LINEAARIALGEBRA

Harjoituksia/Exercises 2020
Valittuja ratkaisuja/Selected solutions

1. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Osoita, että $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ on lineaariavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_n)$ identtisyys, yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen määritellään koordinaateittain/Show that the set is a vector space when we set identity relation, addition and multiplication by a real number coordinate-wise:

$$\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall\ i = 1, ..., n;$$
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n);$$
$$\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n),$$

aina, kun $x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n; \lambda \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu/Solution: Koordinaateissa käytetään reaalilukujen kuntaominaisuuksia.
LA1a. katso luennot.
LA1b. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$? Lasketaan

$$V.P. = \overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$
$$O.P. = \overline{y} + \overline{x} = (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

Saatiin: V.P.=O.P. mot.
LA1c. katso luennot: nolla-alkio=(0,...,0).
LA1d. Alkion $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ vasta-alkio on $(-x_1, ..., -x_n)$, koska

$$(x_1, ..., x_n) + (-x_1, ..., -x_n) = (x_1 - x_1, ..., x_n - x_n) = (0, ..., 0).$$

Siten $-\overline{x} = (-x_1, ..., -x_n)$.
LA2a. katso luennot.
LA2b. $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$? Lasketaan skalaaritulo

$$1 \cdot (x_1, ..., x_n) = (1x_1, ..., 1x_n) = (x_1, ..., x_n). \quad q.e.d.$$

LA3a. $\lambda \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \lambda \cdot \overline{x} + \lambda \cdot \overline{y}$? Lasketaan

$$\begin{aligned} V.P. = \lambda \cdot (\overline{x} + \overline{y}) &= \lambda \cdot (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), ..., \lambda(x_n + y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, ..., \lambda x_n + \lambda y_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O.P. = \lambda \cdot \overline{x} + \lambda \cdot \overline{y} &= (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) + (\lambda y_1, ..., \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, ..., \lambda x_n + \lambda y_n). \end{aligned}$$

Saatiin: V.P.=O.P. q.e.d.

2. Osoita, että $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ ei ole vektoriavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ laskutoimitukset on annettu seuraavasti/Show that the set is not a vector space with the binary operations:

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad i = 1, 2;\\
&\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2);\\
&\lambda \times \overline{x} = (\lambda x_1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ratkaisu: Aluksi huomataan, että yhteenlasku on normaali (1. tehtävän mukainen) avaruuden $\mathbb{R}^2$ yhteenlasku. Siten aksiomit 1abcd toteutuvat, joten mahdollinen vika on skalaarikertolaskua $\times$ käyttävissä aksiomeissa.
LA2b. $1 \times \overline{x} = \overline{x}$? Lasketaan

$$\begin{aligned}
V.P. &= 1 \times (x_1, x_2) = (x_1, 0);\\
O.P. &= (x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Valitaan vaikka $x_2 = 1$, jolloin $V.P. \neq O.P.$, joten aksiomi LA2b ei toteudu kaikilla $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$. mot.

3. Osoita, että $(\mathbb{R}^2, \oplus, \times)$ ei ole lineaariavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ laskutoimitukset on annettu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall\, i = 1, 2;\\
&\overline{x} \oplus \overline{y} = (x_1 - y_1, x_2 + y_2);\\
&\lambda \times \overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

LA1b. $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$? Valitaan/Let us choose $\overline{x} = (1, 0)$ ja $\overline{y} = (0, 1)$. Lasketaan/Compute

$$\begin{aligned}
V.P. &= \overline{x} + \overline{y} = (1, 1)\\
O.P. &= \overline{y} + \overline{x} = (-1, 1)
\end{aligned}$$

$V.P. \neq O.P.$, joten aksiomi LA1b ei toteudu kaikilla/does not hold for all $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$. mot.

4. Olkoot $K = \mathbb{R}$ ja $V = \mathbb{R}^+$. Määritellään vektoriyhteenlasku ja skalaarilla kertominen seuraavasti

$$\begin{aligned}
x \oplus y &= xy \quad \text{(reaalilukujen kertolasku);}\\
r \times x &= x^r \quad \text{(reaalilukujen potenssi);}
\end{aligned}$$

aina, kun $r \in K$ ja $x, y \in V$.

(a) Ovatko $\oplus$ ja $\times$ binäärioperaatioita?
V: Ovat.

(b) Onko $(V, \oplus, \times)$ vektoriavaruus kunnan K yli?
V: On.

