802655S KETJUMURTOLUVUT OSA I
CONTINUED FRACTIONS PART I

Tapani Matala-aho
MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO

KEVÄT 2019

Ketjumurtolukujen teoria on kiinteä osa matematiikan lukuteoriaa.

Luennoilla tarkastelemme aluksi reaalilukujen b-kantaesityksiä ja yksinkertaisia ketjumurtoesityksiä sekä esityksien ominaisuuksia-päättyvä, päättymätön, irrationaalisuus, jaksollisuus, approksimaatio-ominaisuudet.
Seuraavaksi tutkitaan yleisiin ketjumurtolukuihin liittyviä rekursiota ja transformaatioita sekä suppenemis- ja irrationaalisuusehtoja.
Edelleen tarkastellaan hypergeometristen sarjojen ketjumurtokehitelmiä, joista saadaan tuttujen lukujen kuten Neperin luvun ja piin ketjumurtokehitelmiä.
Tutkimus suunnataan myös yleisempiin irrationaalisuuskysymyksiin ja Diofantoksen yhtälöihin.
802655S KETJUMURTOLUVUT/NOPPA LINK.

802655S CONTINUED FRACTIONS/NOPPA LINK.

Esitiedot:
Pakolliset aineopinnot ja Lukuteorian perusteet.
Kurssilla käytetään Lukuteorian perusteet kurssin merkintöjä.
Notations and basics of Number Theory from the course: Basics of Number Theory.
Lisa Lorentzen and Haakon Waadeland: Continued Fractions with Applications (1992).
Oskar Perron: Die Lehre von den Kettenbruchen (1913).
G.H. Hardy & E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers.
Kenneth H. Rosen: Elementary number theory and its applications.
Number Theory Web/LINK
American Mathematical Monthly/LINK

Algebran perusteet:

Lause 1

Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ *ja* $b \neq 0$. *Tällöin*

$$\exists! \quad q \in \mathbb{Z} \quad ja \quad \exists! \quad r \in \mathbb{N}:$$

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r \leq |b| - 1. \tag{3.1}$$

Kun $b \in \mathbb{Z}^+$, niin

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor. \tag{3.2}$$

b-base expansion of an integer:

Lause 2

Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ *ja* $a \in \mathbb{N}$. *Tällöin* $\exists!$ *esitys*

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n b^n, \quad 0 \leq a_n \leq b - 1, \quad a_n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Esitystä/representation (4.1) sanotaan kokonaisluvun b-kantakehitelmäksi.

Merkintä 1

$$a_m ... a_0 = (a_m ... a_0)_b = a_m b^m + ... + a_1 b + a_0. \tag{4.2}$$

Cantor expansion of an integer

Lause 3

Olkoot $\{b_1, b_2, ...\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ *ja* $a \in \mathbb{N}$ *annettu. Tällöin* $\exists!$ *esitys*

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n \prod_{i=1}^{n} b_i, \quad 0 \leq a_n \leq b_{n+1} - 1, \quad a_n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Seurauksena saadaan Cantorin kehitelmä

Lause 4

Olkoon $a \in \mathbb{N}$. *Tällöin* $\exists!$ *Cantorin esitys*

$$a = \sum_{n \geq 1} a_n n!, \quad 0 \leq a_n \leq n, \quad a_n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Lauseen 3 todistus

Jakoalgoritmia toistamalla/by repeating the division algorithm

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b_1 + a_0, & 0 \le a_0 \le b_1 - 1;\\
q_1 &= q_2 b_2 + a_1, & 0 \le a_1 \le b_2 - 1;\\
q_2 &= q_3 b_3 + a_2, & 0 \le a_2 \le b_3 - 1;\\
&\ldots & ;\\
q_{s-1} &= q_s b_s + a_{s-1}, & 0 \le a_{s-1} \le b_s - 1;\\
q_s &= 0 \cdot b_{s+1} + a_s, & 0 \le a_s \le b_{s+1} - 1.
\end{aligned}$$

Osoitetaan myöhemmin, että tällainen s on olemassa.

