LINEAARIALGEBRA

Harjoituksia/Exercises 2020

1. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Osoita, että $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ on lineaariavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\overline{y} = (y_1, ..., y_n)$ identtisyys, yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen määritellään koordinaateittain/Show that the set is a vector space when we set identity relation, addition and multiplication by a real number coordinate-wise:

$$\begin{aligned} &\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall\ i = 1, ..., n; \\ &\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n); \\ &\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n), \end{aligned}$$

   aina, kun $x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n; \lambda \in \mathbb{R}$.

2. Osoita, että $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ ei ole vektoriavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ laskutoimitukset on annettu seuraavasti/Show that the set is not a vector space with the binary operations:

$$\begin{aligned} &\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad i = 1, 2; \\ &\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2); \\ &\lambda \times \overline{x} = (\lambda x_1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Osoita, että $(\mathbb{R}^2, \oplus, \times)$ ei ole lineaariavaruus, kun vektoreiden $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ laskutoimitukset on annettu seuraavasti:

$$\begin{aligned} &\overline{x} = \overline{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall\ i = 1, 2; \\ &\overline{x} \oplus \overline{y} = (x_1 - y_1, x_2 + y_2); \\ &\lambda \times \overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Olkoot $K = \mathbb{R}$ ja $V = \mathbb{R}^+$. Määritellään vektoriyhteenlasku ja skalaarilla kertominen seuraavasti

$$\begin{aligned} &x \oplus y = xy \quad \text{(reaalilukujen kertolasku);} \\ &r \times x = x^r \quad \text{(reaalilukujen potenssi);} \end{aligned}$$

   aina, kun $r \in K$ ja $x, y \in V$.

   (a) Ovatko $\oplus$ ja $\times$ binäärioperaatioita?

   (b) Onko $(V, \oplus, \times)$ vektoriavaruus kunnan K yli?

5. Määritellään vektoriyhteenlasku ja skalaarilla kertominen seuraavasti

$$x \oplus y = x + y \quad \text{(reaalilukujen yhteenlasku);}$$
$$r \otimes x = rx \quad \text{(reaalilukujen kertolasku).}$$

   (a) Onko $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{Q}$ yli?
   (b) Onko $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{R}$ yli?
   (c) Onko $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{Q}$ yli?
   (d) Onko $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ vektoriavaruus kunnan $\mathbb{R}$ yli?

6. Olkoon K kunta ja $0, 1 \in K$ sen nolla- ja ykkösalkiot. Olkoon V lineaariavaruus kunnan K yli sekä $\overline{0} \in V$ sen nolla-alkio. Osoita lineaariavaruuden aksiomeja käyttäen, että/Show by using the axioms of linear space that:

   (a) $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$ kaikilla $\lambda \in K$.
   (b) $-\lambda \cdot v = (-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v)$ kaikilla $\lambda \in K$, $v \in V$;
   (c) Jos $\lambda \cdot v = \lambda \cdot w$ ja $\lambda \neq 0$, niin $v = w$;

7. Olkoot

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0\};$$
$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0\};$$
$$W_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - 1 = 0\}$$

   (a) Osoita, että W_1 on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus/Show that W_1 is a subspace of the vector space $\mathbb{R}^4$.
   (b) Onko W_2 on vektoriavaruuden W_1 aliavaruus/Is W_2 a subspace of the vector space W_1?
   (c) Onko W_2 on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus?
   (d) Miksi W_3 ei ole vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus/Why W_3 is not a subspace of the vector space $\mathbb{R}^4$?

8. Olkoon V lineaariavaruus kunnan K yli sekä $\overline{0} \in V$ sen nolla-alkio.
   Osoita, että $\overline{0} \in W$ aina, kun W on V:n aliavaruus.

