonnollisen kannan vektoreiden muodostama joukko/The set of standard base vectors*

$$E_n := \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\} \tag{64}$$

on ortonormaali.

Esimerkki 14. *Tarkastellaan vektoriavaruuden*

$$\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R}) = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$

sisätuloa

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt. \tag{65}$$

Lasketaan

$$\langle 1|t\rangle = \int_{-1}^{1} tdt = 0, \tag{66}$$

joten funktiot 1 *ja* t *ovat kohtisuorassa ja joukko* $\{1, t\}$ *on ortogonaalinen. Lasketaan normit*

$$\|1\| = \sqrt{2}, \quad \|t\| = \sqrt{2/3}. \tag{67}$$

Siten joukko $\{1, t\}$ *ei ole ortonormaali.*

Lause 3. *Olkoot V (reaalinen tai kompleksinen) sisätuloavaruus ja $S \subseteq V$ ortogonaalinen. Tällöin S on lineaarisesti riippumaton/S is linearly independent. Erityisesti ortonormaali joukko on lineaarisesti riippumaton/In particular, an orthonormal set is linearly independent.*

Muistettakoon, että nollavektori ei kuulu ortogonaaliseen joukkoon/Let us remember that the zero-vector does not belong to an orthonormal set.

Todistus. Tutkitaan joukon S äärellistä osajoukkoa $J := \{s_1, ..., s_n\}$, jonka alkioille $s_1, ..., s_n \in S$ siis pätee $s_k \cdot s_l = 0$ aina, kun $k \neq l$.

Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi:

$$a_1 s_1 + ... + a_n s_n = \overline{0}.$$

Ottamalla sisätulo vektorin s_1 kanssa saadaan

$$a_1 s_1 \cdot s_1 + ... + a_n s_n \cdot s_1 = \overline{0} \cdot s_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 s_1 \cdot s_1 = 0. \tag{68}$$

Koska $s_1 \neq \overline{0}$, niin $s_1 \cdot s_1 > 0$ sisätulon aksiomin d nojalla, joten $a_1 = 0$.

Edetään induktiolla tulokseen $a_1 = ... = a_n = 0$, joka todistaa joukon J lineaarisen vapauden.

Siten kaikki joukon S äärelliset osajoukot ovat lineerisesti vapaita, joten määritelmän nojalla S on lineaarisesti vapaa. $\square$

Määritelmä 6. *Sisätuloavaruuden V osajoukko S on avaruuden V ortogonaalinen/ortonormaali kanta, jos S on ortogonaalinen/ortonormaali ja avaruuden V kanta.*

Esimerkki 15. *1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta $\{e_1, \ldots, e_n\}$ on ortonormaali kanta.*
2. Avaruuden $\mathbb{C}^n$ luonnollinen kanta $\{e_1, \ldots, e_n\}$ on ortonormaali kanta.

Ortonormitus tarkoittaa annetun vektorin jakamista sen normilla, jolloin tuloksena saadaan vektori, jonka pituus on 1.

Lemma 6. *Olkoon V normiavaruus ja $v \in V, v \neq \overline{0}$. Tällöin*

$$f := v/\|v\| \quad \Rightarrow \quad \|f\| = 1. \tag{69}$$

Todistus.

$$\|f\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1. \quad \square$$

Lause 4. *Oletetaan, että $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ on sisätuloavaruuden V ortogonaalinen kanta. Tällöin vektorin $v \in V$ koordinaatit kannassa S saadaan kaavasta*

$$\lambda_i = \frac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} \tag{70}$$

kaikilla $1 \leq i \leq n$. Erityisesti jos S on ortonormaali, niin $\lambda_i = v \cdot v_i$.

