802655S KETJUMURTOLUVUT OSA II
CONTINUED FRACTIONS PART II

Tapani Matala-aho
MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO

KEVÄT 2019

Määritelmä 1

Luku $\alpha \in \mathbb{C}$ *on toisen asteen algebrallinen luku, mikäli on olemassa sellaiset rationaaliluvut* $a, b \in \mathbb{Q},\ D \in \mathbb{Z}$, *että*

$$\alpha = a + b\sqrt{D}, \quad \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}. \tag{1.1}$$

Luku

$$\overline{\alpha} = a - b\sqrt{D} \tag{1.2}$$

on luvun α *liittoluku. Toisen asteen algebralliset luvut (1.1) muodostavat 2. asteen neliökunnan*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{a + b\sqrt{D} |\ a, b \in \mathbb{Q}\}. \tag{1.3}$$

Huomautus 1

Konjugointi eli liittoluvun ottaminen

$$h(\alpha) = \overline{\alpha} = a - b\sqrt{D}, \quad h : \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{D}), \tag{1.4}$$

on rengasmorfismi (2 laskutoimitusta). Tällöin saadaan esimerkiksi

$$\overline{\alpha^n} = \overline{\alpha}^n, \quad \overline{n\alpha} = n\overline{\alpha} \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{1.5}$$

$$\overline{\alpha/\beta} = \overline{\alpha}/\overline{\beta} \quad \forall \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}). \tag{1.6}$$

Lause 1

Olkoon $\alpha \in \mathbb{C}$ toisen asteen algebrallinen luku, tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut $A, B, C \in \mathbb{Z}$, että

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0. \tag{1.7}$$

Määritelmä 2

Toisen asteen algebrallinen luku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ on toisen asteen irrationaaliluku eli

$$\alpha = a + b\sqrt{D}, \quad b \neq 0, \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}. \tag{1.8}$$

Lause 2

Irrationaaliluku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ on toisen asteen irrationaaliluku, mikäli on olemassa sellaiset kokonaisluvut $A, B, C \in \mathbb{Z}, A \neq 0$, että

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0. \tag{1.9}$$

Määritelmä 3

Yksinkertainen ketjumurtoluku

$$[b_0; b_1, ...] \tag{1.10}$$

on jaksollinen, mikäli $\exists$ sellaiset $N \in \mathbb{N}$ ja $L \in \mathbb{Z}^+$, että

$$b_{n+L} = b_n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq N}, \tag{1.11}$$

missä L on jakso. Tällöin käytetään merkintöjä

$$[b_0; b_1, ...] = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \overline{b_N, ..., b_{N+L-1}}] =$$

$$[b_0; b_1, ..., b_{N-1}, b_N, ..., b_{N+L-1}, b_N, ..., b_{N+L-1}, ...] \tag{1.12}$$

Jos

$$[b_0; b_1, ...] = [\overline{b_0, ..., b_{L-1}}], \tag{1.13}$$

niin tällöin kehitelmä on puhtaasti jaksollinen.

Huomautus 2

Jos muuta ei sanota, niin jakso ja alkutermi valitaan mahdollisimman lyhyeksi.
Käytetään myös termiä minimijakso.

Esimerkki 1

$$[\overline{1}] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{1.14}$$

Esimerkki 2

$$[\overline{2}] = 1+\sqrt{2}, \quad [1,\overline{2}] = \sqrt{2}. \tag{1.15}$$

Esimerkki 3

$$[3,\overline{3,6}] = \sqrt{11}. \tag{1.16}$$

Esimerkki 4

$$[10,\overline{20}] = \sqrt{101}. \tag{1.17}$$

Eulerin lause

Lause 3

Yksinkertainen päättymätön jaksollinen ketjumurtoluku

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \overline{c_0, ..., c_{L-1}}] \tag{1.18}$$

on reaalinen toisen asteen irrationaaliluku.

Todistus. Merkitään

$$\beta = [\overline{c_0, ..., c_{L-1}}], \tag{1.19}$$

jolloin

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \beta]. \tag{1.20}$$

Olkoon (C_n/D_n) kehitelmän (1.19) konvergenttijono, tällöin Jaksollisuuden nojalla

$$\beta = [c_0, ..., c_{L-1}, \beta] = \frac{\tilde{C}_L}{\tilde{D}_L}, \tag{1.21}$$

missä

$$\tilde{C}_L = \beta C_{L-1} + C_{L-2}, \quad \tilde{D}_L = \beta D_{L-1} + D_{L-2} \tag{1.22}$$

ja

$$C_k = c_k C_{k-1} + C_{k-2}, \quad D_k = c_k D_{k-1} + D_{k-2} \tag{1.23}$$

kaikilla $k = 2, ..., L-1$.

Siten

$$\beta = \frac{\beta C_{L-1} + C_{L-2}}{\beta D_{L-1} + D_{L-2}}, \tag{1.24}$$

josta

$$D_{L-1}\beta^2 + (D_{L-2} - C_{L-1})\beta - C_{L-2} = 0. \tag{1.25}$$

Niinpä β on 2. asteen irrationaaliluku ja $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, jollakin $D \in \mathbb{Z}$ (määrää D). Edelleen

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \beta] = \frac{\tilde{A}_N}{\tilde{B}_N}, \tag{1.26}$$

missä

$$\tilde{A}_N = \beta A_{N-1} + A_{N-2}, \quad \tilde{B}_N = \beta B_{N-1} + B_{N-2} \tag{1.27}$$

ja

$$A_k = b_k A_{k-1} + A_{k-2}, \quad B_k = b_k B_{k-1} + B_{k-2} \tag{1.28}$$

kaikilla $k = 2, ..., N-1$. Siispä

$$\alpha = \frac{\beta A_{N-1} + A_{N-2}}{\beta B_{N-1} + B_{N-2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}). \tag{1.29}$$

Siten α on 2. asteen irrationaaliluku. □

Esimerkki 5

Sovelletaan äskeisen todistuksen menetelmää ketjumurtolukuun

$$\alpha = [2, 3, 8, \overline{1, 1, 1, 4}]. \tag{1.30}$$

Nyt

$$\beta = [\overline{1, 1, 1, 4}] \tag{1.31}$$

ja siten

$$\beta = [1, 1, 1, 4, \beta] = \frac{\tilde{C}_4}{\tilde{D}_4}, \tag{1.32}$$

missä

$$\frac{C_0}{D_0} = 1, \quad \frac{C_1}{D_1} = 2, \quad \Rightarrow \; C_0 = D_0 = D_1 = 1, \; C_1 = 2, \tag{1.33}$$

$$C_2 = c_2 C_1 + C_0 = 3, \quad C_3 = c_3 C_2 + C_1 = 14, \tag{1.34}$$

$$D_2 = c_2 D_1 + D_0 = 2, \quad D_3 = c_3 D_2 + D_1 = 9, \tag{1.35}$$

$$\tilde{C}_4 = \beta C_3 + C_2 = 14\beta + 3, \quad \tilde{D}_4 = \beta D_3 + D_2 = 9\beta + 2. \tag{1.36}$$

Niinpä

$$\beta = \frac{14\beta + 3}{9\beta + 2}, \quad \Rightarrow \quad 3\beta^2 - 4\beta + 1 = 0, \tag{1.37}$$

ja siten

$$\beta = \frac{2+\sqrt{7}}{3}. \tag{1.38}$$

Edelleen

$$\alpha = [2, 3, 8, \beta] = \frac{\tilde{A}_3}{\tilde{B}_3}, \tag{1.39}$$

$$A_0 = 2,\ B_0 = 1,\ A_1 = 7,\ B_1 = 3,\ A_2 = 58,\ B_2 = 25, \tag{1.40}$$

$$\tilde{A}_3 = \beta A_2 + A_1 = 58\beta + 7, \quad \tilde{B}_3 = \beta B_2 + B_1 = 25\beta + 3, \tag{1.41}$$

$$\alpha = \frac{58\beta + 7}{25\beta + 3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{7}). \tag{1.42}$$

Sievennä vielä α:n lauseke.

Lemma 1

Kun $\alpha = [b_0, b_1, ..., b_{n-1}, \alpha_n]$, *niin*

$$\alpha = \frac{\alpha_n A_{n-1} + A_{n-2}}{\alpha_n B_{n-1} + B_{n-2}} \quad \Leftrightarrow \tag{1.43}$$

$$\alpha_n = -\frac{\alpha B_{n-2} - A_{n-2}}{\alpha B_{n-1} - A_{n-1}}. \tag{1.44}$$

Lemma 2

Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}, D \in \mathbb{Z}$. *Tällöin luku* $\alpha = a + b\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ *voidaan esittää muodossa*

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{d}}{Q}, \quad Q|P^2 - d, \quad P, Q, d \in \mathbb{Z}. \tag{1.45}$$

Lagrangen lause

Lause 4

Reaalisen neliökunnan positiivisen irrationaaliluvun α ketjumurtoesitys on jaksollinen.