9. Olkoon V lineaariavaruus kunnan K yli ja $v, v_1, v_2 \in V$ sekä

$$W_1 = \{\alpha v |\ \alpha \in K\};$$
$$W_2 = \{\alpha v_1 + \beta v_2 |\ \alpha, \beta \in K\}.$$

   (a) Määritä lineaarinen verho/Determine the linear hull $\langle v \rangle_K$.
   (b) Määritä lineaarinen verho $\langle v_1, v_2 \rangle_K$.
   (c) Osoita, että W_1 on vektoriavaruuden V aliavaruus/Show that W_1 is a subspace of the vector space V.
   (d) Onko W_2 on avaruuden V aliavaruus?

(e) Onko W_1 on avaruuden W_2 aliavaruus, jos $v = v_1 - v_2$?

10. Olkoon K kunta ja $V = K^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Merkitään/Let us denote

$$\overline{e}_k = (0, ..., 1, ..., 0) \in K^n,$$

missä k:s koordinaatti on 1 ja muut nollia aina, kun $k = 1, 2, ..., n$./where the kth coordinate is 1 and the others are zero. Osoita, että vektorit $\overline{e}_1$, ..., $\overline{e}_n$ ovat lineaarisesti vapaita kunnan K yli./Show that the vectors $\overline{e}_1$, ..., $\overline{e}_n$ are linearly independent over the field K.

11. Olkoot

$$F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(t) = f(t + 2\pi) \ \forall\, t \in \mathbb{R}\};$$
$$F_2 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f' = f\};$$
$$F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(\pi) = 0\}.$$

(a) Onko F_1 avaruuden $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus?

(b) Onko F_2 on avaruuden $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus? Tässä f' on funktion f derivaatta.

(c) Onko F_3 avaruuden $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus?

12. Kuuluuko polynomi x^2 joukon/does the polynomial x^2 belong to the linear hull of $\{x, x^3, x + 2x^2 + 3x^3\} \subseteq \mathcal{P}\mathrm{ol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lineaariseen verhoon?

13. Olkoon

$$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^k\} \subseteq \mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(a) Osoita, että S on lineaarisesti vapaa/Show that S is linearly independent.

(b) Osoita, että $\langle S \rangle_{\mathbb{R}} = \mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) Osoita, että S on polynomiavaruuden $\mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kanta/ Show that S is a base of the polynomial space $\mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) Määritä $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}\mathrm{ol}_k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

14. Olkoon

$$W = \{p \in \mathcal{P}\mathrm{ol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ p(1) = p(-1) = 0\}.$$

Osoita, että W on avaruuden $\mathcal{P}\mathrm{ol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aliavaruus ja määrää $\dim_{\mathbb{R}} W$.

15. Olkoon

$$\mathrm{Sym}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ A = A^T\}$$

symmetristen matriisien joukko/the set of symmetric matrices.

(a) Osoita, että $\mathrm{Sym}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ on avaruuden $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ aliavaruus.

(b) Laske $\dim_{\mathbb{R}} M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) Laske $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sym}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

16. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus. Osoita, että reaaliselle sisätulolle pätee/Show that for a real inner product holds

$$\langle v|\alpha w + \beta z\rangle = \alpha\langle v|w\rangle + \beta\langle v|z\rangle,$$

aina, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $v, u, w, z \in V$.

17. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$. Määritellään kuvaus $\langle \mid \rangle$ asettamalla/Let us define a mapping by setting

$$\langle \overline{z}|\overline{w}\rangle = \overline{z} \cdot \overline{w} = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$$

aina, kun $\overline{z} = (z_1, ..., z_n), \overline{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$.

(a) Osoita, että $(\mathbb{C}^n, \langle \mid \rangle)$ on kompleksinen sisätuloavaruus.

(b) Olkoon $\overline{z} = (i, ..., i)$. Laske $\langle \overline{z} \mid \overline{z}\rangle$.

18. Määritellään kuvaus $\langle \mid \rangle$ asettamalla

$$\langle \overline{x}|\overline{y}\rangle = 5\sqrt{x_1}y_1 + 3x_2\sqrt{y_2}$$

aina, kun $\overline{x} = (x_1, x_n), \overline{y} = (y_1, y_n)$.