5. Määritellään vektoriyhteenlasku ja skalaarilla kertominen seuraavasti

$$x \oplus y = x + y \quad \text{(reaalilukujen yhteenlasku);}$$
$$r \otimes x = rx \quad \text{(reaalilukujen kertolasku).}$$

(a) Onko $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{Q}$ yli? V: On.

(b) Onko $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{R}$ yli? V: Ei.

(c) Onko $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{Q}$ yli? V: On.

(d) Onko $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{R}$ yli? V: On.

6. Olkoon K kunta ja $0, 1 \in K$ sen nolla- ja ykkösalkiot. Olkoon V lineaariavaruus kunnan K yli sekä $\overline{0} \in V$ sen nolla-alkio. Osoita lineaariavaruuden aksiomeja käyttäen, että/Show by using the axioms of linear space that:

(a) $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$ kaikilla $\lambda \in K$.

(b) $-\lambda \cdot v = (-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v)$ kaikilla $\lambda \in K$, $v \in V$;

(c) Jos $\lambda \cdot v = \lambda \cdot w$ ja $\lambda \neq 0$, niin $v = w$;

c) RATKAISU: Koska/Because $\lambda \neq 0$, niin on olemassa käänteisalkio/there exists an inverse $\lambda^{-1} \in K$. Kerrotaan/Multiply $\lambda \cdot v = \lambda \cdot w$ puolittain käänteisalkiolla/both sides by the inverse, jolloin/whereupon

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot w) \quad \Rightarrow \quad (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot w \quad \Rightarrow$$
$$1 \cdot v = 1 \cdot w \quad \Rightarrow \quad v = w. \quad q.e.d.$$

7. Olkoot

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0\};$$
$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0\};$$
$$W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 1 = 0\}$$

(a) Osoita, että W_1 on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus/Show that W_1 is a subspace of the vector space $\mathbb{R}^4$.

(b) Onko W_2 on vektoriavaruuden W_1 aliavaruus/Is W_2 a subspace of the vector space W_1?

(c) Onko W_2 on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus?

(d) Miksi W_3 ei ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus/Why W_3 is not a subspace of the vector space $\mathbb{R}^4$?

7b-kohta VASTAUS: EI.
RATKAISU:
AA1: Onko $\emptyset \neq W_2 \subseteq W_1$?
Esimerkiksi $(1, 2, 1, 10) \in W_2$, koska $x - y + z = 1 - 2 + 1 = 0$. Mutta $(1, 2, 1, 10) \notin W_1$, koska $x - y + z - t = -10 \neq 0$. Siten $W_2 \not\subseteq W_1$;

7c-kohta VASTAUS: ON.
RATKAISU: Osoitetaan, että aliavaruusaksiomit ovat voimassa.

AA1: $\overline{0} = (0, 0, 0, 0) \in W_2$, koska $x - y + z = 0 - 0 + 0 = 0$. Siten $\emptyset \neq W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$;

AA2: Olkoot $w_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1), w_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in W_2$. Tällöin

$$x_1 - y_1 + z_1 = x_2 - y_2 + z_2 = 0.$$

Lasketaan

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \quad \text{ja} \\ (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) &= x_1 - y_1 + z_1 + x_2 - y_2 + z_2 = 0, \end{aligned}$$

joten $w_1 + w_2 \in W_2$;

AA3: Olkoot $w = (x, y, z, t) \in W_2$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, tällöin

$$x - y + z = 0.$$

Lasketaan

$$\begin{aligned} \lambda \cdot w &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \quad \text{ja} \\ (\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) &= \lambda(x - y + z) = 0, \end{aligned}$$

joten $\lambda \cdot w \in W_2$.

7d-kohta RATKAISU:
Koska aksiomi AA2 ei toteudu. Esimerkiksi $(1, 0, 0, 0) \in W_3$, koska $x-y+z-1 = 0$. Mutta
$(1, 0, 0, 0) + (1, 0, 0, 0) = (2, 0, 0, 0) \notin W_3$, sillä $2 - 0 + 0 - 1 = 1 \neq 0$.

8. Olkoon V lineaariavaruus kunnan K yli sekä $\overline{0} \in V$ sen nolla-alkio.
Osoita, että $\overline{0} \in W$ aina, kun W on V:n aliavaruus.
RATKAISU: Because $W \neq \emptyset$, there exists an element $a \in W$. By the third axiom $\lambda \cdot a \in W$ for any $\lambda \in K$. In particular, $0 \cdot a \in W$, where $0 \cdot a = \overline{0}$. Therefore $\overline{0} \in W$. q.e.d.