Todistus. Aluksi Lemman 2 nojalla saadaan esitys

$$\alpha_0 = \alpha = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0}, \quad Q_0 | P_0^2 - d, \quad P_0, Q_0, d \in \mathbb{Z}. \tag{1.46}$$

Käytetään seuraavaksi ketjumurtoalgoritmia (**??**)–(**??**). Ensin

$$\alpha_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\} = b_0 + \{\alpha_0\}, \tag{1.47}$$

missä

$$0 < \{\alpha_0\} = \frac{P_0 - b_0 Q_0 + \sqrt{d}}{Q_0} < 1. \tag{1.48}$$

Siten

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{P_1 + \sqrt{d}}{Q_1}, \tag{1.49}$$

missä

$$P_1 = b_0 Q_0 - P_0, \quad Q_1 = \frac{d - P_1^2}{Q_0}. \tag{1.50}$$

Tässä

$$Q_0 | P_1^2 - d, \tag{1.51}$$

joten

$$P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}. \tag{1.52}$$

Edelleen pätee

$$Q_1 | P_1^2 - d = Q_1 Q_1. \tag{1.53}$$

Seuraavaksi jatketaan algoritmin mukaisesti

$$\alpha_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\} = b_1 + \{\alpha_1\} \quad \ldots \tag{1.54}$$

ja yleisemmin

$$1 < \alpha_n = \frac{P_n + \sqrt{d}}{Q_n}, \quad P_n, Q_n \in \mathbb{Z}, \tag{1.55}$$

missä

$$Q_n | P_n^2 - d. \tag{1.56}$$

Algoritmin mukaisesti

$$\alpha_n = \lfloor \alpha_n \rfloor + \{\alpha_n\} = b_n + \{\alpha_n\} \tag{1.57}$$

$$0 < \{\alpha_n\} = \frac{P_n - b_n Q_n + \sqrt{d}}{Q_n} < 1. \tag{1.58}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\{\alpha_n\}} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{d}}{Q_{n+1}}, \tag{1.59}$$

missä

$$P_{n+1} = b_n Q_n - P_n, \quad Q_{n+1} = \frac{d - P_{n+1}^2}{Q_n}. \tag{1.60}$$

Tässä

$$Q_n | P_{n+1}^2 - d, \tag{1.61}$$

joten

$$P_{n+1}, Q_{n+1} \in \mathbb{Z}. \tag{1.62}$$

Edelleen pätee

$$Q_{n+1} | P_{n+1}^2 - d. \tag{1.63}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että jonot (P_k) ja (Q_k) ovat rajoitettuja. Tarkastellaan lauseketta

$$\alpha_n \overline{\alpha_n} = \frac{P_n^2 - d}{Q_n^2} = \tag{1.64}$$

$$\frac{\alpha B_{n-2} - A_{n-2}}{\alpha B_{n-1} - A_{n-1}} \frac{\overline{\alpha} B_{n-2} - A_{n-2}}{\overline{\alpha} B_{n-1} - A_{n-1}} = G_n \overline{G_n}, \tag{1.65}$$

missä Harjoitustehtävän 17d nojalla

$$G_n = \frac{\alpha B_{n-2} - A_{n-2}}{\alpha B_{n-1} - A_{n-1}} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.66}$$

ja

$$\overline{G_n} = \frac{\overline{\alpha} - \frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}}{\overline{\alpha} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}} \frac{B_{n-2}}{B_{n-1}} \tag{1.67}$$

Koska $\overline{\alpha} \neq \alpha$, niin on olemassa sellainen n, että

$$\left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| < \frac{1}{B_k^2} < \frac{2\sqrt{d}}{|Q_0|} = |\alpha - \overline{\alpha}| \tag{1.68}$$

kaikilla $k \geq K = n - 2$. Tällöin, joko

$$\overline{\alpha} - \frac{A_k}{B_k} < 0 \quad \text{tai} \quad \overline{\alpha} - \frac{A_k}{B_k} > 0 \tag{1.69}$$

kaikilla $k \geq K$. Siten

$$\overline{G_k} > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k \overline{\alpha_k} = \frac{P_k^2 - d}{Q_k^2} = G_k \overline{G_k} < 0, \tag{1.70}$$

josta

$$P_k^2 < d \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{d} < P_k < \sqrt{d} \quad \forall k \geq K. \tag{1.71}$$

Edelleen yhtälöstä (1.55) ja (1.71) nähdään, että

$$Q_k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad Q_k \leq Q_k Q_{k+1} = d - P_{k+1}^2 \leq d \tag{1.72}$$

$$1 \leq Q_k \leq d \quad \forall k \geq K. \tag{1.73}$$

Olkoon

$$B = \{(S, T) \in \mathbb{Z}^2 |\ |S| \leq \sqrt{d-1},\ 1 \leq T \leq d\}, \tag{1.74}$$

jonka mahtavuudelle pätee $\#B = M < \infty$. Välittömästi saadaan, että

$$A = \{(P_k, Q_k) \in \mathbb{Z}^2 |\ k = K, K+1, \ldots\} \subseteq B. \tag{1.75}$$

Siten joillakin $0 \leq l < h \leq M$, pätee

$$(P_{K+l}, Q_{K+l}) = (P_{K+h}, Q_{K+h}). \tag{1.76}$$

Merkitään $L = h - l$, jolloin

$$\alpha_{K+l} = \alpha_{K+L+l} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{K+l+1} = \alpha_{K+L+l+1}, \ldots \tag{1.77}$$

Merkitään vielä $N = K + l$, jolloin

$$b_{N+j} = b_{N+L+j} \quad \forall \quad j = 0, 1, \ldots \tag{1.78}$$

ja siten

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{d}}{Q} = [b_0; b_1, \ldots, b_{N-1}, \overline{b_N, \ldots, b_{N+L-1}}]. \quad \square \tag{1.79}$$

Esimerkki 6

Olkoon $d \in \mathbb{Z}^+$. Tällöin

$$\sqrt{d^2+2} = [d, \overline{d, 2d}]. \tag{1.80}$$

Todistus. Aluksi huomataan, että

$$d^2 < d^2+2 < (d+1)^2 \ \Rightarrow \ d < \sqrt{d^2+2} < d+1 \ \Rightarrow$$
$$\lfloor \sqrt{d^2+2} \rfloor = d, \quad \{\sqrt{d^2+2}\} = \sqrt{d^2+2} - d. \tag{1.81}$$

Käytetään ketjumurtoalgoritmia

$$\sqrt{d^2+2} = d + \sqrt{d^2+2} - d = b_0 + \{\alpha_0\}, \tag{1.82}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{1}{\sqrt{d^2+2}-d} = \frac{\sqrt{d^2+2}+d}{2} > \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1, \tag{1.83}$$

joten (tästäkin näkee, että) valitulle $\{\alpha_0\}$, pätee $0 < \{\alpha_0\} < 1$.

Edelleen

$$\begin{aligned}\alpha_1 =& d + \frac{\sqrt{d^2+2}-d}{2} = b_1 + \{\alpha_1\}, \\ \alpha_2 =& \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \frac{2}{\sqrt{d^2+2}-d} = \\ & \sqrt{d^2+2}+d = 2d + \sqrt{d^2+2} - d = b_2 + \{\alpha_2\}, \\ \alpha_3 =& \frac{1}{\{\alpha_2\}} = \frac{1}{\sqrt{d^2+2}-d} = \alpha_1 .\end{aligned} \tag{1.84}$$

Siten

$$b_0 = d, \quad b_1 = d, \quad b_2 = 2d, \quad b_3 = b_1 = d, b_4 = b_2 = 2d, \ldots \quad \square \tag{1.85}$$

Määritelmä 4

Toisen asteen irrationaaliluku $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ on redusoitu, jos

$$\alpha = a + b\sqrt{D} > 1, \quad ja \quad -1 < \overline{\alpha} = a - b\sqrt{D} < 0. \tag{1.86}$$

Lause 5

Toisen asteen positiivinen irrationaaliluku $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ on redusoitu täsmälleen silloin, kun sen ketjumurtoesitys on puhtaasti jaksollinen. Tarkemmin:

$$\alpha > 1, \quad ja \quad -1 < \overline{\alpha} < 0 \quad \Leftrightarrow \tag{1.87}$$

$$\alpha = [\overline{b_0, ..., b_{L-1}}] \quad \Leftrightarrow \tag{1.88}$$

$$\frac{-1}{\overline{\alpha}} = [\overline{b_{L-1}, ..., b_0}]. \tag{1.89}$$

Lause 6

Olkoot $D \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$ *ja* $A = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$. *Tällöin*

$$\sqrt{D} = [A, \overline{b_1, b_2, ..., b_2, b_1, 2A}]. \tag{1.90}$$

Todistus. Aluksi

$$A = b_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor, \quad \lfloor A + \sqrt{D} \rfloor = 2A. \tag{1.91}$$