(a) Onko $(\mathbb{R}^2, \langle \mid \rangle)$ on reaalinen sisätuloavaruus?

(b) Onko $(\mathbb{C}^2, \langle \mid \rangle)$ on kompleksinen sisätuloavaruus?

19. Määritellään kuvaus $\langle \mid \rangle$ asettamalla

$$\langle \overline{x}|\overline{y}\rangle = 5x_1y_1 + \sqrt{3}x_2y_2$$

aina, kun $\overline{x} = (x_1, x_n), \overline{y} = (y_1, y_n)$.

(a) Onko $(\mathbb{R}^2, \langle \mid \rangle)$ on reaalinen sisätuloavaruus?

(b) Onko $(\mathbb{C}^2, \langle \mid \rangle)$ on kompleksinen sisätuloavaruus?

20. Määritellään kuvaus $\langle \mid \rangle$ asettamalla

$$\langle p \mid q\rangle = \sum_{k=0}^{2} p(k)q(k)$$

aina, kun $p, q \in \mathcal{P}\text{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Osoita, että näin saatu kuvaus $\langle \mid \rangle$ on avaruuden $\mathcal{P}\text{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sisätulo.

(b) Onko kuvaus $\langle \mid \rangle$ avaruuden $\mathcal{P}\text{ol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sisätulo?

21. Olkoot $\overline{n} = (1, 0, -1)$ ja $W = \{\overline{w} \in \mathbb{R}^3 : \langle \overline{w} \mid \overline{n}\rangle = 0\}$.

(a) Osoita, että W on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

(b) Määrää aliavaruudelle W jokin kanta/Determine a basis for the subspace W.

(c) Laske $\dim_{\mathbb{R}} W$.

22. Olkoon V kompleksinen sisätuloavaruus, $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $v, w \in V$.

    (a) Osoita, että
    $$\langle v|\lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v|w\rangle.$$

    (b) Määrää
    $$\langle i \cdot v|w\rangle + \langle v|i \cdot w\rangle.$$

    (c) Onko tulo $\langle v|w\rangle\langle w|v\rangle$ reaaliluku?

23. Onko joukko A_k ortogonaalinen, ja jos, niin onko se ortonormaali, kun/Is the set A_k orthogonal, and if, is it orthonormal

    (a) $A_1 = \{(1, -1, 1), (2, 0, -2), (1, 2, 1)\}$?

    (b) $A_2 = \{(i, 0, 0), (0, -i, 0), (0, 0, i)\}$?

    (c) $A_3 = \{(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0, 0), (0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$?

24. Määritellään kuvaus $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla
    $$\|\overline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$$
    kaikilla $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että $\|\cdot\|_1$ on normi. Piirrä joukko
    $$\{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\overline{x}\|_1 \leq 1\}.$$

25. Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in V$.

26. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus ja $x, y \in V$. Osoita, että
    $$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

27. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus ja $x, y \in V$ sellaiset vektorit, joille pätee $\|x\| = 2$, $\|y\| = 2$ ja $\|x + y\| = 3$. Laske vektoreiden x ja y välinen etäisyys $\|x - y\|$/Compute the distance $\|x - y\|$.

28. Olkoot H äärellinen sisätuloavaruus/finite inner product space ja S sen ortogonaalinen kanta.

    (a) Olkoon $u \in H$ sellainen vektori, että $u \perp v$ kaikilla $v \in S$. Osoita, että $u = \overline{0}$.

    (b) Olkoon $A^{\perp}$ aliavaruuden $A \subseteq H$ ortogonaalikomplementti. Todista, että
    $$A \cap A^{\perp} = \{\overline{0}\}.$$

29. (a) Etsi Gram-Schmidtin menetelmällä aliavaruudelle/Find an orthonormal basis for the subspace
    $$H = \langle(-1, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 1), (0, 0, -1, 1)\rangle$$
    ortonormaali kanta.

