802320A LINEAARIALGEBRA OSA I
LINEAR ALGEBRA PART I

Tapani Matala-aho

MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO
KEVT 2020

Contents

1 Lineaariavaruus eli Vektoriavaruus

1.1 Määritelmä ja esimerkkejä

Olkoon K kunta, jonka nolla-alkio on 0 ja ykkösalkio on 1 sekä V epätyhjä joukko/non-empty set. Oletetaan, että joukossa V on määritelty laskutoimitus $+$ eli kuvaus

$$+ : V \times V \to V, \quad (v, w) \to v + w,$$

missä $v + w \in V$, kun $v \in V$ ja $w \in V$ sekä

laskutoimitus $\cdot$ eli kuvaus

$$\cdot : K \times V \to V, \quad (k, v) \to k \cdot v,$$

missä $k \cdot v \in V$, kun $k \in K$ ja $v \in V$.

Esimerkki 1. *Olkoon* $K = \mathbb{R}$*,* $V = \mathbb{R}^2$*,* $v = (1, -2)$*,* $w = (-2, 1)$ *ja* $k = -3$*. Nyt*

$$+ : \ (v, w) \to v + w = (1, -2) + (-2, 1) = (-1, -1); \tag{1}$$

$$\cdot : \ (k, v) \to k \cdot v = (-3) \cdot (1, -2) = (-3, 6). \tag{2}$$

Siten pari $v = (1, -2)$, $w = (-2, 1)$ kuvautuu alkioksi $(-1, -1)$ ja pari $k = -3$, $v = (1, -2)$ kuvautuu alkioksi $(-3, 6)$.

Määritelmä 1.

Pari (K, V) on K-kertoiminen lineaariavaruus eli vektoriavaruus, jos laskutoimitukset toteuttavat seuraavat aksiomit eli ehdot/The pair (K, V) is a K-linear space or vector space if the binary operations satisfy the following axioms:

1. Yhteenlaskun aksiomit:

(a) $u + (v + w) = (u + v) + w$ kaikilla $u, v, w \in V$ (liitännäisyys).

(b) $v + w = w + v$ kaikilla $v, w \in V$ (vaihdannaisuus).

(c) On olemassa *neutraalialkio* $\overline{0} \in V$, jolle
$\overline{0} + v = v$ kaikilla $v \in V$.

(d) Kaikilla $v \in V$ on olemassa *vasta-alkio* $-v \in V$, jolle
$v + (-v) = \overline{0}$.

2. Skalaarilla kertomisen aksiomit/axioms of scalar multiplication:

(a) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ kaikilla $v \in V$ ja $\lambda, \mu \in K$.

(b) $1 \cdot v = v$ kaikilla $v \in V$.

3. Osittelulait:

(a) $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ kaikilla $v, w \in V$ ja $\lambda \in K$.

(b) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ kaikilla $v \in V$ ja $\lambda, \mu \in K$.

Määritelmän 1 mukaista joukkoa V kutsutaan lineaariavaruudeksi eli vektoriavaruudeksi kunnan K yli tai K-lineaariavaruudeksi tai K-vektoriavaruudeksi/The set V compatible with the definition is called a linear space or vector space over the field K ja annettuja ehtoja sanotaan lineaariavaruuden V aksiomeiksi ja joukon V alkioita voidaan kutsua vektoreiksi/the elements may be called as vectors sekä joukon K alkioita skalaareiksi/scalars.

Edelleen, laskutoimitusta $+$ kutsutaan yhteenlaskuksi ja laskutoimitusta $\cdot$ skalaarilla kertomiseksi.

Erikoistapauksia:

Esimerkki 2. *Reaalinen vektoriavaruus/Real vector space, kun $K = \mathbb{R}$. Tällöin yhteenlasku $+$ on kuvaus*

$$+ : V \times V \to V$$

ja reaaliluvulla kertominen $\cdot$ on kuvaus

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V.$$

Esimerkki 3. *Kompleksinen vektoriavaruus/Complex vector space, kun $K = \mathbb{C}$. Tällöin yhteenlasku $+$ on kuvaus*

$$+ : V \times V \to V$$

ja kompleksiluvulla kertominen $\cdot$ on kuvaus

$$\cdot : \mathbb{C} \times V \to V.$$

Esimerkki 4. *$V = \mathbb{C}^3$ on kompleksinen vektoriavaruus (todistus myöhemmin), kun asetetaan yhteenlasku/is a complex vector space when we set*

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

ja skalaarilla kertominen (kompleksiluvulla kertominen)

$$s \cdot (a_1, a_2, a_3) := (sa_1, sa_2, sa_3)$$

aina, kun $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{C}^3$ ja $s \in \mathbb{C}$.

Lasketaan/compute:

$$(i, -2, 3) + (-2, 1 + i, -i) = (i - 2, -1 + i, 3 - i); \tag{3}$$

$$(-i) \cdot (-2, 1 + i, -i) = (2i, 1 - i, -1). \tag{4}$$

Huomautus 1. *Identtisyysrelaation aksiomit.*
Identiteetin

$$v = w \tag{5}$$

molemmille puolin saa lisätä saman alkion/vektorin y/You may add the same element/vector y on the both sides of the identity (5), jolloin/whereupon

$$v + y = w + y. \tag{6}$$

Vektori-identiteetin (5) molemmat puolet saa kertoa samalla skalaarilla λ, jolloin

$$\lambda \cdot v = \lambda \cdot w. \tag{7}$$

Merkintä 1. *Yleensä kertolasku $\cdot$ jätetään merkitsemättä eli tehdään samaistus:*

$$\lambda v := \lambda \cdot v.$$

Merkintä 2.

$$-\lambda \cdot v := -(\lambda \cdot v).$$

Merkintä 3. *Asetetaan*

$$u - v := u + (-v). \tag{8}$$

1.1.1 $\mathbb{R}^n$

Esimerkki 5. *Joukko $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ on vektoriavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ identtisyys, yhteenlasku ja reaaliluvulla λ kertominen määritellään koordinaateittain/ The set is a vector space when we set identity relation, addition and multiplication by a real number coordinate-wise:*

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall\ i = 1, ..., n; \\
&\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n); \\
&\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).
\end{aligned}$$

Erityisesti $\mathbb{R}^1$ on vektoriavaruus, joka voidaan samaistaa $\mathbb{R}$:n kanssa/ In particular $\mathbb{R}^1$ is a vector space which can be identified with $\mathbb{R}$.