Todistus. Vektorilla v on kannassa $\{v_1, \ldots, v_n\}$ esitys

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n.$$

Ottamalla sisätulo

$$v \cdot v_i = \lambda_1 v_1 \cdot v_i + ... + \lambda_i v_i \cdot v_i + ... + \lambda_n v_n \cdot v_i = \lambda_i v_i \cdot v_i$$

saadaan väite (70). □

Esimerkki 16. *Joukko* $\{s_1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2, s_2 = \overline{e}_1 - \overline{e}_2\}$ *on avaruuden* $\mathbb{R}^2$ *ortogonaalinen kanta. Mitkä ovat vektorin* $v = (2, 3)$ *koordinaatit kannassa* $\{s_1, s_2\}$*?*
Ratkaisu: Kirjoitetaan $v = as_1 + bs_2$*. Ottamalla sisätulo*

$$v \cdot s_1 = as_1 \cdot s_1 + bs_2 \cdot s_1 = as_1 \cdot s_1 \tag{71}$$

ja sijoittamalla saadaan

$$(2, 3) \cdot (1, 1) = a(1, 1) \cdot (1, 1) \quad \Rightarrow \quad a = 5/2. \tag{72}$$

Vastaavasti $b = -1/2$*. Siten*

$$v = \frac{5}{2} s_1 + \left(-\frac{1}{2}\right) s_2. \tag{73}$$

Lause 5. *Oletetaan, että* $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *on sisätuloavaruuden* V *ortonormaali kanta. Tällöin kaikilla* $v, w \in V$ *pätee Parsevalin yhtälö*

$$\langle v|w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v|v_i\rangle \langle v_i|w\rangle. \tag{74}$$

Lause 6. *Oletetaan, että* $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *on sisätuloavaruuden* V *ortonormaali kanta. Jos vektorilla* v *on kannassa* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *esitys*

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n,$$

niin

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle v|v_i\rangle|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2}. \tag{75}$$

1.4 Gram-Schmidt

Lause 7. *Olkoot V sisätuloavaruus ja $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ lineaarisesti riippumaton. Tällöin on olemassa sellainen ortogonaalinen joukko/Then there exists an orthogonal set $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq V$, että/such that*

$$\langle w_1, \ldots, w_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle. \tag{76}$$

Todistus. Suoritetaan Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmä/let us carry out Gram-Schmidt orthogonalization:
Asetetaan

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1, \\
w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 \\
w_3 &= v_3 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 \\
&\ldots \\
w_k &= v_k - \frac{v_k \cdot w_{k-1}}{w_{k-1} \cdot w_{k-1}} w_{k-1} - \ldots - \frac{v_k \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1.
\end{aligned}$$

Tällöin esimerkiksi

$$\begin{aligned}
w_2 \cdot w_1 &= v_2 \cdot w_1 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 \cdot w_1 = 0, \\
w_3 \cdot w_1 &= v_3 \cdot w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 \cdot w_1 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 \cdot w_1 = \\
&\quad v_3 \cdot w_1 - 0 - v_3 \cdot w_1 = 0.
\end{aligned}$$

Yleisemmin induktiolla. Olkoon $\ell \geq 2$.
Induktio-oletus/Induction assumption: Olkoot $w_i \cdot w_j = 0$ aina, kun $\ell > i > j$.
Induktioaskel/Induction step: Lasketaan sisätulo

$$w_\ell \cdot w_i = v_\ell \cdot w_i - 0 - \ldots - 0 - \frac{v_\ell \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} w_i \cdot w_i - 0 - \ldots - 0 = 0. \quad \square$$

Lause 8. *Jokaisella äärellisulotteisella sisätuloavaruudella $V \neq \{\overline{0}\}$ on ortonormaali kanta./Every finite dimensional inner product space has an orthonormal basis.*

Esimerkki 17.

Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreita

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,-1,1,-1), \\ v_2 &= (5,1,1,1) \text{ ja} \\ v_3 &= (-3,-3,1,-3). \end{aligned}$$

Etsitään aliavaruudelle $H = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ortonormaali kanta/Let us find an orthonormal basis for the subspace $H = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Käytetään Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmää, jolloin

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1,-1,1,-1), \\ w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 \\ &= (5,1,1,1) - \frac{5-1+1-1}{1+1+1+1}(1,-1,1,-1) \\ &= (4,2,0,2), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 \\ &= v_3 - \frac{-12-6+0-6}{16+4+0+4} w_2 - \frac{-3+3+1+3}{4} w_1 \\ &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Koska $w_3 = 0$, niin $\{v_1, v_2, v_3\}$ on lineaarisesti riippuva. Ylläolevasta nähdään, että vektori v_3 on lineaarikombinaatio vektoreista v_1 ja v_2, joten $H = \langle v_1, v_2 \rangle$. Nyt $\{v_1, v_2\}$ on lineaarisesti riippumaton, joten $\{w_1, w_2\}$ on avaruuden H ortogonaalinen kanta. Normittamalla vektorit saadaan ortonormaali kanta $\{f_1, f_2\}$, missä