Joten

$$\sqrt{D} = [b_0; b_1, b_2, ...] = [A; b_1, b_2, ...] \tag{1.92}$$

ja

$$\alpha := A + \sqrt{D} = [2A; b_1, b_2, ...]. \tag{1.93}$$

Edelleen

$$\overline{\alpha} = A - \sqrt{D} = -(\sqrt{D} - \lfloor \sqrt{D} \rfloor), \quad -1 < \overline{\alpha} < 0 \tag{1.94}$$

eli α on redusoitu. Siten tuloksen (1.88) nojalla

$$\alpha = A + \sqrt{D} = [\overline{2A, b_1, ..., b_{L-1}}] \quad \Rightarrow \tag{1.95}$$

$$\sqrt{D} = [A, b_1, ..., b_{L-1}, 2A, b_1, ..., b_{L-1}, 2A, ...] \tag{1.96}$$

eli

$$\sqrt{D} = [A, \overline{b_1, ..., b_{L-1}, 2A}], \tag{1.97}$$

mistä saadaan

$$\sqrt{D} - A = [0, \overline{b_1, ..., b_{L-1}, 2A}]. \tag{1.98}$$

Tuloksen (1.89) nojalla

$$\frac{-1}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{D} - A} = [\overline{b_{L-1}, ..., b_1, 2A}]. \tag{1.99}$$

josta Harjoitustehtävä 16a:n nojalla

$$\sqrt{D} - A = [0, \overline{b_{L-1}, ..., b_1, 2A}]. \tag{1.100}$$

Verrataan vielä esityksiä (1.98) ja (1.100), joista saadaan

$$b_{L-1} = b_1, b_{L-2} = b_2, ... \tag{1.101}$$

ja siten

$$\sqrt{D} = [A, \overline{b_1, b_2, ..., b_2, b_1, 2A}]. \quad \square \tag{1.102}$$

Esimerkki 7

$$\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]. \tag{1.103}$$

Esimerkki 8

$$\sqrt{31} = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]. \tag{1.104}$$

Huomautus 3

Jaksollinen jono on rajoitettu ja erityisesti ylöspäin rajoitettu.

Lause 7

Neperin luku e ei ole neliöllinen irrationaaliluku eli

$$e \notin \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \quad \forall \quad D \in \mathbb{Z}. \tag{1.105}$$

Todistus. Myöhemmin, Seuraus 25 todistetaan, että

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, ...] = [2, \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}. \quad \square \tag{1.106}$$

Kerrataan vielä, että rationaalilukujen nimittäjät oletetaan positiivisiksi (kuten yleensäkin tällä kurssilla). We assume that the denominators of rational numbers are positive.

Määritelmä 5

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Rationaaliluku* $r/s \in \mathbb{Q}$ *on* α*:n paras approksimaatio/best approximation, jos*

$$|s\alpha - r| < |u\alpha - t| \quad \forall \quad t/u \in \mathbb{Q} \setminus \{r/s\}, \tag{2.1}$$

missä $1 \leq u \leq s$.

Parhaalle approksimaatiolle r/s pätee/for the best approximation holds

$$\left|\alpha-\frac{r}{s}\right|<\left|\alpha-\frac{t}{u}\right|, \quad \text{jos} \quad 1 \le u \le s. \tag{2.2}$$

ja $t/u \neq r/s$. Siispä, jos $t/u \neq r/s$ ja

$$\left|\alpha-\frac{t}{u}\right| \le \left|\alpha-\frac{r}{s}\right|, \tag{2.3}$$

niin $u > s$.
Siten luvun α paras approksimaatio on sellainen rationaaliluku r/s, että kaikilla lukua α lähempänä olevilla rationaaliluvuilla on suurempi nimittäjä.
The best approximation r/s is such a rational number, that every rational number which is closer to α has a bigger denominator.

Lause 8

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ja* (A_k/B_k) *sen konvergenttijono. Tällöin, jos*

$$|u\alpha - t| < |B_k\alpha - A_k|, \quad u \in \mathbb{Z}^+, \ t \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.4}$$

niin $u \geq B_{k+1} > B_k$. *Siten irrationaalisen luvun konvergentit ovat parhaita approksimaatioita/Thus the convergents an irrational number are best approximations.*

Todistus. Vastaoletus: $u < B_{k+1}$.
Osoitetaan ensin, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} u = aB_k + bB_{k+1}; \\ t = aA_k + bA_{k+1} \end{cases} \tag{2.5}$$

on kokonaislukuratkaisu $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $ab < 0$. Yhtälöryhmän determinantti

$$\begin{vmatrix} B_k & B_{k+1} \\ A_k & A_{k+1} \end{vmatrix} = (-1)^k \neq 0, \tag{2.6}$$

joten saadaan ratkaisu

$$\begin{cases} a = (-1)^k (uA_{k+1} - tB_{k+1}); \\ b = (-1)^k (-uA_k + tB_k). \end{cases} \tag{2.7}$$

Yhtälöistä (2.5) ja vastaoletuksesta saadaan, että

$$1 \leq u = aB_k + bB_{k+1} < B_{k+1}. \tag{2.8}$$

Näytetään seuraavaksi, että $ab \neq 0$. Jos olisi $a = 0$, niin

$$1 \leq u = bB_{k+1} < B_{k+1}, \tag{2.9}$$

johtaen ristiriitaan. Siten $a \neq 0$.

Jos $b = 0$, niin

$$u = aB_k, \quad t = aA_k, \tag{2.10}$$

josta edelleen

$$|u\alpha - t| = |a||B_k\alpha - A_k| > |u\alpha - t|, \tag{2.11}$$

johtaen ristiriitaan. Siten $b \neq 0$. Tutkimalla epäyhtälöä (2.8) saadaan relaatiot

$$\begin{aligned} a < 0 \quad &\Rightarrow \quad b > 0; \\ a > 0 \quad &\Rightarrow \quad b < 0; \\ \Rightarrow \quad &ab < 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Edelleen

$$u\alpha - t = a(B_k\alpha - A_k) + b(B_{k+1}\alpha - A_{k+1}) = aX + bY, \tag{2.13}$$

missä (laskarit)

$$XY = (B_k\alpha - A_k)(B_{k+1}\alpha - A_{k+1}) < 0. \tag{2.14}$$

Katsomalla merkkikombinaatiot saadaan

$$aX > 0 \;\Rightarrow\; bY > 0 \quad \text{ja} \qquad aX < 0 \;\Rightarrow\; bY < 0 \tag{2.15}$$

kaikissa tapauksissa. Täten

$$|u\alpha - t| = |a||X| + |b||Y| \geq |X| + |Y| = \tag{2.16}$$

$$|B_k\alpha - A_k| + |B_{k+1}\alpha - A_{k+1}| > |B_k\alpha - A_k|. \tag{2.17}$$

Ristiriita. $\square$

Lause 9

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ja* (A_k/B_k) *sen konvergenttijono. Tällöin, jos*

$$\left|\alpha - \frac{t}{u}\right| < \left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| \tag{2.18}$$

niin $u > B_k$.

Todistus. Vastaoletus: $u \leq B_k$. Oletuksen (2.18) nojalla saadaan

$$|u\alpha - t| < \frac{u}{B_k}\left|B_k\alpha - A_k\right|, \tag{2.19}$$

josta vastaoletuksen nojalla

$$|u\alpha - t| < \left|B_k\alpha - A_k\right|. \tag{2.20}$$

Mutta tällöin Lauseen 8 mukaan $u \geq B_{k+1} > B_k$. Ristiriita. □

Esimerkki 9

Tiedetään, että

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...] \notin \mathbb{Q} \tag{2.21}$$

ja

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{3}{1}, \ \frac{A_1}{B_1} = \frac{22}{7}, \ \frac{A_2}{B_2} = \frac{333}{106}, \ \frac{A_3}{B_3} = \frac{355}{113}, \ldots \tag{2.22}$$

ovat π:n konvergentteja. Siten luku $22/7$ on π:n paras approksimaatio Lauseen 8 nojalla. Edelleen Lauseen 9 mukaan ei ole olemassa sellaista rationaalilukua t/u, $1 \leq u \leq 7$, että se olisi lähempänä lukua π kuin $22/7$. Esimerkiksi

$$\left| \pi - \frac{16}{5} \right| = 0.05840... > \left| \pi - \frac{22}{7} \right| = 0.00126... \tag{2.23}$$

Lause 10

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ja* (A_k/B_k) *sen konvergenttijono. Tällöin, jos*

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2}, \tag{2.24}$$

niin

$$\frac{r}{s} = \frac{A_k}{B_k}, \tag{2.25}$$

jollakin k.