Lähtökohtana on, että reaaliluvut on kunta, jolloin reaaliluvut toteuttavat kunta-aksiomit: liitännäisyyden, vaihdannaisuuden, etc./ A starting point is that the set of reals is a field, whereupon reals satisfy the field axioms: associativity, commutativity, etc.

Aluksi nähdään, että reaalilukujen assosiatiivisuus-ominaisuus nousee vektoreiden assosiatiivisuudeksi.

Osoitetaan Vektoriavaruuden Määritelmän 1 kohta 1a (liitännäisyys) eli/ Let us show the case 1 of the definition of vector space:

$$\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}$$

kaikilla $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$.

Huomautus 2. *Laske ensin sulkujen sisällä olevat operaatiot!!*
Compute first the operations inside brackets!!

Lasketaan ensin vasen puoli=V.P.=/First we compute the left hand side:

$$\begin{aligned}
\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) =& (x_1, ..., x_n) + ((y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)) = \\
& (x_1, ..., x_n) + (y_1 + z_1, ..., y_n + z_n) = \\
& (x_1 + (y_1 + z_1), ..., x_n + (y_n + z_n)) = \\
& ((x_1 + y_1) + z_1, ..., (x_n + y_n) + z_n),
\end{aligned}$$

missä koordinaateissa on käytetty reaalilukujen liitännäisyyttä/in coordinates we used the associativity of reals.

Ja sitten oikea puoli=O.P.=/And then the right hand side:

$$\begin{aligned}
(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} =& ((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)) + (z_1, ..., z_n) = \\
& (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) + (z_1, ..., z_n) = \\
& ((x_1 + y_1) + z_1, ..., (x_n + y_n) + z_n).
\end{aligned}$$

Havaitaan, että vasen ja oikea puoli ovat samat kaikilla/We note, that V.P.=O.P. for all $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Seuraavaksi osoitetaan, että nolla-alkio on $(0, ..., 0)$.

Lasketaan siis:

$$\overline{x} + (0, ..., 0) = (x_1, ..., x_n) + (0, ..., 0) = (x_1 + 0, ..., x_n + 0) = (x_1, ..., x_n) = \overline{x},$$

joka pätee kaikilla $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Siten $\overline{0} = (0, ..., 0)$. $\square$

Osoitetaan vielä Vektoriavaruuden Määritelmän 1 kohta 2(a) eli $(\lambda\mu)\cdot\overline{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \overline{x})$ kaikilla $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Lasketaan ensin vasen puoli

$$(\lambda\mu) \cdot \overline{x} = (\lambda\mu) \cdot (x_1, ..., x_n) = ((\lambda\mu)x_1, ..., (\lambda\mu)x_n) \tag{9}$$

ja sitten oikea puoli

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\mu \cdot \overline{x}) &= \lambda \cdot (\mu x_1, ..., \mu x_n) = (\lambda(\mu x_1), ..., \lambda(\mu x_n)) \\ &= ((\lambda\mu)x_1, ..., (\lambda\mu)x_n) \end{aligned} \tag{10}$$

Havaitaan, että vasen ja oikea puoli ovat samat kaikilla $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $\square$

1.1.2 K^n

Esimerkki 6. *Olkoon K kunta. Tällöin joukko K^n, $n \in \mathbb{Z}^+$ on vektoriavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in K^n$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \in K^n$ identtisyys, yhteenlasku ja skalaarilla $\lambda \in K$ kertominen määritellään koordinaateittain:*

$$\begin{aligned} &\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall\ i = 1, ..., n; \\ &\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n); \\ &\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n). \end{aligned}$$

Erityisesti K^1 on vektoriavaruus, joka voidaan samaistaa K:n kanssa.

1.1.3 Matriisiavaruus/Matrix space

Esimerkki 7. *Matriisijoukko/The set of matrices*

$$M_{k\times n}(K) = \{A \mid A = (a_{ij}) \text{ on } k \times n - \text{matriisi},\ a_{ij} \in K\}$$

on vektoriavaruus, kun se varustetaan tavallisella matriisien yhteenlaskulla ja skalaarilla λ kertomisella/is a vector space when it is equipped with the usual addition and scalar multiplication:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}); \tag{11}$$

$$\lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}). \tag{12}$$

Nyt nolla-matriisi/Now the zero-matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k\times n}, \tag{13}$$

on yhteenlaskun nolla-alkio/is the zero-element of addition.

Itse asiassa kaikki muutkin lineaariavaruuden aksiomit toteutuvat kuten avaruuden K^n tapauksessa./ In fact all the other axioms of linear space come true as in the case of the space K^n.

1.1.4 Funktioavaruus/Function space

Esimerkki 8. *Olkoon*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ on kuvaus/mapping}\}.$$

Määritellään kaikilla/Let us define for all $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ identtisyys, yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen seuraavasti:

$$f = g, \quad \text{jos} \quad f(x) = g(x) \tag{14}$$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{15}$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \tag{16}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on vektoriavaruus, funktioavaruus/function space.

Osoitetaan Vektoriavaruuden Määritelmän 1 kohta 1c):
Määritellään nollafunktio/zero-fuction $\mathcal{O}$ asettamalla/by setting

$$\mathcal{O}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Tällöin

$$(\mathcal{O} + f)(x) = \mathcal{O}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

joten funktioiden identtisyyden nojalla/therefore by the identity relation of functions

$$\mathcal{O} + f = f. \tag{19}$$

Siten nollafunktio on yhteenlaskun neutraalialkio funktioavaruudessa/Thus the zero-function is the neutral element in the function space. □

Osoitetaan kohta 1d): Määritellään $-f$ asettamalla

$$(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = \\ f(x) - f(x) = 0 = \mathcal{O}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{21}$$

joten funktioiden identtisyyden nojalla

$$f + (-f) = \mathcal{O}. \tag{22}$$

Siten $-f$ on alkion f vasta-alkio funktioavaruudessa. □

1.2 Laskusääntöjä

Lause 1. *Olkoon V vektoriavaruus. Tällöin*

(a) yhteenlaskun neutraalialkio on yksikäsitteinen;

(b) vektorin vasta-alkio on yksikäsitteinen;

(c) kaikilla $v, w \in V$ on olemassa täsmälleen yksi $x \in V$, jolle

$$v + x = w$$

(toisin sanoen yhtälöllä $v + x = w$ on yksikäsitteinen ratkaisu).

Koska $(V, +)$ on Abelin ryhmä, niin todistukset löytyvät kurssilta 802354A Algebran perusteet.

Lause 2.