(b) Mitkä ovat vektorin $x = (1, 2, 3, -11)$ koordinaatit löytämässäsi kannassa/What are the coordinates of the vector $x = (1, 2, 3, -11)$ in the base you found?

30. Olkoon L lineaarikuvaus/Let L be a linear mapping. Osoita, että $L(\overline{0}) = \overline{0}$.

31. Osoita, että nollakuvaus ja identtinen kuvaus ovat lineaarisia/Show that zero- and identity mappings are linear.

32. Määritellään kuvaus/Let us define $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, asettamalla/by setting

$$L(x, y, z) = (x, y + z)$$

aina, kun $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että kuvaus L lineaarinen?

33. Onko $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$ lineaarinen?

34. Onko $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(x_1, x_2) = \pi x_1$ lineaarinen?

35. Olkoon $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen lineaarikuvaus, että $L(-7) = 14$. Laske $L(100)$.

36. Määritellään kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, asettamalla

$$L(a, b) = a + bx$$

aina, kun $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Osoita, että kuvaus L on lineaarinen?

(b) Määrää Ker L.

(c) Onko L injektio?

(d) Määrää Im L.

(e) Onko L surjektio?

(f) Onko L bijektio?

(g) Määrää $\dim \operatorname{Ker} L$ ja $\dim \operatorname{Im} L$ ja vertaa tulosta dimensiokaavaan/ Determine $\dim \operatorname{Ker} L$ and $\dim \operatorname{Im} L$ and compare to the dimension formula.

37. Olkoon V reaalinen sisätuloavaruus, $\dim_K V = k \in \mathbb{Z}^+$ ja $n \in V$ annettu. Määritellään kuvaus $L : V \to \mathbb{R}$, asettamalla

$$L(x) = n \cdot x$$

aina, kun $x \in V$.

(a) Osoita, että kuvaus L on lineaarinen.

(b) Määrää $\dim \operatorname{Im} L$.

(c) Määrää $\dim \operatorname{Ker} L$.

38. Määritellään lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, asettamalla
$L(\overline{x}) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$ aina, kun $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Määrää Ker L.

(b) Onko L injektio?

(c) Määrää $\dim \operatorname{Ker} L$ ja $\dim \operatorname{Im} L$ (käytä/use dimensiokaavaa).

(d) Onko L surjektio?

(e) Onko L bijektio?

(f) Määrää L:n matriisi $[L]_{\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_4}$ luonnollisten kantojen $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ja $E_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$ suhteen/determine the matrix with respect to standard bases.

39. Lineaarikuvaksen L matriisi on

$$[L]_{\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Anna kuvaus L muodossa/give the mapping in the form

$$L(x, y) = (a, b, c, d) = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4.$$

40. Lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ toteuttaa ehdot/satisfies the conditions

$$\begin{aligned} &Lu_1 = u_1 - u_2 + u_3, \\ &L(u_1 - u_2) = u_1, \quad \text{ja} \\ &L(u_1 - u_2 + u_3) = 2u_2 - u_3, \end{aligned}$$

missä $\{u_1, u_2, u_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Laske Lu_2 ja Lu_3.

41. Olkoon $S = \langle \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{R}}$ ja $\mathrm{s} = \{\sin x, \cos x\}$. Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L : S \rightarrow S, \quad L = D^2 + 2D + I,$$

missä D on derivaattakuvaus/derivative mapping ja I on avaruuden S identtinen kuvaus. Määritä

$$[L]_{\mathrm{s},\mathrm{s}}.$$

42. Näytä, että pisteen t kohtisuora projektio $\mathrm{PROJ}_A(t) = p$ aliavaruudelle A on yksikäsitteinen/ Show that orthogonal projection $\mathrm{PROJ}_A(t) = p$ of the point t to the subspace A is unique.