Todistus. Olkoon

$$\frac{r}{s} \neq \frac{A_l}{B_l} \quad \forall l \quad \Rightarrow \quad |sA_l - rB_l| \geq 1 \quad \forall l. \tag{2.26}$$

Koska jono (B_k) on aidosti kasvava, niin on olemassa sellainen k, että

$$B_k \leq s < B_{k+1}. \tag{2.27}$$

Siten Lauseen 8 ja oletuksen (2.24) mukaan

$$|B_k\alpha - A_k| \leq |s\alpha - r| < \frac{1}{2s} \quad \Rightarrow \tag{2.28}$$

$$\left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| < \frac{1}{2sB_k}. \tag{2.29}$$

Toisaalta

$$\frac{1}{sB_k} \leq \left| \frac{sA_k - rB_k}{sB_k} \right| = \left| \frac{r}{s} - \frac{A_k}{B_k} \right| \leq \tag{2.30}$$

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| + \left| \alpha - \frac{A_k}{B_k} \right| < \frac{1}{2sB_k} + \frac{1}{2s^2}, \tag{2.31}$$

mistä saadaan $s < B_k$. Ristiriita. $\square$

Lause 11

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ja* (A_k/B_k) *sen konvergenttijono. Tällöin*

$$\left| \alpha - \frac{A_k}{B_k} \right| < \frac{1}{2B_k^2} \tag{2.32}$$

tai

$$\left| \alpha - \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} \right| < \frac{1}{2B_{k+1}^2}. \tag{2.33}$$

Yleensä, Diofantoksen yhtälöt ovat kokonaislukukertoimisia polynomija/tai eksponenttiyhtälöitä, joihin haetaan kokonaislukuratkaisuja.

Määritelmä 6

Olkoon $d \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Yhtälö

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{3.1}$$

on Pellin yhtälö.

Lause 12

Olkoon $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ *ja* (A_k/B_k) *sen konvergenttijono. Tällöin, jos* $x, y \in \mathbb{Z}^+$ *on Pellin yhtälön (3.1) ratkaisu, niin*

$$\frac{x}{y} = \frac{A_k}{B_k}, \tag{3.2}$$

jollakin $k \in \mathbb{N}$.

Todistus. Yhtälön (3.1) mukaan

$$(x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} > \sqrt{d}; \tag{3.3}$$

$$x - y\sqrt{d} = \frac{1}{x + y\sqrt{d}}. \tag{3.4}$$

Niinpä

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{d}\right|=\frac{1}{y^2(x/y+\sqrt{d})}<\frac{1}{2y^2}, \tag{3.5}$$

joten Lauseen 10 nojalla

$$\frac{x}{y}=\frac{A_k}{B_k}, \tag{3.6}$$

jollakin $k \in \mathbb{N}$. □

Esimerkki 10

Tutkitaan yhtälöä

$$x^2-2y^2=1. \tag{3.7}$$

Aluksi laskemalla konvergentteja nähdään, että $(x,y)=(3,2)$ ja $(x,y)=(17,12)$ ovat ratkaisuja.

Muodostetaan lisäratkaisuja asettamalla

$$\beta_n = x_n + y_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n. \tag{3.8}$$

Tällöin

$$\beta_n\overline{\beta_n} = x_n^2 - 2y_n^2 = (3^2 - 2\cdot 2^2)^n = 1. \tag{3.9}$$

Täten jokainen identiteetillä (3.8) määrätty pari $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ on ratkaisu. Edelleen, ratkaisemalla yhtälöt

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n, \quad x_n - y_n\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^n \tag{3.10}$$

saadaan seuraavat esitysmuodot

$$x_n = \frac{1}{2}((3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n), \tag{3.11}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n). \tag{3.12}$$

Määrätään vielä rekursiot luvuille x_n ja y_n. Identiteetin (3.8) mukaan

$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})(x_n+y_n\sqrt{2})=3x_n+4y_n+(2x_n+3y_n)\sqrt{2}. \quad (3.13)$$

Koska 1 ja $\sqrt{2}$ ovat lineaarisesti vapaita kunnan $\mathbb{Q}$ yli, niin

$$\begin{cases} x_{n+1}=3x_n+4y_n; \\ y_{n+1}=2x_n+3y_n. \end{cases} \quad (3.14)$$

Edelleen

$$\begin{cases} x_{n+2}=6x_{n+1}-x_n; \\ y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n. \end{cases} \quad (3.15)$$

Huomaa vielä, että rekursioitten (3.15) karakteristinen polynomi on x^2-6x+1, jonka nollakohdat ovat $3\pm2\sqrt{2}$. Katso Lukuteorian perusteet.

Kerrataan, että Lauseen **??** nojalla ketjumurron

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{+ b_2} + \dots = \tag{4.1}$$

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \tag{4.2}$$

konvergentit

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{A_n}{B_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

saadaan laskettua rekursioilla

$$A_{n+2} = b_{n+2} A_{n+1} + a_{n+2} A_n, \tag{4.4}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2} B_{n+1} + a_{n+2} B_n \tag{4.5}$$

lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_1 = b_0 b_1 + a_1$ ja $B_1 = b_1$.

Lause 13

$$A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} = (-1)^n a_1 \cdots a_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

$$A_{n+2}B_n - A_nB_{n+2} = (-1)^n b_{n+2} a_1 \cdots a_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Todistus induktiolla käyttäen rekursioita (4.4) ja (4.5).

Seuraus 1

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

$$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n b_{n+2} a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+2}} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Seuraus 2

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{R}^+$, *tällöin*

$$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < \ldots < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \tag{4.10}$$

$$< \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} < \ldots < \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}. \tag{4.11}$$

kaikilla $k, h \in \mathbb{N}$.

Lause 14

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. *Ketjumurtoluku*

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \tag{5.1}$$

suppenee, jos

$$|b_k| \geq |a_k| + 1 \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}^{+}. \tag{5.2}$$

Lause 15

Olkoot $b_k \in \mathbb{C}$, $0 < \epsilon < \pi/2$ *ja*

$$-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg b_k < \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{5.3}$$

Tällöin ketjumurtoluku

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_k}\right) \tag{5.4}$$

suppenee, jos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \infty. \tag{5.5}$$

Ei todisteta.

Lause 16

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{R}^+$. *Ketjumurto*

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \tag{5.6}$$

suppenee, jos

$$\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} \to 0, \tag{5.7}$$

ja erityisesti, jos

$$\frac{b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i^2}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \to \infty. \tag{5.8}$$

Todistus. Edetään kuten Lauseen **??** todistuksessa.

Nyt yhtälön (4.8) mukaan pätee

$$0 < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{a_1 \cdots a_{2k+1}}{B_{2k} B_{2k+1}}. \tag{5.9}$$

Täten suppenemiseen riittää tulos

$$\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} \to 0. \tag{5.10}$$

Näytetään seuraavaksi, että tulos (5.10) seuraa ehdosta (5.8). Rekursion nojalla

$$B_{k+2} = b_{k+2} B_{k+1} + a_{k+2} B_k > b_{k+2} B_{k+1}, \tag{5.11}$$

joten

$$B_k > b_k \cdots b_1. \tag{5.12}$$

Siispä ehdon (5.8) nojalla

$$\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} < \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{b_1 \cdots b_n b_1 \cdots b_{n+1}} \to 0. \quad \square \tag{5.13}$$

Esimerkki 11

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2k+1}\right)\in\mathbb{R}^+. \tag{5.14}$$

Osoitetaan, että ketjumurto (5.14) suppenee. Ratkaisu:

$$\frac{a_1\cdots a_{n+1}}{b_1\cdots b_n b_1\cdots b_n b_{n+1}}=\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2(n+1)^2}{3^2\cdot 5^2\cdots(2n+1)^2(2n+3)}\leq \\ \frac{(n+1)^2}{2n+3}\frac{1}{2^{2n}}\ \to\ 0.\quad\square \tag{5.15}$$

Myöhemmin todistetaan vielä, että

$$\arctan 1=\frac{1}{1+\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2k+1}\right)}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1+\frac{1^2}{3+\frac{2^2}{5+\dots}}}. \tag{5.16}$$

Esimerkki 12

Ketjumurto

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right) \tag{5.17}$$

suppenee.

Esimerkki 13

Ketjumurto

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right) \tag{5.18}$$

suppenee.

Esimerkki 14

Milloin ketjumurto

$$b + \frac{a}{b+} \frac{a}{b+} \dots \tag{5.19}$$

suppenee?