9. Olkoon V lineaariavaruus kunnan K yli ja $v, v_1, v_2 \in V$ sekä

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\alpha v | \ \alpha \in K\}; \\ W_2 &= \{\alpha v_1 + \beta v_2 | \ \alpha, \beta \in K\}. \end{aligned}$$

(a) Määritä lineaarinen verho/Determine the linear hull $\langle v \rangle_K$.

(b) Määritä lineaarinen verho $\langle v_1, v_2 \rangle_K$.

(c) Osoita, että W_1 on vektoriavaruuden V aliavaruus/Show that W_1 is a subspace of the vector space V.

(d) Onko W_2 on avaruuden V aliavaruus?

(e) Onko W_1 on avaruuden W_2 aliavaruus, jos $v = v_1 - v_2$?

10. Olkoon K kunta ja $V = K^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Merkitään/Let us denote

$$\overline{e}_k = (0, ..., 1, ..., 0) \in K^n,$$

missä k:s koordinaatti on 1 ja muut nollia aina, kun $k = 1, 2, ..., n$./where the kth coordinate is 1 and the others are zero. Osoita, että vektorit $\overline{e}_1$, ..., $\overline{e}_n$ ovat lineaarisesti vapaita kunnan K yli./Show that the vectors $\overline{e}_1$, ..., $\overline{e}_n$ are linearly independent over the field K.
Ratkaisu. Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi:
$a_1\overline{e}_1 + ... + a_n\overline{e}_n = \overline{0}$, $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n \in K$, eli
$a_1(1, 0, 0, ..., 0) + a_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + a_n(0, 0, ..., 0, 1) = (0, 0, ..., 0, 0)$, mistä
$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n) = (0, 0, ..., 0, 0)$.
Siten $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = a_n = 0$. q.e.d.

11. Olkoot

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(t) = f(t + 2\pi)\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}; \\ F_2 &= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f' = f\}; \\ F_3 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(\pi) = 0\}. \end{aligned}$$

(a) Onko F_1 avaruuden $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus? V: On.

(b) Onko F_2 on avaruuden $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus? Tässä f' on funktion f derivaatta. V: On.

(c) Onko F_3 avaruuden $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus? V: On.

12. Kuuluuko polynomi x^2 joukon/does the polynomial x^2 belong to the linear hull of $\{x, x^3, x + 2x^2 + 3x^3\} \subseteq \mathcal{P}\mathrm{ol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lineaariseen verhoon?
V: Yes.
Ratkaisu: Jos $x^2 \in \langle x, x^3, x + 2x^2 + 3x^3\rangle_{\mathbb{R}}$, niin on olemassa $a, b, c \in \mathbb{R}$ siten, että $x^2 = ax + bx^3 + c(x + 2x^2 + 3x^3) = (a + c)x + 2cx^2 + (b + 3c)x^3$. Polynomit ovat identtiset, kun vastinpotenssien kertoimet ovat identtiset. Siten saadaan
$1 = 2c, 0 = a + c, 0 = b + 3c$, josta $a = -1/2, b = -3/2, c = 1/2$. Todellakin:
$x^2 = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}(x + 2x^2 + 3x^3) \in \langle x, x^3, x + 2x^2 + 3x^3\rangle_{\mathbb{R}}$.

13. Olkoon

$$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^k\} \subseteq \mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(a) Osoita, että S on lineaarisesti vapaa/Show that S is linearly independent.

(b) Osoita, että $\langle S\rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) Osoita, että S on polynomiavaruuden $\mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kanta/ Show that S is a base of the polynomial space $\mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ratkaisu: a)+b).

(d) Määritä $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
V: $k + 1$.

14. Olkoon

$$W = \{p \in \mathcal{P}\mathrm{ol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R}) : p(1) = p(-1) = 0\}.$$

Osoita, että W on avaruuden $\mathcal{P}\mathrm{ol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aliavaruus ja määrää $\dim_{\mathbb{R}} W$.

15. Olkoon

$$\mathrm{Sym}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\}$$

symmetristen matriisien joukko/the set of symmetric matrices.

(a) Osoita, että $\mathrm{Sym}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ on avaruuden $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ aliavaruus.