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) \text{ ja} \\ f_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}}(4,2,0,2) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}} \right). \end{aligned}$$

1.5 Ortogonaalikomplementti

Määritelmä 7. *Olkoon V sisätuloavaruus ja $\emptyset \neq A \subseteq V$. Osajoukon A ortogonaalikomplementti on osajoukko*

$$A^{\perp} = \{ b \in V \mid \langle b | \, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A \}.$$

Ortogonaalikomplementti, ortogonaalinen komplementti, kohtisuora komplementti

Merkintä 1.

$$h \perp A \quad \Leftrightarrow \quad h \in A^{\perp}.$$

Esimerkki 18. *Olkoon* $A = \{(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. *Muodostetaan/Let us construct*

$$A^{\perp} = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 |\ (b_1, b_2) \cdot (1,0) = 0\}.$$

Nyt

$$(b_1, b_2) \cdot (1,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = 0,\ b_2 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$
$$(b_1, b_2) = (0, b_2) = b_2(0,1).$$

Siten

$$A^{\perp} = \{b_2(0,1) \mid b_2 \in \mathbb{R}\},$$

joka on yksiulotteinen aliavaruus/one dimensional subspace (origon kautta kulkeva suora).

Lemma 7. *Olkoon* V *sisätuloavaruus ja* A *avaruuden* V *aliavaruus. Tällöin ortogonaalikomplementti* $A^{\perp}$ *on* V*:n aliavaruus.*

Esimerkki 19.

$$\{\overline{0}\}^{\perp} = V, \tag{77}$$
$$V^{\perp} = \{\overline{0}\}. \tag{78}$$

Lemma 8. *Olkoon* V *sisätuloavaruus ja* A *avaruuden* V *aliavaruus. Tällöin*

$$A \cap A^{\perp} = \{\overline{0}\}. \tag{79}$$

Edelleen, jos $\dim_K V = n$ *ja* $\dim_K A = k$, *niin*

$$\dim_K A^{\perp} = n - k. \tag{80}$$

Määritelmä 8. *Olkoon* V *sisätuloavaruus,* $t \in V$ *ja* A *aliavaruus.*
Pisteen t *kohtisuora projektio* $PROJ_A(t) = p$ *aliavaruudelle* A *on yksikäsitteinen piste* p*, joka toteuttaa ehdot*

$$\begin{cases} p \in A; \\ p + h = t; \\ h \in A^{\perp}. \end{cases} \tag{81}$$

Esimerkki 20. *Olkoon* $V = \mathbb{R}^3$ *ja* $A = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2 \rangle$. *Etsitään pisteen* $t = \overline{e}_2 + \overline{e}_3$ *kohtisuora projektio aliavaruudelle* A. *Nyt*

$$A^\perp = \{\overline{b} \in \mathbb{R}^3 |\ \overline{b} \cdot \overline{a} = 0 \quad \forall \overline{a} \in A\} = ... = \{b_3 \overline{e}_3 |\ b_3 \in \mathbb{R}\}. \tag{82}$$

Siten projektiehdoista

$$\begin{cases} p = a_1 \overline{e}_1 + a_2 \overline{e}_2 \in A; \\ p + h = t = \overline{e}_2 + \overline{e}_3; \\ h = b_3 \overline{e}_3 \in A^\perp \end{cases} \tag{83}$$

saadaan

$$p \cdot \overline{e}_3 = 0 \ \Rightarrow \ h \cdot \overline{e}_3 = t \cdot \overline{e}_3 \ \Rightarrow \ b_3 = 1 \ \Rightarrow \ p = \overline{e}_2. \tag{84}$$

Palataan hetkeksi Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmän, Lauseen 7 pariin.