Esimerkki 15

$$\tau = 3 + \frac{-2}{3} \underset{+}{} \frac{-2}{3} \underset{+\ldots}{} \tag{5.20}$$

suppenee aikaisempien tulosten nojalla. Joten saadaan yhtälö

$$\tau = 3 + \frac{-2}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \tau = 1 \quad \textit{tai} \quad 2 \tag{5.21}$$

mutta kumpi??

Toisaalta esimerkkien (12–15) suppenemista voidaan tutkia myös ratkaisemalla konvergenttien osoittajonot ja nimittäjäjonot rekursioista ja laskemalla konvergenttijonon raja-arvo.

Jono (w_n) on ei-triviaali, jos ainakin yksi alkio $w_n \neq 0$.

Määritelmä 7

Olkoot $r, s \in \mathbb{C}, s \neq 0$. *Ei-triviaalia jonoa* (w_n), *joka toteuttaa palautuskaavan*

$$w_{n+2} = rw_{n+1} + sw_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.22}$$

sanotaan Lucasin jonoksi.

Ratkaistaan rekursio (5.22) yritteellä

$$w_n = x^n, \quad x \in \mathbb{C}^*. \tag{5.23}$$

Rekursiosta (5.22) saadaan

$$x^2 - rx - s = 0, \tag{5.24}$$

jonka ratkaisut ovat

$$\alpha = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2}, \quad \beta = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2}. \tag{5.25}$$

Määritelmä 8

Polynomi

$$K(x) = K_w(x) = x^2 - rx - s = (x - \alpha)(x - \beta) \tag{5.26}$$

on rekursion (5.22) karakteristinen polynomi.

Lause 17

Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$. *Tällöin*

$$w_n = a\alpha^n + b\beta^n \tag{5.27}$$

on rekursion (5.22) ratkaisu.

Olkoon $r^2 + 4s \neq 0$, tällöin $\alpha \neq \beta$. Siten rekursion (5.22) kaikki ratkaisut ovat muotoa (5.27), joillakin $a, b \in \mathbb{C}$, jotka riippuvat jonon (w_n) alkuarvoista w_0, w_1.

Esimerkki 16

Ketjumurron

$$b + \frac{a}{b+}\frac{a}{b+\ldots} \tag{5.28}$$

konvergenteille pätee

$$A_{k+2} = bA_{k+1} + aA_k, \quad B_{k+2} = bB_{k+1} + aB_k. \tag{5.29}$$

Rekursioiden karakteristinen polynomi on muotoa

$$x^2 - bx - a = (x-\alpha)(x-\beta), \tag{5.30}$$

missä

$$\alpha = \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}, \quad \beta = \frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2}. \tag{5.31}$$

Siten rekursioitten (5.29) yleiset ratkaisut ovat

$$A_k = t\alpha^k + u\beta^k, \quad B_k = v\alpha^k + w\beta^k, \tag{5.32}$$

missä t, u, v, w saadaan alkuarvoyhtälöistä

$$A_0 = t\alpha^0 + u\beta^0, \quad A_1 = t\alpha^1 + u\beta^1, \tag{5.33}$$

$$B_0 = v\alpha^0 + w\beta^0, \quad B_1 = v\alpha^1 + w\beta^1. \tag{5.34}$$

Tapaus $a, b \in \mathbb{R},\ b^2 + 4a > 0,\ |\alpha| > |\beta|$. Tällöin

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{t + u(\beta/\alpha)^k}{v + w(\beta/\alpha)^k} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{t}{v} \tag{5.35}$$

ja siten

$$b + \frac{a}{b+}\frac{a}{b+\ldots} = \frac{t}{v}. \tag{5.36}$$

Esimerkki 17

Ratkaisemalla rekursiot ja määräämällä raja-arvo saadaan vastaus

$$\tau = 3 + \frac{-2}{3} \underset{+}{} \frac{-2}{3} \underset{+\dots}{} = 2 \tag{5.37}$$

aikaisemman Esimerkin 15 kysymykseen. Nimittäin, nyt $a = -2, b = 3$, joten $\alpha = 2, \beta = 1$. Siten rekursioitten (5.29) yleiset ratkaisut ovat muotoa

$$A_k = t2^k + u1^k, \quad B_k = v2^k + w1^k, \tag{5.38}$$

missä $t = 4, u = -1, v = 2, w = -1$ saadaan alkuarvoyhtälöistä (5.33)

$$A_0 = 3 = t + u, \quad A_1 = 7 = 2t + u, \tag{5.39}$$

$$B_0 = 1 = v + w, \quad B_1 = 3 = 2v + w. \tag{5.40}$$

Siten

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{4 \cdot 2^k - 1}{2 \cdot 2^k - 1} = \frac{4 - (1/2)^k}{2 - (1/2)^k} \underset{k \to \infty}{\to} \frac{4}{2} = 2. \tag{5.41}$$

Jos osaosoittajat ja -nimittäjät eivät ole vakioita, niin rekursioiden ratkaiseminen eksplisiittisesti voi olla vaikeaa tai mahdotonta. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan tapausta, jossa ketjumurron arvo saadaan ilman, että rekusioita ratkaistaan.

Esimerkki 18

Tutkitaan ketjumurron

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) \tag{5.42}$$

arvoa. Konvergenteille pätee:

$$A_{k+2}=(k+2)A_{k+1}+(k+3)A_k, \quad B_{k+2}=(k+2)B_{k+1}+(k+3)B_k. \tag{5.43}$$

Tutkimalla alkuarvoja

$$\begin{aligned} A_1 &= 2, \quad B_1 = 1; \\ A_2 &= 4, \quad B_2 = 5; \\ A_3 &= 20, \quad B_3 = 19; \\ A_4 &= 100, \quad B_4 = 101; \ldots \end{aligned} \tag{5.44}$$

huomataan, että

$$A_n = B_n + (-1)^{n+1} \tag{5.45}$$

minkä voikin todistaa induktiolla. Lisäksi $B_n \to \infty$. Siten

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim \frac{A_n}{B_n} = \lim \frac{B_n + (-1)^{n+1}}{B_n} = 1. \tag{5.46}$$

Määritelmä 9

Ketjumurron

$$\tau = \mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right), \tag{6.1}$$

häntä on ketjumurto

$$\tau_k = \mathbb{K}_{n=k}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right). \tag{6.2}$$

Hännille pätee palautuskaava

$$\tau_k = \frac{a_k}{b_k + \tau_{k+1}}. \tag{6.3}$$

Huomautus 4

Mikäli ketjumurron (6.1) kaikki hännät suppenevat, niin tällöin pätee:
A)

$$\tau_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_k \neq 0. \tag{6.4}$$

B) Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Q},\ a_k \neq 0$ *kaikilla* k*. Tällöin*

$$\tau \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.5}$$

Lause 18

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}^+$. *Jos*

$$a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.6}$$

niin

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) \notin \mathbb{Q}. \tag{6.7}$$

Lause 19

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. *Jos*

$$1 \leq |a_k| < |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.8}$$

ja

$$|\tau_k| \neq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.9}$$

niin

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \notin \mathbb{Q}. \tag{6.10}$$

Ennen lauseiden 18 ja 19 todistusta esitellään ketjumurtojen häntiin liittyvä tulos.

Lause 20

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. *Jos*

$$0 < |\tau_k| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.11}$$

niin

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \notin \mathbb{Q}. \tag{6.12}$$

Todistus. Vastaoletus $\tau \in \mathbb{Q}$. Tällöin

$$\tau_k = \frac{r_k}{s_k}, \quad r_k \in \mathbb{Z},\ s_k \in \mathbb{Z}^+, \quad r_k \perp s_k,$$

$$1 \leq |r_k| \leq s_k - 1 \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.13}$$

Palautuskaavan (6.3) nojalla

$$r_k r_{k+1} = s_{k+1}(s_k a_k - b_k r_k), \tag{6.14}$$

joten välttämättä

$$s_{k+1} | r_k \quad \Rightarrow \quad s_{k+1} \leq |r_k| \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.15}$$

Edelleen

$$|r_{k+1}| \leq s_{k+1} - 1 \leq |r_k| - 1 \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.16}$$

Täten saadaan ääretön aidosti vähenevä jono $|r_1| > |r_2| > \dots$ positiivisia kokonaislukuja. Ristiriita. □

Lauseen 18 todistus. Aluksi todetaan, että kaikki hännät suppenevat, joten

$$\tau_k < \infty \quad \Rightarrow \quad 0 < \tau_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.17}$$

Edelleen

$$0 < \tau_k = \frac{a_k}{b_k + \tau_{k+1}} \overset{6.17}{<} \frac{a_k}{b_k} \overset{6.6}{\leq} 1. \tag{6.18}$$