(b) Laske $\dim_{\mathbb{R}} M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
V: 4. Ratkaisu:
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$am_1 + bm_2 + cm_3 + dm_4$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Siten $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \langle m_1, m_2, m_3, m_4\rangle_{\mathbb{R}}$.
Osoitetaan vielä, että $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ on lineaarisesti vapaa/$\mathbb{R}$.
Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi:
$\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 + \delta m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, joten $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Siispä
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.
Täten $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ on matriisiavaruuden $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ kanta ja siten
$\dim_{\mathbb{R}} M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$. q.e.d.

(c) Laske $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sym}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
V: 3. Ratkaisu:
Olkoon $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eli $A^T = A$ eli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Siten
$c = b$ ja $a, b, d \in \mathbb{R}$, jolloin
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$as_1 + bs_2 + ds_3$, missä $s_1, s_2, s_3 \in S_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Siten $S_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \langle s_1, s_2, s_3\rangle_{\mathbb{R}}$.
Osoitetaan , että $\{s_1, s_2, s_3\}$ on lineaarisesti vapaa/$\mathbb{R}$.
Asetetaan lineaarikombinaatio nollaksi:
$\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, joten $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Siispä $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Täten $\{s_1, s_2, s_3\}$ on matriisiavaruuden $S_{2\times 2}(\mathbb{R})$ kanta ja siten
$\dim_{\mathbb{R}} S_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 3$. q.e.d.

16. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus. Osoita, että reaaliselle sisätulolle pätee/Show that for a real inner product holds

$$\langle v|\alpha w + \beta z\rangle = \alpha\langle v|w\rangle + \beta\langle v|z\rangle,$$

aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $v, u, w, z \in V$.

17. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Määritellään kuvaus $\langle\ |\ \rangle$ asettamalla/Let us define a mapping by setting

$$\langle \overline{z}|\overline{w}\rangle = \overline{z} \cdot \overline{w} = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$$

aina, kun $\overline{z} = (z_1, ..., z_n), \overline{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$.

(a) Osoita, että $(\mathbb{C}^n, \langle\ |\ \rangle)$ on kompleksinen sisätuloavaruus.

(b) Olkoon $\overline{z} = (i, ..., i)$. Laske $\langle \overline{z} \mid \overline{z} \rangle$.
V: n.

18. Määritellään kuvaus $\langle\ |\ \rangle$ asettamalla

$$\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = 5\sqrt{x_1} y_1 + 3x_2\sqrt{y_2}$$

aina, kun $\overline{x} = (x_1, x_n), \overline{y} = (y_1, y_n)$.

(a) Onko $(\mathbb{R}^2, \langle\ |\ \rangle)$ on reaalinen sisätuloavaruus?
Ei. Ratkaisu: Valitaan $\overline{x} = (1, 0), \overline{y} = (4, 0)$. Nyt $\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = 20$ ja $\langle \overline{y} | \overline{x} \rangle = 10$. Siten sisätulon 1. aksiomi ei toimi.

(b) Onko $(\mathbb{C}^2, \langle\ |\ \rangle)$ on kompleksinen sisätuloavaruus?
V: Ei.

19. Määritellään kuvaus $\langle\ |\ \rangle$ asettamalla

$$\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = 5x_1 y_1 + \sqrt{3} x_2 y_2$$

aina, kun $\overline{x} = (x_1, x_n), \overline{y} = (y_1, y_n)$.