Olkoon V vektoriavaruus ja $\overline{0} \in V$ sen nolla-alkio ja $0 \in K$. Kaikilla $v, w \in V$ ja $\lambda, \mu \in K$ pätee

a] $0 \cdot v = \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$;

b] $(-1) \cdot v = -v$;

c] $-(-v) = v$;

d] $-(v + w) = -v - w$;

e] $-\lambda \cdot v = (-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v)$;
f] $(-\lambda) \cdot (-v) = \lambda \cdot v$;

g] $\lambda \cdot (v - w) = \lambda \cdot v - \lambda \cdot w$;

h] $(\lambda - \mu) \cdot v = \lambda \cdot v - \mu \cdot v$;

i] $\lambda \cdot v = \overline{0}$ jos ja vain jos $\lambda = 0$ tai $v = \overline{0}$;

j] Jos $\lambda \cdot v = \lambda \cdot w$ ja $\lambda \neq 0$, niin $v = w$;

k] Jos $\lambda \cdot v = \mu \cdot v$ ja $v \neq \overline{0}$, niin $\lambda = \mu$.
Todistetaan kohdan

a] tapaus: $0 \cdot v = \overline{0}$.

Aluksi

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v \ = \ 0 \cdot v + 0 \cdot v. \tag{23}$$

Lisätään vasta-alkio $-0 \cdot v$ yhtälön molemmille puolille, jolloin

$$\begin{aligned}\overline{0} = 0 \cdot v + (-0 \cdot v) = (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) = \\ 0 \cdot v + (0 \cdot v - 0 \cdot v) = 0 \cdot v + \overline{0} = 0 \cdot v. \quad \square\end{aligned} \tag{24}$$

b] $(-1) \cdot v = -v$.

Lasketaan $(-1) \cdot v + v$:

$$(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v = \overline{0}. \tag{25}$$

Täten vasta-alkion määritelmän ja yksikäsitteisyyden nojalla

$$(-1) \cdot v = -v. \quad \square$$

e] Osoitetaan tapaus
$-\lambda \cdot v = (-\lambda) \cdot v$
käyttämällä b]-kohdan tulosta $-w = (-1) \cdot w$.

Lasketaan

$$V.P = -\lambda \cdot v = (-1) \cdot (\lambda \cdot v) = ((-1)\lambda) \cdot v = (-\lambda) \cdot v = O.P. \quad \square \tag{26}$$

i] Esitetään ensin väite muodossa:

$$\lambda \cdot v = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ tai } v = \overline{0}.$$

"$\Leftarrow$":n todistus: Oletuksena on, että $\lambda = 0$ tai $v = \overline{0}$.
Nyt on osoitettava, että $\lambda \cdot v = \overline{0}$.

Katso a]-kohta. $\square$

"$\Rightarrow$":n todistus: Nyt oletuksena on

$$\lambda \cdot v = \overline{0}. \tag{27}$$

On siis osoitettava, että $\lambda = 0$ tai $v = \overline{0}$.

Tehdään vastaoletus: $\lambda \neq 0$ ja $v \neq \overline{0}$.

Tällöin $\lambda^{-1} \in K$, joten yhtälö (27) voidaan kertoa puolittain alkiolla λ^{-1}. Saadaan

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot \overline{0} \quad \Rightarrow \quad (\lambda^{-1} \lambda) \cdot v = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot v = v = \overline{0}. \tag{28}$$

Ristiriita vastaoletuksen kanssa. $\square$

1.3 Aliavaruus

1.3.1 Aliavaruus/subspace

Määritelmä 2. *Vektoriavaruuden V epätyhjä osajoukko W on vektoriavaruuden V aliavaruus/subspace, jos W on suljettu yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen, toisin sanoen*

1. $\emptyset \neq W \subseteq V$;
2. jos $w_1, w_2 \in W$, niin $w_1 + w_2 \in W$;
3. jos $w \in W$ ja $\lambda \in K$, niin $\lambda w \in W$.

Esimerkki 9. *Onko*

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 0\} \tag{29}$$

avaruuden $\mathbb{R}^2$ *aliavaruus/Is* W *a subspace of* $\mathbb{R}^2$*? Nyt* $K = \mathbb{R}$ *ja* $V = \mathbb{R}^2$.

1. Koska/because $(1, 0) \in W$ *ja* $W \subseteq \mathbb{R}^2$*, niin 1. ehto kunnossa/then the condition 1. is OK.*

2. Olkoot $w_1 = (x_1, 0), w_2 = (x_2, 0) \in W$*, lasketaan/by computing* $w_1 + w_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$*, jolloin havaitaan, että/then we observe* $w_1 + w_2 \in W$*. Siten ehto 2. OK.*

3. Olkoot $w = (x, 0) \in W$ *ja* $\lambda \in \mathbb{R}$*, lasketaan* $\lambda \cdot w = \lambda \cdot (x, 0) = (\lambda x, 0)$*, joten* $\lambda \cdot w \in W$*. Siten ehto 3. OK.*

V: On.

Lause 3. *Epätyhjä joukko* $W \subseteq V$ *on vektoriavaruuden* V *aliavaruus jos ja vain jos* W *varustettuna avaruuden* V *yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella on vektoriavaruus.*
A non-empty subset $W \subseteq V$ *of the vector space* V *is a subspace if and only if* W *equipped with the addition and scalar multiplication of* V *is a vector space.*

Erityisesti

$$\overline{0} \in W \tag{30}$$

aina, kun W on aliavaruus.

Esimerkki 10. *Olkoon* V *vektoriavaruus ja* $\overline{0} \in V$ *sen nolla-alkio. Tällöin osajoukot* $\{\overline{0}\}$ *ja* V *ovat vektoriavaruuden* V *aliavaruuksia.*

Todistetaan, että $\{\overline{0}\}$ on aliavaruus/Let us prove that $\{\overline{0}\}$ is a subspace. Merkitään hetkeksi/Let us denote for a moment $W_{\overline{0}} = \{\overline{0}\}$.

AA1. Koska $\overline{0} \in W_{\overline{0}}$, niin $W_{\overline{0}} \neq \emptyset$.

AA2. Olkoot $w_1, w_2 \in W_{\overline{0}}$. Tällöin $w_1 = w_2 = \overline{0}$ ja siten $w_1 + w_2 = \overline{0} \in W_{\overline{0}}$.