Sovelletaan vielä Lausetta 20. □

Lemma 3

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. *Jos*

$$1 \leq |a_k| < |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.19}$$

niin

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.20}$$

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$ annettu. Asetetaan

$$\kappa_n := \frac{a_n}{b_n}, \quad \kappa_k := \frac{a_k}{b_k + \kappa_{k+1}}, \quad k = n-1, ..., 1. \tag{6.21}$$

Oletuksen (6.19) nojalla

$$1 \leq |a_k| \leq |b_k| - 1, \quad k = 1, ..., n, \tag{6.22}$$

ja

$$0 < |\kappa_n| = \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < 1. \tag{6.23}$$

Edelleen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} &|b_{n-1} + \kappa_n| \geq \\ &\qquad ||b_{n-1}| - |\kappa_n|| \geq |b_{n-1}| - |\kappa_n| > \\ &\qquad\qquad |b_{n-1}| - 1 \geq |a_{n-1}| \end{aligned} \tag{6.24}$$

Siispä

$$0 < |\kappa_{n-1}| = \frac{|a_{n-1}|}{|b_{n-1} + \kappa_n|} < 1 \tag{6.25}$$

eli

$$0 < \left| \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}} \right| < 1, \ldots, \tag{6.26}$$

ja lopulta

$$0 < \left| \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| \frac{A_n}{B_n} \right| < 1. \tag{6.27}$$

Niinpä

$$\tau = \lim \frac{A_n}{B_n} \quad \Rightarrow \quad |\tau| \leq 1 \tag{6.28}$$

ja samaten

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \quad \square \tag{6.29}$$

Lauseen 19 todistus.

Lauseen 19 todistus. Lemman 3 nojalla

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.30}$$

Edelleen kaikkien ehtojen nojalla

$$0 < |\tau_k| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.31}$$

joten Lausetta 20 käyttämällä saadaan väite. □

Huomautus 5

Esimerkin (17) nojalla

$$\tau = 3 + \frac{-2}{3} {}_{+} \frac{-2}{3} {}_{+ \ldots} = 2, \tag{6.32}$$

joten

$$\tau_1 = \frac{-2}{3} {}_{+} \frac{-2}{3} {}_{+ \ldots} = -1 \in \mathbb{Q} \tag{6.33}$$

vaikka Lauseen 19 ehto (6.8)

$$1 \leq |a_k| < |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.34}$$

toteutuu. Mutta nyt

$$|\tau_1| = 1. \tag{6.35}$$

Huomautus 6

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}^+$. Tarkastellaan irrationaalisuusehdon (6.6):

$$a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.36}$$

rajamaastoa. Tiedetään, että

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n} \right) \notin \mathbb{Q} \tag{6.37}$$

ja

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1 \in \mathbb{Q}. \tag{6.38}$$

Mutta

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n+1} \right) \notin \mathbb{Q}. \tag{6.39}$$

Siten, jos ehto (6.36) ei toteudu eli $a_k \geq b_k + 1$, niin ketjumurto voi olla joko rationaalinen tai irrationaalinen.

Lause 21

Olkoot $t_k \neq 0$ *kaikilla* k. *Tällöin*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 + \ldots} = \tag{7.1}$$

$$b_0 + \frac{t_1 a_1}{t_1 b_1 +} \frac{t_1 t_2 a_2}{t_2 b_2} + \frac{t_2 t_3 a_3}{t_3 b_3} + \ldots \tag{7.2}$$

eli

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_k}{d_k} \right), \tag{7.3}$$

missä

$$d_0 = b_0, \; c_1 = t_1 a_1, \; d_1 = t_1 b_1, \tag{7.4}$$

$$c_k = t_{k-1} t_k a_k, \; d_k = t_k b_k, \quad \forall \; k = 2, 3, \ldots . \tag{7.5}$$

Todistus. Olkoot (A_n/B_n) ja (C_n/D_n) ketjumurtojen konvergenttijonot. Näytetään, että

$$C_n = t_1 \cdots t_n A_n, \quad D_n = t_1 \cdots t_n B_n \quad \forall\ n = 1, 2, \ldots \tag{7.6}$$

Induktiolla käyttäen rekursioita

$$C_{n+2} = d_{n+2} C_{n+1} + c_{n+2} C_n, \tag{7.7}$$

$$D_{n+2} = d_{n+2} D_{n+1} + c_{n+2} D_n, \quad n = 0, 1, \ldots \quad \square \tag{7.8}$$

Seuraavassa tutkitaan lukujen ja funktioiden sarjakehitelmiin liittyviä rekursioita, joiden avulla muodostetaan laajahko luokka ketjumurtokehitelmiä.
Pochhammerin symboli määritellään asettamalla

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \tag{8.1}$$

jolloin esimerkiksi

$$(1)_n = n! \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{8.2}$$

Formaalia sarjaa

$${}_AF_B\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_A \\ b_1, \ldots, b_B \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_A)_n}{n!(b_1)_n \cdots (b_B)_n} t^n \tag{8.3}$$

kutsutaan yleistetyksi hypergeometriseksi sarjaksi.
Seuraavassa ei välttämättä tutkita sarjojen suppenemista.

Erikoistapauksia:
Gauss' hypergeometric series

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} t^n. \tag{8.4} $$

Geometric series

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = {}_1F_0\left(\begin{matrix} 1 \\ * \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \tag{8.5} $$

Jos $A = 0$ tai $B = 0$, niin käytetään merkintää $*$.

Logarithm series

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix}\,\middle|\,t\right) = -\frac{\log(1-t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}t^n \tag{8.6}$$

Binomial series:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-\alpha\\1\end{matrix}\,\middle|\,t\right) = (1-t)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-t)^n \tag{8.7}$$

Arcustangent:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1/2\\3/2\end{matrix}\,\middle|\,-t^2\right) = \frac{\arctan t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1} \tag{8.8}$$

Eksponenttifunktio:

$$ {}_0F_0\left(\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}\,\middle|\, t\right) = \exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \tag{8.9} $$

jonka avulla saadaan sarjaesitykset seuraaville funktioille.
Trigonometriset funktiot

$$ \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, $$
$$ \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}. \tag{8.10} $$

Hyperboliset funktiot

$$ \sinh(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}, \quad \cosh(t) = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}, $$
$$ \tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}. \tag{8.11} $$

Sarjalle

$$f(c) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ c \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} t^n \tag{8.12}$$

pätee palautuskaava

$$f(c) = f(c+1) + \frac{t}{c(c+1)} f(c+2), \tag{8.13}$$

josta saadaan

$$f(c+k) = f(c+k+1) + \frac{t}{(c+k)(c+k+1)} f(c+k+2). \tag{8.14}$$

Niinpä

$$\frac{f(c+k)}{f(c+k+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{(c+k)(c+k+1)}}{f(c+k+1)/f(c+k+2)}. \tag{8.15}$$

Toistetaan yhtälöä (8.15), jolloin

$$\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{f(c+1)/f(c+2)} = \tag{8.16}$$

$$1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{f(c+2)/f(c+3)}} = \ldots \tag{8.17}$$

Voidaan todistaa, että ketjumurtokehitelmä

$$1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{1+\ldots}} \tag{8.18}$$

suppenee kaikilla $t \in \mathbb{C}$ kohti funktiota

$$\frac{f(c)}{f(c+1)}, \tag{8.19}$$

Lause 22

Olkoon $c, t \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. *Tällöin*

$$\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{1+\ldots}} = \tag{8.20}$$

$$1 + \frac{t/c}{c+1+\frac{t}{c+2+\frac{t}{c+3+\ldots}}}. \tag{8.21}$$

Lemma 4

$$\sinh z = z\ {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \tag{8.22}$$

$$\cosh z = {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}; \tag{8.23}$$

$$\tanh z = z\, \frac{{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4} \right)}{{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4} \right)}. \tag{8.24}$$

Lemma 5

$$\sin z = z\ {}_0F_1\left({* \atop 3/2} \,\middle|\, -\frac{z^2}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \tag{8.25}$$

$$\cos z = {}_0F_1\left({* \atop 1/2} \,\middle|\, -\frac{z^2}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}; \tag{8.26}$$

$$\tan z = z\, \frac{{}_0F_1\left({* \atop 3/2} \,\middle|\, -\frac{z^2}{4} \right)}{{}_0F_1\left({* \atop 1/2} \,\middle|\, -\frac{z^2}{4} \right)}. \tag{8.27}$$

Lause 23

Kaikilla $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i(\pi/2 + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ *pätee*

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{z}{1+}\frac{z^2}{3+}\frac{z^2}{5+}\frac{z^2}{7+\ldots}. \tag{8.28}$$