(a) Onko $(\mathbb{R}^2, \langle\ |\ \rangle)$ on reaalinen sisätuloavaruus?
Seuraavassa $\overline{x} = (x_1, x_n), \overline{y} = (y_1, y_n), \overline{y} = (y_1, y_n) \in \mathbb{R}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$.
V: ON. Ratkaisussa käytetään reaalilukujen laskusääntöjä=kunta-aksiomeja/in the solution we use the laws of real numbers=field axioms.
a). $\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = \langle \overline{y} | \overline{x} \rangle$?. Lasketaan
V.P.=$\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle = 5x_1 y_1 + \sqrt{3} x_2 y_2 = 5y_1 x_1 + \sqrt{3} y_2 x_2 = \langle \overline{y} | \overline{x} \rangle$=O.P. q.e.d.
b). $\langle \overline{x} + \overline{z} | \overline{y} \rangle = \langle \overline{x} | \overline{y} \rangle + \langle \overline{z} | \overline{y} \rangle$?. Lasketaan
V.P.=$\langle \overline{x} + \overline{z} | \overline{y} \rangle =$
$\langle (x_1 + z_1, x_2 + z_2) | (y_1, y_2) \rangle = 5(x_1 + z_1) y_1 + \sqrt{3}(x_2 + z_2) y_2 =$
$5x_1 y_1 + \sqrt{3} x_2 y_2 + 5z_1 y_1 + \sqrt{3} z_2 y_2 = \langle \overline{x} | \overline{y} \rangle + \langle \overline{z} | \overline{y} \rangle$=O.P. q.e.d.
c). $\langle r\overline{x} | \overline{y} \rangle = r\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle$?. Lasketaan
V.P.=$\langle r\overline{x} | \overline{y} \rangle = \langle (rx_1, rx_2) | (y_1, y_2) \rangle = 5(rx_1) y_1 + \sqrt{3}(rx_2) y_2 =$
$r(5x_1 y_1 + \sqrt{3} x_2 y_2) = r\langle \overline{x} | \overline{y} \rangle$=O.P. q.e.d.
d) $\langle \overline{x} | \overline{x} \rangle > 0$ aina, kun $\overline{x} \neq \overline{0}$?. Lasketaan
$\langle \overline{x} | \overline{x} \rangle = 5x_1^2 + \sqrt{3} x_2^2$. Koska $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, niin $x_1 \neq 0$ tai $x_2 \neq 0$. Siten $x_1^2 > 0$ tai $x_2^2 > 0$, jolloin $5x_1^2 + \sqrt{3} x_2^2 > 0$. q.e.d.

(b) Onko $(\mathbb{C}^2, \langle\ |\ \rangle)$ on kompleksinen sisätuloavaruus?
V: EI.

20. Määritellään kuvaus $\langle\ |\ \rangle$ asettamalla

$$\langle p \mid q \rangle = \sum_{k=0}^{2} p(k) q(k)$$

aina, kun $p, q \in \mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Osoita, että näin saatu kuvaus $\langle\ |\ \rangle$ on avaruuden $\mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sisätulo.

(b) Onko kuvaus $\langle\ |\ \rangle$ avaruuden $\mathcal{P}\mathrm{ol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sisätulo?

21. Olkoot $\overline{n} = (1, 0, -1)$ ja $W = \{\overline{w} \in \mathbb{R}^3 : \overline{w} \cdot \overline{n} = 0\}$.

(a) Osoita, että W on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.
RATKAISU:
1. Koska $\overline{0} \cdot \overline{n} = 0$, niin $\overline{0} \in W$.
2. Olkoot $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in W$. Lasketaan
$(\overline{w}_1 + \overline{w}_2) \cdot \overline{n} = \overline{w}_1 \cdot \overline{n} + \overline{w}_2 \cdot \overline{n} = 0 + 0 = 0$.
3. Olkoot $r \in \mathbb{R}$ ja $\overline{w} \in W$. Lasketaan
$(r\overline{w}) \cdot \overline{n} = r(\overline{w} \cdot \overline{n}) = r0 = 0$.

(b) Määrää aliavaruudelle W jokin kanta/Determine a basis for the subspace W.
RATKAISU: Olkoon $w = (x, y, z) \in W$. Nyt

$$\overline{w} \cdot \overline{n} = 0 \ \Rightarrow\ (x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = x - z = 0 \ \Rightarrow$$

$$\overline{w} = (z, y, z) = (z, 0, z) + (0, y, 0) = z(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) \ \Rightarrow$$
$$W = \{z(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) |\ z, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle_{\mathbb{R}},$$

missä $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$ ovat lineaarisesti vapaita. Siten $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ on kanta.

(c) Laske $\dim_{\mathbb{R}} W$.
V: 2.

22. Olkoon V kompleksinen sisätuloavaruus, $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $v, w \in V$.

(a) Osoita, että
$$\langle v|\lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v|w\rangle.$$
Ratkaisu. Lasketaan
V.P.= $\langle v|\lambda w\rangle = \overline{\langle \lambda w|v\rangle} = \overline{\lambda\langle w|v\rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle w|v\rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\overline{\langle v|w\rangle}} = \overline{\lambda}\langle v|w\rangle$. =O.P.
q.e.d.

(b) Määrää
$$\langle i \cdot v|w\rangle + \langle v|i \cdot w\rangle.$$
V: 0.

(c) Onko tulo $\langle v|w\rangle\langle w|v\rangle$ reaaliluku?
V: On. Sillä $\langle v|w\rangle\langle w|v\rangle = \langle v|w\rangle\overline{\langle v|w\rangle} = |\langle v|w\rangle|^2$.