AA3. Olkoot $\lambda \in K$ ja $w \in W_{\overline{0}}$. Tällöin $w = \overline{0}$ ja siten $\lambda \cdot w = \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0} \in W_{\overline{0}}$. □

Huomautus 3. *Sanotaan, että* $\{\bar{0}\}$ *ja* V *ovat triviaalit aliavaruudet.*

Esimerkki 11. *Joukko*

$$\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ on jatkuva kuvaus/continuous mapping}\}$$

on vektoriavaruuden $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *aliavaruus.*

AA1. Koska nollakuvaus $\mathcal{O} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin $\mathcal{O} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ja siten $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

AA2. Jos $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, niin $f + g$ on jatkuva ja siten $f + g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

AA3. Olkoot $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tällöin λf on jatkuva, joten $\lambda f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. □

Esimerkki 12. *Olkoon*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}ol(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \\ \textit{kaikilla } x \in \mathbb{R} \textit{ joillekin } n \in \mathbb{N} \\ \textit{ja } a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

eli $\mathcal{P}ol(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *on kaikkien polynomien joukko. Tällöin* $\mathcal{P}ol(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *on vektoriavaruuksien* $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *ja* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *aliavaruus.*

Esimerkki 13. *Olkoot* $k \in \mathbb{N}$ *ja*

$$\mathcal{P}ol_k(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{P}ol(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \textit{polynomin } f \textit{ aste} \leq k\}.$$

Tällöin $\mathcal{P}ol_k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *on avaruuden* $\mathcal{P}ol(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *aliavaruus. Saadaan siis aliavaruusketju*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}ol_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}ol_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{P}ol_k(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \subseteq \mathcal{P}ol_{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ldots \\ \ldots \subseteq \mathcal{P}ol(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Huomautus 4. *Olkoon* K *kunta. Yleensä* K*-kertoimisten polynomien joukolle käytetään merkintää*

$$K[x] = \{f(x) \mid f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ a_0, \ldots, a_n \in K\}.$$

Kun polynomien yhteen- ja kertolasku määritellään tavanomaisesti/addition and multiplication in the usual way, niin saadaan polynomirengas/polynomial ring

$$(K[x], +, \times),$$

missä nolla- ja ykköspolynomit ovat

$$0(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + ..., \quad 1(x) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + ...$$

Edelleen vakiopolynomille/constant polynomial $a(x) = a + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + ...$ voidaan käyttää lyhennysmerkintää a.

1.4 Lineaarikombinaatio ja lineaarinen verho

1.4.1 Lineaarikombinaatio/linear combination

Määritelmä 3. *Olkoon V vektoriavaruus kunnan K yli. Vektori $v \in V$ on vektoreiden $v_1, \ldots, v_n \in V$ (äärellinen/finite) lineaarikombinaatio/linear combination, jos on olemassa sellaiset luvut/if there exist $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, että/such that*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i. \tag{31}$$

Esimerkki 14. *$V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, -1)$ ja $v = (3, 3, 0)$. Tällöin*

$$v = v_1 + 2v_2 + 2v_3 \tag{32}$$
$$= 2v_1 + v_2 + v_3. \tag{33}$$

Siten $(3, 3, 0)$ on vektoreiden v_1, v_2 ja v_3 lineaarikombinaatio mutta esitys ei ole yksikäsitteinen/ but representation is not unique.

Esimerkki 15. *$V = \mathbb{C}^3$, $K = \mathbb{C}$.*

$$(-i, i, 2 + i) = 1 \cdot (-i, i, i) + 1 \cdot (0, 0, 2) \tag{34}$$
$$= i \cdot (-1, 1, 1) + i \cdot (0, 0, -2i). \tag{35}$$

1.4.2 Lineaarinen verho/linear hull

Määritelmä 4. *K-vektoriavaruuden V epätyhjän osajoukon $S \neq \emptyset$ lineaarinen verho/linear hull $\langle S \rangle_K$ koostuu kaikista joukon S äärellisistä K-lineaarikombinaatioista/consists of all finite linear combinations of the set S, toisin sanoen/in other words*

$$\langle S \rangle_K \quad := \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \middle| \ v_1, \ldots, v_n \in S; \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, \ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\}.$$

Lyhemmin $\langle S\rangle = \langle S\rangle_K$.

Merkintä 4. *Jos* $S = \{s_1, ..., s_m\}$*, niin käytetään merkintää* $\langle s_1, ..., s_m\rangle_K := \langle S\rangle_K$*, jolloin*

$$\langle s_1, ..., s_m\rangle_K = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i \middle| \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \right\}. \tag{36}$$

Esimerkki 16. $V = \mathbb{R}^2$*,* $K = \mathbb{R}$*,* $e_1 = (1, 0)$*,* $e_2 = (0, 1)$*. Tällöin*

$$\langle e_1, e_2\rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (\lambda_1, \lambda_2)|\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \tag{37}$$

Esimerkki 17. *Koska* $f \in \mathcal{P}ol_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *täsmälleen silloin/exactly when, kun on olemassa sellaiset* $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$*, että*

$$f(x) = a_0 + a_1 x,$$

niin

$$\mathcal{P}ol_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \langle 1, x\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Yleisemmin

$$\mathcal{P}ol_k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \langle 1, x, \dots, x^k\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Lause 4. *Olkoot* V *vektoriavaruus kunnan* K *yli ja* $S \subseteq V$ *epätyhjä osajoukko. Tällöin*

(a) $\langle S\rangle_K$ *on avaruuden* V *aliavaruus/is a subspace of* V*.*

(b) Jos $S \subseteq W$ *ja* W *on avaruuden* V *aliavaruus, niin/ If* $S \subseteq W$ *and* W *is a subspace of* V*, then*

$$\langle S\rangle_K \subseteq W.$$

1.5 Lineaarinen vapaus ja riippuvuus

Seuraavassa tarkastellaan vektoreiden $s_1, ..., s_n \in V$ muodostamia listoja $s_1, ..., s_n$, missä $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on listan pituus.
In the following we consider lists $s_1, ..., s_n$ formed by the vectors $s_1, ..., s_n \in V$, where $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is the lenght of the list.

Tapaus $n = 0$ tarkoittaa, että lista on tyhjä eli listassa ei ole alkioita.
The case $n = 0$ means, that the list is empty or there are no elements in the list.

Määritelmä 5. *Olkoon V vektoriavaruus kunnan K yli ja $s_1, ..., s_n \in V$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Tapaus/case $n = 0$: Tyhjä lista on lineaarisesti vapaa/The empty list is linearly independent.