Todistus. Lauseen 22 mukaan

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = z\,\frac{{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{z^2}{4}\right)} = \tag{8.29}$$

$$\frac{z}{f(1/2)/f(3/2)} = \frac{z}{1+\frac{t/c}{c+1+\frac{t}{c+2+\frac{t}{c+3+\dots}}}} \tag{8.30}$$

$$\overset{t=z^2/4,c=1/2}{=} \frac{z}{1+\frac{z^2/2}{3/2+\frac{z^2/4}{5/2+\frac{z^2/4}{7/2+\dots}}}} \tag{8.31}$$

$$= \frac{z}{1+\frac{z^2}{3+\frac{z^2}{5+\frac{z^2}{7+\dots}}}}. \quad \square \tag{8.32}$$

Lause 24

Kaikilla $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *pätee*

$$\tan z = \frac{z}{1+} \frac{-z^2}{3} \frac{-z^2}{+\;5} \frac{-z^2}{+\;7} +\ldots. \tag{8.33}$$

Seuraus 3

Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$e^{2z} = 1 + \frac{2z}{1-z+}\frac{z^2}{3+}\frac{z^2}{5+\ldots}. \tag{8.34}$$

Todistus. Yhtälön (8.28) nojalla

$$e^{2z} = -1 + \frac{2}{1-\tanh z} = -1 + \frac{2}{1 - \frac{z}{1+\frac{z^2}{3+}\frac{z^2}{5+\ldots}}} = \tag{8.35}$$

$$-1 + \frac{2}{1-\frac{z}{1+\tau}} = \frac{1+z+\tau}{1-z+\tau} = 1 + \frac{2z}{1-z+\tau}, \tag{8.36}$$

missä

$$\tau = \frac{z^2}{3+}\frac{z^2}{5+\ldots}. \quad \square \tag{8.37}$$

Seuraus 4

$$e = 1 + 2[0, 1, \overline{4k+2}]_{k=1}^{\infty} = 1 + \frac{2}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+\dots}. \tag{8.38}$$

I. Todistus. Asetetaan $z = 1/2$ kehitelmään (8.34), jolloin

$$e = 1 + \frac{1}{1/2+}\frac{1/4}{3\ +}\frac{1/4}{5\ +\dots} \overset{7.3}{=} \tag{8.39}$$

$$1 + \frac{2}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+\dots}. \quad \square \tag{8.40}$$

Lause 25

$$e = [2, \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty} = 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+\ldots}. \tag{8.41}$$

$$e^2 = [7, \overline{3k-1, 1, 1, 3k, 12k+6}]_{k=1}^{\infty}. \tag{8.42}$$

Todistus. Todistetaan (8.41), kehitelmä (8.42) menee vastaavasti. Lähdetään kehitelmästä (8.38), missä merkitään

$$\alpha = \beta_1 = \frac{2}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+\ldots}. \tag{8.43}$$

Käytetään myös merkintöjä

$$\beta_k = \frac{1}{d_k + \beta_{k+1}}, \quad d_k = 4k - 2, \ k = 2, 3, \dots \tag{8.44}$$

ja

$$\alpha_0 = \beta_1 = \frac{2}{d_1 + \beta_2} = \frac{2}{1 + \beta_2}. \tag{8.45}$$

Sovelletaan ketjumurtoalgoritmia lukuun $\alpha_0 = [b_0, b_1, \dots]$.
Sijoitetaan

$$\beta_2 = \frac{1}{d_2 + \beta_3} = \frac{1}{6 + \beta_3} \tag{8.46}$$

yhtälöön (8.45),

jolloin

$$\alpha_0 = \frac{12+2\beta_3}{7+\beta_3} = 1 + \frac{5+\beta_3}{7+\beta_3} = b_0 + \{\alpha_0\}; \tag{8.47}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{7+\beta_3}{5+\beta_3} = 1 + \frac{2}{5+\beta_3} = b_1 + \{\alpha_1\}; \tag{8.48}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \frac{5+\beta_3}{2} = 2 + \frac{1+\beta_3}{2} = b_2 + \{\alpha_2\}; \tag{8.49}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\{\alpha_2\}} = \frac{2}{1+\beta_3}. \tag{8.50}$$

Sijoitetaan

$$\beta_3 = \frac{1}{d_3 + \beta_4} = \frac{1}{10 + \beta_4} \tag{8.51}$$

yhtälöön (8.50), jolloin

$$\alpha_3 = \frac{2d_3 + 2\beta_4}{d_3 + 1 + \beta_4} = 1 + \frac{d_3 - 1 + \beta_4}{d_3 + 1 + \beta_4} = b_3 + \{\alpha_3\}; \tag{8.52}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\{\alpha_3\}} = \frac{d_3 + 1 + \beta_4}{d_3 - 1 + \beta_4} = 1 + \frac{2}{d_3 - 1 + \beta_4} = b_4 + \{\alpha_4\}; \tag{8.53}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\{\alpha_4\}} = \frac{d_3 - 1 + \beta_4}{2} = \frac{d_3 - 2}{2} + \frac{1 + \beta_4}{2} = b_5 + \{\alpha_5\}; \tag{8.54}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\{\alpha_5\}} = \frac{2}{1 + \beta_4}. \tag{8.55}$$

Yleisemminkin

$$\alpha_{3l-3} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-4}\}} = \frac{2}{1+\beta_{l+1}}, \tag{8.56}$$

johon sijoitetaan

$$\beta_{l+1} = \frac{1}{d_{l+1}+\beta_{l+2}}. \tag{8.57}$$

Tällöin

$$\alpha_{3l-3} = \frac{2d_{l+1}+2\beta_{l+2}}{d_{l+1}+1+\beta_{l+2}} = \tag{8.58}$$

$$1 + \frac{d_{l+1}-1+\beta_{l+2}}{d_{l+1}+1+\beta_{l+2}} = b_{3l-3} + \{\alpha_{3l-3}\}; \tag{8.59}$$

$$\alpha_{3l-2} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-3}\}} = \frac{d_{l+1}+1+\beta_{l+2}}{d_{l+1}-1+\beta_{l+2}} = \tag{8.60}$$

$$1 + \frac{2}{d_{l+1}-1+\beta_{l+2}} = b_{3l-2} + \{\alpha_{3l-2}\}; \tag{8.61}$$

$$\alpha_{3l-1} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-2}\}} = \frac{d_{l+1} - 1 + \beta_{l+2}}{2} = \tag{8.62}$$

$$\frac{d_{l+1} - 2}{2} + \frac{1 + \beta_{l+2}}{2} = b_{3l-1} + \{\alpha_{3l-1}\}; \tag{8.63}$$

siten jälleen

$$\alpha_{3l} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-1}\}} = \frac{2}{1 + \beta_{l+2}}. \tag{8.64}$$

Niinpä

$$b_{3l-1} = \frac{d_{l+1} - 2}{2} = 2l, \quad b_{3l} = b_{3l+1} = 1 \tag{8.65}$$

ja siten

$$\alpha = \beta_1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2k, 1, ...], \tag{8.66}$$

josta

$$e = 1 + \beta_1 = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2k, 1, ...]. \quad \square \tag{8.67}$$

II. Todistus. Tutkitaan konvergenttijonoa

$$\frac{A_n}{B_n} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2k, 1, ..., b_n], \tag{8.68}$$

missä

$$A_{3n+1} = A_{3n} + A_{3n-1}, \quad B_{3n+1} = B_{3n} + B_{3n-1}; \tag{8.69}$$

$$A_{3n+2} = 2(n+1)A_{3n+1} + A_{3n}, \ B_{3n+2} = 2(n+1)B_{3n+1} + B_{3n}; \tag{8.70}$$

$$A_{3n+3} = A_{3n+2} + A_{3n+1}, \quad B_{3n+3} = B_{3n+2} + B_{3n+1}. \tag{8.71}$$

Asetetaan

$$\alpha_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(x-1)^n e^x \ dx, \tag{8.72}$$

$$\beta_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^n e^x \ dx, \tag{8.73}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(x-1)^{n+1} e^x \ dx. \tag{8.74}$$

Lemma 6

$$\alpha_n = -\beta_{n-1} - \gamma_{n-1}; \tag{8.75}$$

$$\beta_n = -2n\alpha_n + \gamma_{n-1}; \tag{8.76}$$

$$\gamma_n = \beta_n - \alpha_n. \tag{8.77}$$

Huomataan, että integraaleista tulee lineaarikombinaatioita luvuista 1 ja e, joten merkitään:

Lemma 7

$$\alpha_n = v_{3n-2}e - t_{3n-2}; \tag{8.78}$$

$$\beta_n = t_{3n-1} - v_{3n-1}e; \tag{8.79}$$

$$\gamma_n = t_{3n} - v_{3n}e. \tag{8.80}$$

Lemma 8

$$v_n = B_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{8.81}$$

Lemma 9

$$B_{3n-2}e - A_{3n-2} = \alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0; \tag{8.82}$$

$$B_{3n-1}e - A_{3n-1} = -\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0; \tag{8.83}$$

$$B_{3n}e - A_{3n} = -\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0; \tag{8.84}$$

Todistus.

$$\lim \frac{A_n}{B_n} = e \quad \Rightarrow \quad e = [2, \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}. \quad \square \tag{8.85}$$

Lause 26

Olkoon $r/s \in \mathbb{Q}^*$, tällöin

$$e^{r/s} \notin \mathbb{Q}. \tag{9.1}$$

Todistetaan tapaus $z = r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Yhtälön (8.28) nojalla

$$\frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1} = \frac{r}{1+} \frac{r^2}{3+} \frac{r^2}{5+} \dots + \frac{r^2}{2k-1+\tau_{k+1}} = \tau. \tag{9.2}$$

Vastaoletus

$$e^r \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1} \in \mathbb{Q}. \tag{9.3}$$

Toisaalta, valitaan k niin isoksi, että

$$b_{k+1} = 2k+1 > r^2 = a_{k+1}, \tag{9.4}$$

jolloin Lauseen 18 nojalla

$$\tau_{k+1} \notin \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \tau \notin \mathbb{Q}. \tag{9.5}$$

Ristiriita. Tapaus $e^{r/s}$ kotitehtävä.