Siten

$$\begin{aligned}
a =&(q_2 b_2 + a_1) b_1 + a_0 \\
=&q_2 b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0 \\
=&(q_3 b_3 + a_2) b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0 \\
=&q_3 b_3 b_2 b_1 + a_2 b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0 \\
=&\ldots \\
=&a_s b_s \cdots b_2 b_1 + \ldots + a_2 b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0.
\end{aligned}$$

Sopimuksen mukaan $\prod_{i=1}^{0} b_i = 1$ (tyhjä tulo$= 1$), joten saadaan esitys (4.3).

Näytetään vielä, että on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}$, että $q_{s+1} = 0$. Meillä oli $b_k \geq 2$ kaikilla k. Siten

$$\begin{aligned}
&a = q_1 b_1 + a_0 \geq 2q_1;\\
&q_1 = q_2 b_2 + a_1 \geq 2q_2;\\
&q_2 = q_3 b_3 + a_2 \geq 2q_3;\\
&\ldots;\\
&q_{k-1} = q_k b_k + a_{k-1} \geq 2q_k,
\end{aligned}$$

josta saadaan

$$q_k \leq \frac{a}{2^k}. \tag{4.5}$$

Yksikäsitteisyyden todistus sivuutetaan. □

Esimerkki 1

Olkoot $b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 2$ *ja* $a = 11$. *Laskemalla saadaan, että*

$$11 = 1 \cdot (2 \cdot 3) + 1 \cdot 3 + 2 = 0 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 3) + 1 \cdot 3 + 2 \tag{4.6}$$

on luvun 11 *Cantorin kehitelmä kannassa* $\{3, 2, 3, 2\}$

Peräkkäisten lukujen digitit

Palataan vielä Cantorin lauseen 3 tarkasteluun. Olkoot $\{b_1, b_2, ...\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ annettu. Tutkitaan tilannetta

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 b_1 + a_2 b_1 b_2 + ... + a_h b_1 \cdots b_h + ..., \\ a_0 &= b_1 - 1, ..., a_{h-1} = b_h - 1,\ a_h \leq b_{h+1} - 2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

missä digitit $a_0, ..., a_{h-1}$ ovat maksimissaan. Lasketaan

$$\begin{aligned} a + 1 &= 1 + (b_1 - 1) + (b_2 - 1)b_1 + ... + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_1 + (b_2 - 1)b_1 + (b_3 - 1)b_1 b_2 + ... + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_2 b_1 + (b_3 - 1)b_1 b_2 + ... + (b_h - 1)b_1 \cdots b_{h-1} + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_3 b_1 b_2 + ... + (b_h - 1)b_1 \cdots b_{h-1} + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_h b_1 \cdots b_{h-1} + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= (a_h + 1)b_1 \cdots b_h + ... \leq (b_{h+1} - 1)b_1 \cdots b_h + ... \end{aligned} \tag{4.8}$$

Digits of consecutive integers

Siten ylivuoto pysähtyy ensimmäiseen vajaaseen digittiboksiin./Overflow will stop to the first non-full digit box.
Koska

$$\#\{a_0, a_1, ..., a_h\} = b_1 \cdots b_{h+1}, \tag{4.9}$$

niin peräkkäiset kokonaisluvut/consecutive integers $0, 1, ..., b_1 \cdots b_{h+1} - 1$ ovat esitettävissä muodossa/ can be prepresented in the form

$$a_0 + a_1 b_1 + a_2 b_1 b_2 + ... + a_h b_1 \cdots b_h, \quad 0 \leq a_i \leq b_{i+1} - 1. \tag{4.10}$$