23. Onko joukko A_k ortogonaalinen, ja jos, niin onko se ortonormaali, kun/Is the set A_k orthogonal, and if, is it orthonormal

(a) $A_1 = \{(1, -1, 1), (2, 0, -2), (1, 2, 1)\}$?
V: On ortogonaalinen. Ei ole ortonormaali.

(b) $A_2 = \{(i, 0, 0), (0, -i, 0), (0, 0, i)\}$?
V: On ortogonaalinen. On ortonormaali.

(c) $A_3 = \{(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$?
V: On ortogonaalinen. On ortonormaali.

24. Määritellään kuvaus $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\|\overline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

kaikilla $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että $\|\cdot\|_1$ on normi. Piirrä joukko

$$\{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\overline{x}\|_1 \leq 1\}.$$

25. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in V$.

26. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus ja $x, y \in V$. Osoita, että

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

RATKAISU: Aluksi sisätulonormin määritelmästä saadaan $\|x\|^2 = x \cdot x$. Siten

$x \perp y \Leftrightarrow x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = (x + y) \cdot (x + y) = \|x + y\|^2.$

27. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus ja $x, y \in V$ sellaiset vektorit, joille pätee $\|x\| = 2$, $\|y\| = 2$ ja $\|x + y\| = 3$. Laske vektoreiden x ja y välinen etäisyys $\|x - y\|$/Compute the distance $\|x - y\|$.
RATKAISU:
$9 = \|x + y\|^2 = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y = 4 + 2x \cdot y + 4$, siten $2x \cdot y = 1$.
Niinpä
$\|x - y\|^2 = x \cdot x - 2x \cdot y + y \cdot y = 7$, joten $\|x - y\| = \sqrt{7}$.

28. Olkoot H äärellinen sisätuloavaruus/finite inner product space ja S sen ortogonaalinen kanta.

(a) Olkoon $u \in H$ sellainen vektori, että $u \perp v$ kaikilla $v \in S$. Osoita, että $u = \overline{0}$.

(b) Olkoon $A^\perp$ aliavaruuden $A \subseteq H$ ortogonaalikomplementti. Todista, että

$$A \cap A^\perp = \{\overline{0}\}.$$

28a SOLUTION: The real case $K = \mathbb{R}$.
Let $h := \dim H$, then $S = \{s_1, ..., s_h\}$, $H = \langle s_1, ..., s_h \rangle_{\mathbb{R}}$, where $s_i \cdot s_j = 0$ for all $i \neq j$ and $s_i \neq \overline{0}$ for $i = 1, ..., h$. By the assumption $u \cdot s_j = 0$ for all $j = 1, ..., h$. Now $u = a_1 s_1 + \ldots + a_h s_h$, where $a_1, ..., a_h \in \mathbb{R}$. Taking inner product with s_1 implies
$u \cdot s_1 = a_1 s_1 \cdot s_1 + \ldots + a_h s_h \cdot s_1$,
where $u \cdot s_1 = 0$ and $s_2 \cdot s_1 = \ldots = s_h \cdot s_1 = 0$ by the assumptions. Hence $0 = a_1 s_1 \cdot s_1$, where $s_1 \cdot s_1 > 0$, proving $a_1 = 0$. Similarly $a_2 = ... = a_h = 0$. Consequently $u = 0\, s_1 + \ldots + 0\, s_h = \overline{0}$. $\square$
28b RATKAISU:
1: $c \in A \cap A^\perp \quad \Rightarrow \quad c \in A \quad$ ja $\quad c \in A^\perp \quad \Rightarrow \quad c \cdot c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \overline{0}$.
2. Koska A on aliavaruus, niin $\overline{0} \in A$ ja aina $\overline{0} \in A^\perp$. Siten $\overline{0} \in A \cap A^\perp$.

29. (a) Etsi Gram-Schmidtin menetelmällä aliavaruudelle/Find an orthonormal basis for the subspace

$$H = \langle(-1,1,1,1),(0,-1,1,1),(0,0,-1,1)\rangle$$

ortonormaali kanta.

(b) Mitkä ovat vektorin $\overline{x} = (1,2,3,-11)$ koordinaatit löytämässäsi kannassa/What are the coordinates of the vector $x = (1,2,3,-11)$ in the base you found?