Olkoon V sisätuloavaruus ja $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ lineaarisesti riippumaton. Olkoon $j \leq k - 1$ ja $\{w_1, \dots, w_j\}$ ortogonaalinen V:n osajoukko sekä

$$A := \langle w_1, \dots, w_j \rangle.$$

Muodostetaan alkio $w_{j+1} = h \in A^\perp$ seuraavasti. Valitaan alkio $v_{j+1} = t \notin A$ ja asetetaan:

$$\begin{cases} p \in A; \\ p + h = t; \\ h \in A^\perp. \end{cases} \tag{85}$$

Tällöin

$$\begin{cases} p = \beta_1 w_1 + ... + \beta_j w_j; \\ p + h = t; \\ h \cdot w_1 = ... = h \cdot w_j = 0; \\ w_i \cdot w_l = 0, \quad i \neq l. \end{cases} \tag{86}$$

Joten

$$\begin{aligned} 0 = h \cdot w_l = (t - p) \cdot w_l \quad &\Rightarrow \\ t \cdot w_l = p \cdot w_l = (\beta_1 w_1 + ... + \beta_j w_j) \cdot w_l = \beta_l w_l \cdot w_l \quad &\Rightarrow \\ \beta_l = \frac{t \cdot w_l}{w_l \cdot w_l}. \end{aligned} \tag{87}$$

Niinpä saadaan uusi kohtisuora vektori

$$w_{j+1} := h = t - p = v_{j+1} - \frac{v_{j+1} \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - ... - \frac{v_{j+1} \cdot w_j}{w_j \cdot w_j} w_j. \tag{88}$$

1.6 Hypertaso

Määritelmä 9. *Olkoon V lineaariavaruus kunnan K yli ja* $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$.
Hypertaso H on V:n $(k-1)$-ulotteinen aliavaruus.
Affiini hypertaso on muotoa $w + H$, missä H on hypertaso ja $w \in V$.
Jos hypertason H dimensio on $k-1$, niin tällöin sanotaan, että myös affiinin hypertason $w + H$ dimensio on $k-1$.

Jos $\dim_K V = 2$, niin hypertaso on origon kautta kulkeva suora.
Jos $\dim_K V = 3$, niin hypertaso on origon kautta kulkeva taso.
Jos $\dim_K V = 4$, niin hypertaso on origon kautta kulkeva 3-ulotteinen aliavaruus eli hypertaso.

Lemma 9. *Olkoon $n \in V \setminus \{\overline{0}\}$ annettu ja* $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$. *Tällöin joukko*

$$N := \{x \in V \mid n \cdot x = 0\} \tag{89}$$

muodostaa $(k-1)$-ulotteisen hypertason ja joukko

$$x_0 + N = \{x \in V \mid n \cdot (x - x_0) = 0\} \tag{90}$$

muodostaa $(k-1)$-ulotteisen affiinin hypertason.

Olkoon seuraavassa $e_1, ..., e_k$ avaruuden V ortonormaali kanta ja vektoreiden n ja x esitykset siinä:

$$n = n_1 e_1 + ... + n_k e_k = (n_1, ..., n_k), \tag{91}$$
$$x = x_1 e_1 + ... + x_k e_k = (x_1, ..., x_k) \tag{92}$$

vastaavine koordinaattiesityksineen.

Todistus. Joukolle (89) saadaan koordinaattiesitys

$$N := \{x = (x_1, ..., x_k) \mid n_1 x_1 + ... + n_k x_k = 0\}, \tag{93}$$

missä ehdon $n \neq \overline{0}$ nojalla ainakin yksi koordinaatti $n_j \neq 0$, olkoon vaikka $n_1 \neq 0$. Siten

$$x_1 = \frac{-1}{n_1}(n_2 x_2 + ... + n_k x_k) \tag{94}$$

ja edelleen

$$x = x_1 e_1 + ... + x_k e_k = x_2\left(\frac{-n_2}{n_1} e_1 + e_2\right) + ... + x_k\left(\frac{-n_k}{n_1} e_1 + e_k\right) := x_2 f_2 + ... + x_k f_k. \tag{95}$$

Niinpä

$$N = \langle f_2, ..., f_k \rangle, \tag{96}$$

missä $f_2, ..., f_k$ on lineaarisesti vapaa ja siten kanta ja $\dim_K N = k - 1$. $\square$