Tapaus $n \geq 1$: Alkiolista $s_1, ..., s_n$ on lineaarisesti vapaa kunnan K yli/linearly independent over the field K:
jos ehdosta/if from the condition

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = \overline{0}, \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in K, \tag{38}$$

seuraa, että/follows that

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0. \tag{39}$$

Muutoin lista $s_1, ..., s_n$ on lineaarisesti sidottu kunnan K yli/Otherwise the list $s_1, ..., s_n$ is linearly dependent over the field K.

Lineaarisesti vapaa=lineaarisesti riippumaton.
Vektorit ovat lineaarisesti vapaita eli riippumattomia/
vectors are linearly independent.
Lineaarisesti sidottu=lineaarisesti riippuva.
Vektorit ovat lineaarisesti sidottuja eli riippuvia/
vectors are linearly dependent.

Lause 5. *Olkoot V vektoriavaruus kunnan K yli ja $s_1, ..., s_n \in V$, $n \in \mathbb{Z}^+$.*
Alkiolista $s_1, ..., s_n$ on lineaarisesti riippuva kunnan K yli/
The list $s_1, ..., s_n$ of elements is linearly dependent over the field K

jos ja vain jos/if and only if

on olemassa sellaiset luvut/there exist numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, että/such that

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = \overline{0} \tag{40}$$

ja ainakin yksi/and at least one $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Esimerkki 18. *Tutkitaan listaa/Let us investigate the list s_1, s_2, missä vektorit ovat identtiset eli/where the vectors are identical or $s_1 = s_2 = s$. Tällöin/Now*

$$1 \cdot s_1 + (-1) \cdot s_2 = s - s = \overline{0},$$

joten lista $s_1, s_2 = s, s$ on lineaarisesti sidottu/therefore the list $s_1, s_2 = s, s$ is linearly dependent.

Edelleen kaikki listat, joissa on toisto eli sama alkio esiintyy vähintään kahdesti, ovat lineaarisesti sidottuja/ Further, all the lists having a repetition or the same element appears at least two times, are linearly dependent.

Olkoon $s_1, ..., s_n$, $n \in \mathbb{N}$, lineaarisesti vapaa lista/
Let $s_1, ..., s_n$, $n \in \mathbb{N}$ be a linearly independent list.
Tällöin listassa ei esiinny toistoa, joten listassa ja joukossa $S = \{s_1, ..., s_n\}$ on sama määrä alkioita./
Now there exists no repetition in the list, therefore in the list and in the set $S = \{s_1, ..., s_n\}$ there are the same number of elements.

Siten on luonnollista sanoa, että joukko $S = \{s_1, ..., s_n\}$ on lineaarisesti vapaa/
Thus it is natural to say that the set $S = \{s_1, ..., s_n\}$ is linearly independent.

Tyhjää listaa vastaa tyhjä joukko $\emptyset$, jonka takia sovitaan, että $\emptyset$ on lineaarisesti vapaa/
The empty set $\emptyset$ corresponds to empty list, therefore we settle, that the empty set $\emptyset$ is linearly independent.

Edelleen, jos listassa $s_1, ..., s_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ei ole toistoa ja lista on lineaarisesti sidottu, niin myös vastaavaa joukkoa $S = \{s_1, ..., s_n\}$ sanotaan lineaarisesti sidotuksi./
Further, if there exists no repetition in the list $s_1, ..., s_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ and the list is linearly dependent, then also the corresponding set $S = \{s_1, ..., s_n\}$ is called linearly dependent.

Esimerkki 19. *Nolla-alkion muodostama lista/The list formed by the zero-element $\overline{0}$ on lineaarisesti sidottu, koska/is linearly dependent, because*

$$1 \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

Siten joukko $\{\overline{0}\}$ on lineaarisesti sidottu.

Esimerkki 20. *Olkoon $\overline{0} \neq v \in V$. Alkion v muodostama lista v on lineaarisesti vapaa/linearly independent, koska ehdosta*

$$\lambda \cdot v = \overline{0}$$

seuraa $\lambda = 0$. Niinpä yhden vektorin muodostama joukko $\{v\}$ on lineaarisesti vapaa, jos ja vain jos $v \neq \overline{0}$.

Esimerkki 21. *$V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $s_1 = (1,1,0)$, $s_2 = (0,1,1)$, $s_3 = (1,0,-1)$ ja $s_4 = (3,3,0)$. Koska*

$$1 \cdot s_1 + (-1) \cdot s_2 + (-1) \cdot s_3 = \overline{0}; \tag{41}$$
$$2 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 1 \cdot s_3 + (-1) \cdot s_4 = \overline{0}, \tag{42}$$

niin s_1, s_2, s_3 on lineaarisesti riippuva ja myös s_1, s_2, s_3, s_4 on lineaarisesti riippuva.

Kerrataan, että joukko

$$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus/is a $\mathbb{R}$-vector space.

Esimerkki 22. *Ovatko matriisit/are the matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

lineaarisesti vapaita kunnan $\mathbb{R}$ yli?/linearly independent over the field $\mathbb{R}$?

RATKAISU: Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi (nolla-matriisi)/Let us set the linear combination to zero (zero-matrix):

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Suoritetaan skalaarilla kertomiset ja yhteenlasku, jolloin/Let us work out the scalar multiplications and the addition, whereupon

$$\begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

joka on yhtäpitävää yhtälöryhmän/which is equivalent with the system of equations

$$\begin{aligned} a + b &= 0, \\ b &= 0, \\ a &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

kanssa. Ratkaisuksi saadaan $a = b = 0$. Joten matriisit (43) ovat lineaarisesti vapaita kunnan $\mathbb{R}$ yli./ For the solution we get $a = b = 0$. Thus matrices (43) are linearly independent over the field $\mathbb{R}$.

Esimerkki 23. *Ovatko matriisit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

lineaarisesti vapaita kunnan $\mathbb{R}$ *yli?/linearly independent over the field* $\mathbb{R}$*?*

RATKAISU: Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi (nolla-matriisi)/Let us set the linear combination to zero (zero-matrix):

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Suoritetaan skalaarilla kertomiset ja yhteenlasku, jolloin

$$\begin{pmatrix} a+b+2c & b+c \\ b+c & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

joka on yhtäpitävää yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} a+b+2c &= 0, \\ b+c &= 0, \\ a+c &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

kanssa.

Ratkaistaan a ja b luvun c avulla/Let us solve a and b by the number c:

$$\begin{aligned} a &= -c, \\ b &= -c, \end{aligned} \tag{47}$$

missä luvun c voi valita vapaasti: Valitaan $c = -1$, jolloin $a = b = 1$. Tällöin siis pätee/ where you may choose c freely: Choose $c = -1$, then $a = b = 1$. Now holds

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

eli lineaarikombinaatio on nolla mutta kertoimet eivät. Siten matriisit (45) ovat lineaarisesti sidottuja kunnan $\mathbb{R}$ yli./ or the linear combination is zero but the coefficients are not. Thus the matrices (45) are linearly dependent.