29a RATKAISU: Luentojen merkinnöillä:

$$H = \langle v_1 = (-1,1,1,1), v_2 = (0,-1,1,1), v_3 = (0,0,-1,1)\rangle = \langle w_1, w_2, w_3\rangle,$$

missä $w_1 = v_1$ ja

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = ... = \frac{1}{4}(1,-5,3,3).$$

Edelleen

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = ... = (0,0,-1,1).$$

Siten ortogonaaliset vektorit ovat

$$\begin{aligned} w_1 &= (-1,1,1,1); \\ w_2 &= \frac{1}{4}(1,-5,3,3) \\ w_3 &= (0,0,-1,1). \end{aligned}$$

Jotka normitetaan jakamalla ne kukin omalla pituudellaan, jolloin ortonormitetut vektorit ovat

$$\begin{aligned} \overline{f}_1 &= \frac{1}{2}(-1,1,1,1); \\ \overline{f}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{11}}(1,-5,3,3) \\ \overline{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1). \end{aligned}$$

29b SOLUTION: Let us write

$$\overline{x} = (1,2,3,-11) = x_1\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2 + x_3\overline{f}_3.$$

Then by taking scalar product with $\overline{f}_1$ you get

$$(1,2,3,-11)\cdot\overline{f}_1 = x_1\overline{f}_1\cdot\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2\cdot\overline{f}_1 + x_3\overline{f}_3\cdot\overline{f}_1.$$

We had $\overline{f}_1\cdot\overline{f}_2 = \overline{f}_1\cdot\overline{f}_3 = \overline{f}_2\cdot\overline{f}_3 = 0$ and $\overline{f}_1\cdot\overline{f}_1 = \overline{f}_2\cdot\overline{f}_2 = \overline{f}_3\cdot\overline{f}_3 = 1$, therefore

$$x_1 = (1,2,3,-11)\cdot\frac{1}{2}(-1,1,1,1) = -\frac{7}{2}.$$

similarly

$$\begin{aligned} x_2 &= (1,2,3,-11)\cdot\frac{1}{2\sqrt{11}}(1,-5,3,3) = -\frac{3}{2}\sqrt{11} \\ x_3 &= (1,2,3,-11)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1) = -7\sqrt{2}. \end{aligned}$$

30. Olkoon L lineaarikuvaus/Let L be a linear mapping. Osoita, että $L(\overline{0}) = \overline{0}$.
RATKAISU:
$$L(\overline{0}) = L(0 \cdot \overline{0}) = 0 \cdot L\overline{0} = \overline{0}.$$

31. Osoita, että nollakuvaus ja identtinen kuvaus ovat lineaarisia/Show that zero- and identity mappings are linear.

32. Määritellään kuvaus/Let us define $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, asettamalla/by setting
$$L\overline{x} = L(x, y, z) = (x, y + z)$$
aina, kun $\overline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että kuvaus L lineaarinen?
RATKAISU.
Kohta a: vertaa luentojen esimerkki 6.
Kohta b: $L(r\overline{x}) = L(rx, ry, rz) = (rx, ry + rz) = r(x, y + z) = rL\overline{x}$
aina, kun $r \in \mathbb{R}$ ja $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$.

33. Onko $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ lineaarinen?
VASTAUS: EI. Esimerkiksi aksiomi LAb ei päde, kun $\lambda = 0$.

34. Onko $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2) = \pi x_1$ lineaarinen?
VASTAUS: ON.

35. Olkoon $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen lineaarikuvaus, että $L(-7) = 14$. Laske $L(100)$.
RATKAISU:
$$14 = L(-7) = (-7)L(1) \quad \Rightarrow \quad L1 = -2 \quad \Rightarrow \quad L(100) = 100L1 = -200.$$

36. Määritellään kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, asettamalla
$$L(a, b) = a + bx$$
aina, kun $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

    (a) Osoita, että kuvaus L on lineaarinen?
    RATKAISU: $L(v + w) = L((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = L(a_1 + a_2, b_1 + b_2) =$
    $a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x = a_1 + b_1x + a_2 + b_2x = Lv + Lw$ ja
    $L(rv) = L(r(a, b)) = L(ra, rb) = ra + (rb)x = r(a + bx) = rLv$.

    (b) Määrää Ker L.
    V: Ker $L = \{(0, 0)\}$.

    (c) Onko L injektio?
    V: ON.

    (d) Määrää Im L.
    V: Im $L = \{a + bx |\ a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{P}\mathrm{ol}_1$.

    (e) Onko L surjektio?
    V: EI.

(f) Onko L bijektio?
V: EI.