Lemma 10. *Olkoon* $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$. *Tällöin* V*:n hypertaso* H *voidaan esittää muodossa*

$$H = \{x \in V \mid n \cdot x = 0\} \tag{97}$$

jollakin $n \in V \setminus \{\overline{0}\}$ *sekä vastaava affiini hypertaso* $x_0 + H$ *muodossa*

$$x_0 + H = \{x \in V \mid n \cdot (x - x_0) = 0\}. \tag{98}$$

Todistus. Hypertaso on $(k-1)$-ulotteinen aliavaruus, joten on olemassa sellainen ortonormaali joukko $g_1, ..., g_{k-1}$, että

$$H = \langle g_1, ..., g_{k-1} \rangle, \quad \dim_K H = k - 1. \tag{99}$$

Edelleen on olemassa $g_k \notin H$, $g_k \in V$. Lauseen I:7 kohdan (53) nojalla $g_1, g_2, ..., g_k$ on lineaarisesti vapaa ja siten V:n kanta, joka ortonormitetaan tarvittaessa ja käytetään samoja merkintöjä. Niinpä, jos $x \in H$, niin

$$x = \beta_1 g_1 + ... + \beta_{k-1} g_{k-1} + 0 \cdot g_k. \tag{100}$$

Valitaan $n = 0 \cdot g_1 + ... + 0 \cdot g_{k-1} + 1 \cdot g_k$, jolloin

$$n \cdot x = 0. \quad \square \tag{101}$$

Tutkitaan seuraavaksi pisteen $t \in V$ etäisyyttä hypertasosta H. Voidaan osoittaa, että pisteen etäisyys hypertasosta on kohtisuora etäisyys.

Lemma 11. *Olkoon* $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$ *ja* $n \in V \setminus \{\overline{0}\}$. *Tällöin hypertason*

$$H = \{x \in V \mid n \cdot x = 0\} \tag{102}$$

ja pisteen $t \in V$ *välinen etäisyys* ℓ *saadaan kaavasta*

$$\ell = \frac{|n \cdot t|}{\|n\|} \tag{103}$$

Todistus. Ortonormitetaan n: $\hat{n} = n/\|n\|$. Koska $\hat{n} \perp H$, niin etäisyys ℓ on vektorin $\alpha\hat{n}$ pituus $|\alpha|$, missä $\alpha\hat{n}$ on vektorin t ja sen H:lla olevan projektion $p \in H$ välinen "etäisyysvektori" eli $t - p = \alpha\hat{n}$. Koska $p \perp \hat{n}$ ja $p = t - \alpha\hat{n}$, niin

$$0 = p \cdot \hat{n} = (t - \alpha\hat{n}) \cdot \hat{n} = t \cdot \hat{n} - \alpha\hat{n} \cdot \hat{n} = t \cdot \hat{n} - \alpha. \tag{104}$$

Siten

$$\alpha = t \cdot \hat{n} = \frac{t \cdot n}{\|n\|}. \quad \square \tag{105}$$

Affiini hypertaso voidaan kirjoittaa muodossa

$$x_0 + H = \{x \in V \mid n \cdot x = b\}, \quad b = n \cdot x_0. \tag{106}$$

Lemma 12. *Olkoon* $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$ *ja* $n \in V \setminus \{\bar{0}\}$*. Tällöin affiinin hypertason*

$$x_0 + H = \{x \in V \mid n \cdot (x - x_0) = 0\} \tag{107}$$

ja pisteen $t \in V$ *välinen etäisyys* ℓ *saadaan kaavasta*

$$\ell = \frac{|n \cdot (t - x_0)|}{\|n\|} = \frac{|n \cdot t - b|}{\|n\|} \tag{108}$$

Esimerkki 21.

Olkoon $V = \mathbb{R}^3$, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $w = (x, y, z)$ ja $w_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Nyt affiini hypertaso on muotoa

$$w_0 + H = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid n \cdot (w - w_0) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid n_1 x + n_2 y + n_3 z = b := n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0\}. \tag{109}$$

Affiinin hypertason ja pisteen $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ välinen etäisyys ℓ saadaan kaavasta

$$\ell = \frac{|n \cdot (t - w_0)|}{\|n\|} = \frac{|n_1(t_1 - x_0) + n_2(t_2 - y_0) + n_3(t_3 - z_0)|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{|n_1 t_1 + n_2 t_2 + n_3 t_3 - b|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}. \tag{110}$$