Lause 27

$$\pi \notin \mathbb{Q} \tag{9.6}$$

I. Todistus. Valitaan $z = \pi/4$, jolloin $\tan z = 1$ ja yhtälön (8.33) nojalla

$$z = 1 + \frac{-z^2}{3} {}_{+} \frac{-z^2}{5} {}_{+} \frac{-z^2}{7} {}_{+ \dots}. \tag{9.7}$$

Vastaoletus $\pi \in \mathbb{Q}$. Siten $z = \pi/4 = r/s$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}^+$, jolloin

$$\frac{r}{s} = 1 + \frac{-(r/s)^2}{3} {}_{+} \frac{-(r/s)^2}{5} {}_{+} \frac{-(r/s)^2}{7} {}_{+ \dots} \overset{7.3}{=} \tag{9.8}$$

$$1 + \frac{-r^2}{3s^2} {}_{+} \frac{-r^2}{5} {}_{+} \frac{-r^2}{7s^2} {}_{+ \dots} = \tau, \tag{9.9}$$

missä

$$b_k = (2k+1)s^2 \quad 2 \nmid k, \quad b_k = 2k+1 \quad 2|k, \tag{9.10}$$

$$a_k = -r^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{9.11}$$

Nyt

$$b_k \geq |a_k| + 1, \quad \forall k \geq k_0 = \frac{r^2+1}{2} \tag{9.12}$$

ja siten Lemman 3 mukaan

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \geq k_0. \tag{9.13}$$

Edelleen

$$0 < |\tau_k| = \frac{|a_k|}{|b_k + \tau_{k+1}|} \leq \frac{|a_k|}{b_k - |\tau_{k+1}|} \leq \tag{9.14}$$

$$\frac{|a_k|}{b_k - 1} \leq \frac{r^2}{2k} < \frac{r^2 + 1}{2k} \leq 1 \quad \forall k \geq k_0. \tag{9.15}$$

Siispä Lauseen 20 nojalla

$$\tau_k \notin \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \tau \notin \mathbb{Q}. \tag{9.16}$$

Ristiriita, sillä $\tau = r/s$. Täten vastaoletus väärä eli $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\square$

II. Todistus. Tutkitaan integraaleja

$$I_n(\pi) = \frac{1}{2n!} \int_0^{\pi} x^n(\pi - x)^n \sin x \; dx, \tag{9.17}$$

jotka toteuttavat seuraavat ehdot (laskarit):

$$I_n(t) \in \mathbb{Z}[t] \quad \deg_t I_n = n; \tag{9.18}$$

$$0 < I_n(\pi) \leq \frac{\pi^{2n+1}}{n! 2^{2n+1}}. \tag{9.19}$$

Vastaoletus $\pi = r/s \in \mathbb{Q}$. Tällöin

$$s^n I_n(r/s) \in \mathbb{Z}, \tag{9.20}$$

joten

$$1 \leq s^n I_n(r/s) \leq \frac{s^n \pi^{2n+1}}{n! 2^{2n+1}} \underset{n \to \infty}{\to} 0. \tag{9.21}$$

Ristiriita.

Tarkemmin. Käytetään merkintää $g(x) = x^n(\pi - x)^n$, jolloin osittaisintegroinnilla

$$J_m = \int_0^\pi g(x) \sin x \; dx = g(0) + g(\pi) - g^{(2)}(0) - g^{(2)}(\pi) \tag{9.22}$$

$$+ g^{(4)}(0) + g^{(4)}(\pi) - g^{(6)}(0) - g^{(6)}(\pi) + \ldots \tag{9.23}$$

Tässä

$$g^{(k)}(0) = g^{(k)}(\pi) = 0, \quad \forall\ k \leq n-1,\ k \geq 2n+1 \tag{9.24}$$

ja

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k g^{(k)}(\pi) = (-1)^k k! \binom{n}{k-n} \pi^{k-n}, \quad \forall\ n \leq k \leq 2n. \tag{9.25}$$

Täten

$$I_n(\pi) = \sum_{n \leq 2l \leq 2n} (-1)^{n+l} \frac{(2l)!}{n!} \binom{n}{2l-n} \pi^{2n-2l}. \tag{9.26}$$

Kerrataan, että alkioiden (vektoreitten) $\alpha_1, ..., \alpha_m$ lineaarinen vapaus (riippumattomuus) kunnan K yli (lin. vapaita/K) tarkoittaa sitä, että ehdosta

$$s_1\alpha_1 + ... + s_m\alpha_m = 0, \tag{9.27}$$

seraa $s_1 = ... = s_m = 0$. Olkoon vielä

$$K\alpha_1 + ... + K\alpha_m = \{k_1\alpha_1 + ... + k_m\alpha_m | \ k_1, ..., k_m \in K\}. \tag{9.28}$$

Tällöin

$$\dim_K \{K\alpha_1 + ... + K\alpha_m\} = m \quad \Leftrightarrow \tag{9.29}$$

alkiot $\alpha_1, ..., \alpha_m$ ovat lineaarisesti vapaita/K.

Lause 28

$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0: \ a\alpha + b = 0. \tag{9.30}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0: \ a\alpha + b \neq 0. \tag{9.31}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad 1, \alpha \quad \textit{lin. vapaita}/\mathbb{Q} \tag{9.32}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}\} = 2. \tag{9.33}$$

$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}\} = 1. \tag{9.34}$$

Esimerkki 19

$$e \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad 1, e \quad \textit{lin. vapaita}/\mathbb{Q} \tag{9.35}$$

$$\pi \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \pi\mathbb{Q}\} = 2. \tag{9.36}$$

Huomautus 7

Avoimia kysymyksiä-erittäin vaikeita.

$$e \quad \textit{ja} \quad \pi \quad \textit{lin. vapaita}/\mathbb{Q}? \tag{9.37}$$

$$e\pi \ \notin \mathbb{Q}? \tag{9.38}$$

$$e + \pi \ \notin \mathbb{Q}? \tag{9.39}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\log n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \ \notin \mathbb{Q}? \tag{9.40}$$

Lause 29

$$\frac{{}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \middle| \, t\right)}{{}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a+1 \\ c+1 \end{smallmatrix} \middle| \, t\right)} = 1 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k t}{1}\right), \tag{10.1}$$

missä

$$a_{2k} = \frac{a+k}{(c+2k-1)(c+2k)}, \tag{10.2}$$

$$a_{2k+1} = \frac{a-(c+k))}{(c+2k)(c+2k+1)}. \tag{10.3}$$

Lause 30

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, t\right)}{{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b+1 \\ c+1 \end{matrix} \,\middle|\, t\right)} = 1 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k t}{1}\right), \tag{10.4}$$

missä

$$a_{2k} = -\frac{(b+k)(c-a+k)}{(c+2k-1)(c+2k)}, \tag{10.5}$$

$$a_{2k+1} = -\frac{(a+k)(c-b+k)}{(c+2k)(c+2k+1)}. \tag{10.6}$$

Koska

$$\arctan z = z\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 1/2\\ 3/2\end{matrix}\ \middle|\ -z^2\right), \tag{10.7}$$

niin

Lause 31

$$\arctan z = \frac{z}{1+}\,\frac{1^2z^2}{3}\,+\,\frac{2^2z^2}{5}\,+\,\frac{3^2z^2}{7}\,+\ldots. \tag{10.8}$$

Lause 32

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{3+}\,\frac{2^2}{5+}\,\frac{3^2}{7+\ldots} = \tag{10.9}$$

$$\frac{1}{1+\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2k+1}\right)}. \tag{10.10}$$

Lause 33

$$e = 2 + \frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+\ldots}. \tag{10.11}$$