(g) Määrää $\dim \mathrm{Ker}\, L$ ja $\dim \mathrm{Im}\, L$ ja vertaa tulosta dimensiokaavaan/ Determine $\dim \mathrm{Ker}\, L$ and $\dim \mathrm{Im}\, L$ and compare to the dimension formula.
RATKAISU: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathrm{Ker}\, L = 0$, $\dim \mathrm{Im}\, L = 2$.

37. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus, $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$ ja $n \in V$ annettu. Määritellään kuvaus $L : V \to \mathbb{R}$, asettamalla

$$L(x) = n \cdot x$$

aina, kun $x \in V$.

(a) Osoita, että kuvaus L on lineaarinen.
RATKAISU: $L(x + y) = n \cdot (x + y) = n \cdot x + n \cdot y = Lx + Ly$;
$L(\lambda x) = n \cdot (\lambda x) = \lambda(n \cdot x) = \lambda Lx$
aina, kun $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. q.e.d.

(b) Määrää $\dim \mathrm{Im}\, L$.

(c) Määrää $\dim \mathrm{Ker}\, L$.

Kohtien 37b ja 37c ratkaisu: luentojen III osa, Esimerkki 15.

38. Määritellään lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, asettamalla
$L(\overline{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$ aina, kun $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Määrää Ker L.

(b) Onko L injektio?

(c) Määrää $\dim \mathrm{Ker}\, L$ ja $\dim \mathrm{Im}\, L$ (käytä/use dimensiokaavaa).

(d) Onko L surjektio?

(e) Onko L bijektio?

(f) Määrää L:n matriisi $[L]_{\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_4}$ luonnollisten kantojen $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ja $E_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$ suhteen/determine the matrix with respect to standard bases.

VASTAUS: vertaa luentojen III osa: Esimerkit 13 ja 14:

Ker $L = \{\overline{0}\}$;
ON injektio;
$\dim \mathrm{Ker}\, L = 0$;
$\dim \mathrm{Im}\, L = 3$;
EI ole surjektio eikä bijektio;

$$[L]_{\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Lineaarikuvaksen L matriisi on

$$[L]_{\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Anna kuvaus L muodossa/give the mapping in the form

$$L(x,y) = (a,b,c,d) = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4.$$

39 RATKAISU:

$$\begin{aligned} Le_1 &= -e_2 + 2e_3 + e_4; \\ Le_2 &= e_1 + e_3 - 2e_4, \quad \Rightarrow \\ L(x,y) &= L(xe_1 + ye_2) = xLe_1 + yLe_2 = \\ &ye_1 - xe_2 + (2x+y)e_3 + (x-2y)e_4 = \\ &(y, -x, 2x+y, x-2y). \end{aligned}$$

40. Lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ toteuttaa ehdot/satisfies the conditions

$$\begin{aligned} &Lu_1 = u_1 - u_2 + u_3, \\ &L(u_1 - u_2) = u_1, \quad \text{ja} \\ &L(u_1 - u_2 + u_3) = 2u_2 - u_3, \end{aligned}$$

missä $\{u_1, u_2, u_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Laske Lu_2 ja Lu_3.
40 RATKAISU:

$$\begin{aligned} L(u_1 - u_2) = u_1, \quad \Rightarrow \quad Lu_1 - Lu_2 = u_1, \quad \Rightarrow \\ Lu_2 = Lu_1 - u_1 = -u_2 + u_3; \\ L(u_1 - u_2 + u_3) = 2u_2 - u_3, \quad \Rightarrow \quad Lu_1 - Lu_2 + Lu_3 = 2u_2 - u_3, \quad \Rightarrow \\ Lu_3 = -Lu_1 + Lu_2 + 2u_2 - u_3 = -u_1 + 2u_2 - u_3. \end{aligned}$$

41. Olkoon $S = \langle \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{R}}$ ja $\mathrm{s} = \{\sin x, \cos x\}$. Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L : S \ \to \ S, \quad L = D^2 + 2D + I,$$

missä D on derivaattakuvaus/derivative mapping ja I on avaruuden S identtinen kuvaus. Määritä

$$[L]_{\mathrm{s},\mathrm{s}}.$$

41 VASTAUS:

$$[L]_{\mathrm{s},\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

42. Näytä, että pisteen t kohtisuora projektio $\mathrm{PROJ}_A(t) = p$ aliavaruudelle A on yksikäsitteinen/ Show that orthogonal projection $\mathrm{PROJ}_A(t) = p$ of the point t to the subspace A is unique.