Määritelmä 6. *Olkoot* V *vektoriavaruus kunnan* K *yli ja* $S \subseteq V$ *epätyhjä osajoukko. Joukko* S *on lineaarisesti vapaa (kunnan* K *yli) jos ja vain jos sen jokainen äärellinen epätyhjä osajoukko on lineaarisesti vapaa,* *toisin sanoen ehdosta*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = \overline{0}, \quad \lambda_i \in K, \tag{49}$$

seuraa, että

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \tag{50}$$

kaikilla joukon S äärellisillä osajoukoilla $\{s_1, \ldots, s_n\}$.

Muutoin S on lineaarisesti sidottu.

Lause 6. *Olkoot V vektoriavaruus kunnan K yli ja $S \subseteq V$ epätyhjä osajoukko. Joukko S on lineaarisesti sidottu (kunnan K yli), jos on olemassa äärellisen monta alkiota $s_1, \ldots, s_n \in S$ ja sellaiset luvut $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, että*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = \overline{0} \tag{51}$$

ja ainakin yksi $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

Lause 7. *Olkoot V vektoriavaruus kunnan K yli, $S \subseteq V$ epätyhjä osajoukko ja $x \in V$. Tällöin*

$$x \in \langle S \rangle_K \quad \Leftrightarrow \quad \langle \{x\} \cup S \rangle_K = \langle S \rangle_K; \tag{52}$$

Jos S on lineaarisesti vapaa kunnan K yli, niin

$$x \in V \setminus \langle S \rangle_K \quad \Leftrightarrow \quad \{x\} \cup S \quad \text{on lineaarisesti vapaa}/K. \tag{53}$$

Todistetaan (53) tapauksessa $S = \{s_1, ..., s_n\}$.
"$\Rightarrow$": Oletuksena siis, että $x \notin \langle S \rangle_K$. Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi

$$\alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n + \alpha_{n+1} x = \overline{0}, \quad \alpha_k \in K. \tag{54}$$

Jos $\alpha_{n+1} \neq 0$, niin

$$x = \beta_1 s_1 + ... + \beta_n s_n, \quad \beta_k \in K \quad \Rightarrow \quad x \in \langle S \rangle_K. \tag{55}$$

Ristiriita. Joten $\alpha_{n+1} = 0$ ja siten

$$\alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n = \overline{0}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = 0 \quad \forall\, k. \tag{56}$$

Siten $x, s_1, ..., s_n$ on lineaarisesti vapaa. □

"$\Leftarrow$": Oletuksena siis, että $x, s_1, ..., s_n$ on lineaarisesti vapaa. Vastaoletus: $x \in \langle S \rangle_K$. Tällöin

$$x = \lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n, \quad \lambda_k \in K, \tag{57}$$

Siten $x, s_1, ..., s_n$ on lineaarisesti sidottu. Ristiriita oletuksen kanssa, joten vastaoletus väärä. Niinpä $x \notin \langle S \rangle_K$. □

Esimerkki 24. *Joukko* $\{1(x), x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}ol_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *on lineaarisesti riippumaton (kunnan* $\mathbb{R}$ *yli).*

Todistus: Olkoot $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *sellaiset, että*

$$\lambda_0 \cdot 1(x) + \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 = 0(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Valitaan $x = 0$, *jolloin saadaan* $\lambda_0 + 0 + 0 = 0$, *eli* $\lambda_0 = 0$.
Valitaan $x = 1$ *ja* $x = -1$, *jolloin saadaan*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Siis $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Esimerkki 25. *Joukko* $\{1, x, \ldots, x^k\} \subseteq \mathcal{P}ol_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *on lineaarisesti riippumaton.*

Esimerkki 26. *Joukko* $\{1, x, \ldots, x^k, \ldots\} \subseteq \mathcal{P}ol(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *on lineaarisesti riippumaton.*

Esimerkki 27. *Joukko* $\{1, \sin^2, \cos^2\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *on lineaarisesti riippuva (kunnan* $\mathbb{R}$ *yli), sillä*

$$1 \cdot \sin^2 x + 1 \cdot \cos^2 x - 1 \cdot 1 = 0 = 0(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

1.6 Kanta ja dimensio

Määritelmä 7. K*-Vektoriavaruuden* V *epätyhjä osajoukko* S *on avaruuden* V *kanta kunnan* K *yli, jos/*
The non-empty subset S *of the* K*-vector space* V *is a base of the space* V *over the field* K*, if/*

(a) S *on lineaarisesti riippumaton kunnan* K *yli, ja/*
S *is linearly independent over the field* K*, and*

(b) $\langle S \rangle_K = V$.

Lause 8 (Hamelin kantalause). *Jokaisella vektoriavaruudella $V \neq \{\overline{0}\}$ on olemassa kanta.*
Every vector space $V \neq \{\overline{0}\}$ has a base,

Todistus, joka perustuu valinta-aksiomiin on aika haastava eikä kuulu tämän kurssin vaatimuksiin.
The proof which is quite challenging is based on the Axiom of choice and does not belong to the requirements of this course.

Lause 9. *Olkoon V vektoriavaruus kunnan K yli, $R, T \subseteq V$, $r := \#R$ ja $t := \#T$.*
Jos

$$R \subseteq \langle T \rangle_K \quad ja \quad r > t \geq 1, \tag{58}$$

niin R on lineaarisesti sidottu kunnan K yli.