Seurauksena saadaan

$$\begin{aligned} 1 + (b_1 - 1) + (b_2 - 1)b_1 + ... + (b_h - 1)b_1 \cdots b_{h-1} \\ + (b_{h+1} - 1)b_1 \cdots b_h = b_1 \cdots b_h b_{h+1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Digits of consecutive integers

eli

$$(b_1-1)+(b_2-1)b_1+\ldots+(b_{h+1}-1)b_1\cdots b_h=b_1\cdots b_h b_{h+1}-1, \quad (4.12)$$

mikä on voimassa myös arvolla/valid also with the value $b_1=1$. Niinpä esimerkiksi

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+h\cdot h!=(h+1)!-1. \quad (4.13)$$

Reaaliluvun b-kantakehitelmä/base b-expansion of a real number

Lause 5

Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$. Tällöin $\exists$ esitys/representation

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}, \quad 0 \leq x_n \leq b-1, \quad x_n \in \mathbb{N}, \tag{4.14}$$

joka on yksikäsitteinen mikäli vaaditaan, että jokaista $N \in \mathbb{Z}^+$ kohti $\exists$ sellainen luku $k \in \mathbb{Z}_{\geq N}$ että $x_k \neq b-1$. It is unique, if we demand that for every $N \in \mathbb{Z}^+$ there $\exists$ such a number $k \in \mathbb{Z}_{\geq N}$ that $x_k \neq b-1$.

Merkintä 2

$$0, x_1 x_2 ... = (0, x_1 x_2 ...)_b = x_1 b^{-1} + x_2 b^{-2} + ... \tag{4.15}$$

$$a_m ... a_0, x_1 x_2 ... = (a_m ... a_0, x_1 x_2 ...)_b = \tag{4.16}$$

$$a_m b^m + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0 + x_1 b^{-1} + x_2 b^{-2} + ...$$

Todistus. Kaikilla $y \in \mathbb{R}$ pätee (katso Lukuteorian perusteet)

$$0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1. \tag{4.17}$$

Asetetaan $y_0 = x$ ja palautuskaavat/recurrences

$$x_{k+1} = \lfloor by_k \rfloor; \tag{4.18}$$

$$y_{k+1} = by_k - x_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Tällöin

$$x_1 = \lfloor by_0 \rfloor = \lfloor bx \rfloor \tag{4.20}$$

ja

$$0 \leq x_1 = \lfloor bx \rfloor \leq bx < b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_1 \leq b - 1. \tag{4.21}$$

Edelleen

$$y_1 = by_0 - x_1 = bx - \lfloor bx \rfloor \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y_1 < 1 \tag{4.22}$$

ja

$$x = y_0 = \frac{x_1}{b} + \frac{y_1}{b}. \tag{4.23}$$

Vastaavasti

$$y_1 = \frac{x_2}{b} + \frac{y_2}{b}, \quad 0 \leq y_2 < 1, \tag{4.24}$$

ja siten

$$x = y_0 = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \frac{y_2}{b^2}. \tag{4.25}$$

Edelleen

$$x = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + ... + \frac{x_n}{b^n} + \frac{y_n}{b^n}, \tag{4.26}$$

missä

$$0 \leq x_i \leq b - 1, \quad 0 \leq y_i < 1 \quad \forall i = 1, ..., n. \tag{4.27}$$

Olkoon

$$x = X_n + \frac{y_n}{b^n}, \tag{4.28}$$

missä

$$X_n = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \ldots + \frac{x_n}{b^n} \tag{4.29}$$

on kasvava/increasing ja rajoitettu/bounded. Näytetään, että X_n on rajoitettu:

$$\begin{aligned} X_n \leq & \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + \ldots + \frac{b-1}{b^n} + \ldots = \\ = & \frac{b-1}{b}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \ldots\right) \\ = & \frac{b-1}{b}\frac{1}{1-1/b} = 1. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Siten

$$\lim X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n} \quad \exists. \tag{4.31}$$

Osoitetaan vielä, että

$$\lim X_n = x. \tag{4.32}$$

Tuloksen/By the result (4.26) nojalla

$$\begin{aligned} |x - X_n| &= \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \ldots + \frac{x_n}{b^n} + \frac{y_n}{b^n} - \left(\frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \ldots + \frac{x_n}{b^n}\right) \\ &= \frac{y_n}{b^n} \leq \frac{1}{b^n} \ \to \ 0. \quad \square \end{aligned} \tag{4.33}$$

Lauseen 5 yleistyksenä saadaan.