Todistus. Induktio lukumäärän t suhteen.
Olkoon $t = 1$, jolloin $r \geq 2$. Kirjoitetaan

$$R = \{x_1, ..., x_r\}, \quad T = \{y_1\}.$$

Koska $R \subseteq \langle T \rangle_K$, niin

$$\begin{aligned} x_1 =& a_1 y_1, \quad a_1 \in K \\ x_2 =& a_2 y_1, \quad a_2 \in K, \end{aligned}$$

missä ainakin toinen luvuista $a_i \neq 0$, olkoon $a_1 \neq 0$. Tällöin

$$1 \cdot x_2 - a_1^{-1} a_2 x_1 = \overline{0} \tag{59}$$

joten x_1, x_2 on lineaarisesti sidottu ja siten R on lineaarisesti sidottu.
Olkoon $s \in \mathbb{Z}^+$. Induktio-oletus: Kaikilla $t \leq s$ väite pätee.
Induktioaskel: Olkoon $t = s + 1 = \#T, r = \#R$, $r > t$ ja

$$R = \{x_1, ..., x_r\}, \quad T = \{y_1, ..., y_{s+1}\}.$$

Aluksi huomataan, että $r \geq s + 2$. Oletuksen $R \subseteq \langle T \rangle_K$ nojalla

$$\begin{aligned} x_1 =& a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + ... + a_{1,s+1} y_{s+1}, \\ x_2 =& a_{2,1} y_1 + a_{2,2} y_2 + ... + a_{2,s+1} y_{s+1}, \\ & ... \\ x_r =& a_{r,1} y_1 + a_{r,2} y_2 + ... + a_{r,s+1} y_{s+1}, \end{aligned}$$

missä $a_{i,j} \in K$. Jos olisi $a_{1,1} = a_{2,1} = ... = a_{r,1} = 0$, niin

$$R \subseteq \langle y_2, ..., y_{s+1} \rangle_K, \quad \#R = r \geq s + 2 > \#\{y_2, ..., y_{s+1}\} = s, \tag{60}$$

joten induktio-oletuksen nojalla R olisi lineaarisesti sidottu tässä tapauksessa.

Tarkastellaan seuraavaksi tapaus, josa ainakin yksi luvuista $a_{1,1}, a_{2,1}, ..., a_{r,1}$ on nollasta eroava, olkoon $a_{1,1} \neq 0$. Määritellään seuraavaksi uudet vektorit

$$x_k^* = x_k - a_{1,1}^{-1} a_{k,1} x_1, \quad k = 1, ..., r,$$

joille pätee: $x_1^* = \overline{0}$ ja

$$R^* := \{x_2^*, ..., x_r^*\} \subseteq \langle y_2, ..., y_{s+1} \rangle_K. \tag{61}$$

Jos joukossa R^* olisi identtisiä alkioita, niin R^* olisi sidottu. Muutoin joukkojen lukumäärille pätee

$$\#R^* = r - 1 \geq s + 1 > \#\{y_2, ..., y_{s+1}\} = s, \tag{62}$$

joten induktio-oletuksen nojalla R^* on nytkin lineaarisesti sidottu.

Siten

$$b_2 x_2^* + ... + b_r x_r^* = \overline{0}, \quad b_k \in K, \tag{63}$$

ja $b_j \neq 0$, jollakin $2 \leq j \leq r$. Sijoitetaan $x_k^* = x_k - a_{1,1}^{-1} a_{k,1} x_1$ takaisin, jolloin saadaan lineaarikombinaatio

$$(-b_2 a_{1,1}^{-1} a_{2,1} - ... - b_r a_{1,1}^{-1} a_{r,1}) x_1 + b_2 x_2 + ... + b_r x_r = \overline{0}, \tag{64}$$

missä ainakin yksi kerroin on nollasta eroava, nimittäin $b_j \neq 0$. Niinpä $x_1, x_2, ..., x_r$ on lineaarisesti sidottu mikä todistaa induktioaskeleen. $\square$

Lause 10. *Olkoon $V \neq \{\overline{0}\}$ vektoriavaruus kunnan K yli.*
Jos avaruudella V on olemassa äärellinen kanta kunnan K yli , niin kaikissa kannoissa kunnan K yli on sama määrä alkioita./ If the space V has a finite base over the field K, then every base over the field K has the same number of elements.

Todistus. Olkoot S_1 ja S_2 kantoja, $s_1 := \#S_1$ ja $s_2 := \#S_2$. Tällöin S_1 on lineaarisesti vapaa ja S_2 on lineaarisesti vapaa sekä

$$\langle S_1 \rangle_K = \langle S_2 \rangle_K = V.$$

Jos olisi

$$s_1 > s_2, \tag{65}$$

ja koska $S_1 \subseteq \langle S_2 \rangle_K$, niin Lauseen 9 nojalla S_1 olisi lineaarisesti sidottu. Ristiriita. $\square$

Määritelmä 8. *K-vektoriavaruus V on äärellisulotteinen, jos V:llä on olemassa äärellinen kanta kunnan K yli./ K-vector space V is finite dimensional, if V has a finite base over the field K.*

Myös $\{\overline{0}\}$ on äärellisulotteinen.

Muulloin V on ääretönulotteinen./ Otherwise V is infinite dimensional.

Jos avaruuden V kannassa on n alkiota (kunnan K yli), missä $n \in \mathbb{N}$, niin avaruuden V dimensio on n/Dimension is the number n of base elements.

Tällöin käytetään merkintää $\dim_K V = \dim V = n$.

Jos $V = \{\overline{0}\}$, niin $\dim_K V = 0$.

Muulloin $\dim_K V = \infty$.

Huomautus 5. *Lauseen 10 nojalla vektoriavaruuden V dimensio on hyvin määritelty.*
By Theorem 10 the dimension of the vector space V is well-defined.

Seuraus 1. *Jos $\dim_K V = n$, jollain $n \in \mathbb{Z}^+$, niin jokainen lineaarisesti riippumaton avaruuden V osajoukko S, jossa on n alkiota, on avaruuden V kanta.*
If $\dim_K V = n$, with some $n \in \mathbb{Z}^+$, then every subset S of V with n elements is a base of the space V.

Seuraus 2. *Olkoon A lineaariavaruuden V aliavaruus. Jos $\dim_K A = \dim_K V = n$, jollain $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, niin $A = V$.*

Seuraus 3. *Jos $\dim_K V = n$ jollain $n \in \mathbb{N}$, niin jokainen sellainen avaruuden V osajoukko, jossa on vähintään $n+1$ alkiota, on lineaarisesti riippuva kunnan K yli.*
If $\dim_K V = n$ with some $n \in \mathbb{N}$, then every subset of V with at least $n+1$ elements is linearly dependent over the field K.

Lause 11. *Jos V on vektoriavaruus kunnan K yli, W on avaruuden V aliavaruus ja S on avaruuden W kanta, niin on olemassa sellainen avaruuden V kanta T, että $S \subseteq T$. Erityisesti*

$$\dim_K W \leq \dim_K V. \tag{66}$$

Lause 12. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus kunnan K yli ja $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avaruuden V kanta. Tällöin jokaista vektoria $v \in V$ kohti on olemassa yksikäsitteiset luvut $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ siten, että/*
Let V be a finite dimensional vector space over the field K and $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ be a base of the space V. Now for a given vector $v \in V$ there exist unique numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ such that

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i. \tag{67}$$

Todistus. Olkoon $v \in V$. Koska

$$\langle S \rangle_K = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = V,$$

niin

$$v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K \quad \Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K.$$

Yksikäsitteisyys: Jos olisi

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i, \quad \lambda_i, \mu_i \in K,$$

niin

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_i - \mu_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., n. \quad \square$$

Määritelmä 9. *Lineaarikombinaatiota* (67) *sanotaan vektorin v kantaesitykseksi kannan S suhteen/base expansion with respect to the base S ja*

kertoimet λ_i ovat vektorin v koordinaatit kannassa S/ coefficients λ_i are the coordinates of the vector v in base S.

Tällöin voidaan kirjoittaa

$$v = (\lambda_1, ..., \lambda_n)_S = (\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

jota sanotaan vektorin v koordinaattiesitykseksi kannassa S/coordinate representation in the base S.

Esimerkki 28. *Koska $\{1, x, \ldots, x^n\}$ on avaruuden $\mathcal{P}ol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eräs kanta, niin*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}ol_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = n + 1.$$

Koska

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\} \subseteq \mathcal{P}ol(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

on lineaarisesti riippumaton, niin

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}ol(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty.$$

Tuloksen (66) *nojalla saadaan*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}ol(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty.$$

Esimerkki 29.

Laske $\dim\langle S\rangle$, kun $S = \{1 + x, 1 + x^2, -1 + 2x - 3x^2\} \subseteq \mathcal{P}ol_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ratkaisu: Tutkitaan, onko joukko S lineaarisesti riippumaton. Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi:

$$\begin{gathered} a(1+x) + b(1+x^2) + c(-1+2x-3x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow (a+b-c)1 + (a+2c)x + (b-3c)x^2 = 0 \end{gathered}$$

Koska $1, x, x^2$ on lineaarisesti vapaa, niin saadaan

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ a+2c=0 \\ b-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c=0 \\ a+2c=0 \\ b-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2c \\ b=3c \\ c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Ensimmäisessä kohdassa viimeinen yhtälö on vähennetty ensimmäisestä.)

Koska yllä olevalla yhtälöryhmällä on epätriviaali ratkaisu, esim. $a = -2, b = 3, c = 1$, niin S on lineaarisesti riippuva.

Tästä nähdään, että polynomi $-1 + 2x - 3x^2$ on lineaarikombinaatio polynomeista $1 + x$ ja $1 + x^2$, joten

$$\langle S\rangle = \langle 1 + x, 1 + x^2\rangle.$$

Joukko $\{1 + x, 1 + x^2\}$ on lineaarisesti riippumaton, sillä

$$\begin{aligned} a(1+x) + b(1+x^2) = 0 &\Leftrightarrow (a+b)1 + ax + bx^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ ja } b = 0. \end{aligned}$$

Näin ollen $\dim_{\mathbb{R}}\langle S\rangle = 2$.

1.7 Kunnat ovat lineaariavaruuksia

Olkoot K ja L ovat kuntia sekä $K \subseteq L$. Voidaan osoittaa, että L on K-vektoriavaruus.
Let K and L be fields and $K \subseteq L$. We can show that L is a K-vector space.

Esimerkki 30. $\mathbb{R}$ *on* $\mathbb{R}$*-vektoriavaruus ja*

$$\mathbb{R} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1. \tag{68}$$

Esimerkki 31. $\mathbb{C}$ *on* $\mathbb{C}$*-vektoriavaruus ja*

$$\mathbb{C} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1. \tag{69}$$

Esimerkki 32. *Joukko* $\{1, \sqrt{3}\}$ *on lineaarisesti vapaa kunnan* $\mathbb{Q}$ *yli/linearly independent over the field* $\mathbb{Q}$*.*

Esimerkki 33. *Joukko* $\{1, \sqrt{3}\}$ *on lineaarisesti sidottu kunnan* $\mathbb{R}$ *yli/linearly dependent over the field* $\mathbb{R}$*.*

Esimerkki 34.

$\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus ja

$$\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2. \tag{70}$$

Tutkitaan aluksi lineaarista verhoa/Let us first study the linear hull

$$\langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}} = \{a \cdot 1 + b \cdot i |\ a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}. \tag{71}$$

Osoitetaan, että 1 ja i ovat lineaarisesti vapaita kunnan $\mathbb{R}$ yli/ Let us show that 1 and i are linearly independent over the field $\mathbb{R}$. Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi/Set linear combination to zero:

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{72}$$

1. $a \neq 0$. Nyt saadaan $ai + bi^2 = 0$, joten

$$i = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad -1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq 0. \quad \text{Ristiriita/A contradiction.} \tag{73}$$

2. $b \neq 0$. Nyt

$$i = -\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad -1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq 0. \quad \text{Ristiriita.} \tag{74}$$

Siten $a = b = 0$, joten 1 ja i ovat lineaarisesti vapaita kunnan $\mathbb{R}$ yli/ Thus $a = b = 0$, whereupon 1 and i are linearly independent over the field $\mathbb{R}$.

Yhteensä/All together:
$\{1, i\}$ muodostaa vektoriavaruuden $\mathbb{C}$ kannan kunnan $\mathbb{R}$ yli/
$\{1, i\}$ forms a base of the vector space $\mathbb{C}$ over the field $\mathbb{R}$.

1.7.1 Extra material/not expected in exams

Esimerkki 35.

Ei ole olemassa sellaista äärellistä osajoukkoa, $J \subseteq \mathbb{R}$, että

$$\mathbb{R} = \langle J \rangle_{\mathbb{Q}}. \tag{75}$$

Mutta on olemassa sellainen ääretön osajoukko $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \mathbb{R}$, että

$$\mathbb{R} = \langle I \rangle_{\mathbb{Q}}. \tag{76}$$

Siten reaaliluvut muodostavat ääretönulotteisen vektoriavaruuden rationaalilukujen kunnan yli, joten

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty.$$

Todistus on aika haastava eikä kuulu tämän kurssin vaatimuksiin.

Kvaterniot $\mathbb{H}$, katso työkalupaketti/Quaternions $\mathbb{H}$, see the tool box.

Esimerkki 36. $\mathbb{H}$ *on* $\mathbb{C}$*-vektoriavaruus ja*

$$\mathbb{H} = \langle 1, j \rangle_{\mathbb{C}}, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H} = 2. \tag{77}$$

Esimerkki 37. $\mathbb{H}$ *on* $\mathbb{R}$*-vektoriavaruus ja*

$$\mathbb{H} = \langle 1, i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4. \tag{78}$$