Lause 6

Olkoot $\{b_1, b_2, ...\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ *ja* $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$. *Tällöin* $\exists$ *esitys*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_1 \cdots b_n}, \quad 0 \leq c_n \leq b_n - 1, \quad c_n \in \mathbb{N}. \tag{4.34}$$

Lauseen 6 erikoistapauksena saadaan Cantor tyyppinen esitys.

Lause 7

Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$. *Tällöin* $\exists$ *esitys*

$$x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n!}, \quad 0 \leq d_n \leq n - 1, \quad d_n \in \mathbb{N}. \tag{4.35}$$

Esimerkki 2

Määrätään luvuille

$$e-2, \quad 1/e \tag{4.36}$$

esitykset (4.35).

Käytetään eksponenttifunktion sarjakehitelmää/series expansion

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{4.37}$$

jolloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots \\ &= \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + \ldots \end{aligned} \tag{4.38}$$

Määritelmä 1

Esitys

$$x = 0, x_1 x_2 \ldots \tag{4.39}$$

on päättyvä/finite/terminating, jos $\exists$ sellainen $M \in \mathbb{Z}^+$, että

$$x_k = 0, \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq M}. \tag{4.40}$$

Esitys (4.39) on jaksollinen/periodic, mikäli $\exists$ sellaiset $N \in \mathbb{N}$ ja $L \in \mathbb{Z}^+$, että

$$x_{n+L} = x_n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq N+1}, \tag{4.41}$$

missä L on jakso/period.

Tällöin käytetään merkintöjä

$$x = 0, x_1 x_2 \ldots = 0, x_1 \ldots x_N \, \overline{x_{N+1} \ldots x_{N+L}} =$$

$$0, x_1 \ldots x_N \, x_{N+1} \ldots x_{N+L} \, x_{N+1} \ldots x_{N+L} \ldots, \tag{4.42}$$

missä N on alkutermin pituus/lenght of the initial term. Jos $N = 0$ eli alkutermiä ei ole/no initial term, niin tällöin kehitelmä on puhtaasti jaksollinen/purely periodic.

Huomautus 1

Jos muuta ei sanota, niin jakso ja alkutermi valitaan mahdollisimman lyhyeksi. If nothing else is mentioned, then we choose period and initial terms as short as possible.
Käytetään myös termiä minimijakso/minimal period.

Huomautus 2

Reaaliluvun päättyvä esitys on jaksollinen eli

$$x = a, x_1 \dots x_N = a, x_1 \dots x_N\, 0 \dots = a, x_1 \dots x_N\, \overline{0} \tag{4.43}$$

ja rationaalinen eli

$$x = a, x_1 \dots x_N \in \mathbb{Q}. \tag{4.44}$$

b-kantaesitys/Algoritmi

Palautuskaavat (4.18) ja (4.19) antavat algoritmin:

$$\begin{aligned} y_0 &= x; \\ x_{k+1} &= \lfloor b y_k \rfloor; \\ y_{k+1} &= b y_k - x_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \end{aligned} \tag{4.45}$$

reaaliluvun *b*-kantaesityksen laskemiseen.

Esimerkki 3

$$\frac{1}{7} = (0,001001\ldots)_2 = (0,\overline{001})_2. \tag{4.46}$$

Nyt $b = 2$ ja $y_0 = x = 1/7$, jolloin

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lfloor by_0 \rfloor = \lfloor \frac{2}{7} \rfloor = 0; \\
y_1 &= by_0 - x_1 = \frac{2}{7} - 0 = \frac{2}{7}; \\
x_2 &= \lfloor by_1 \rfloor = \lfloor \frac{4}{7} \rfloor = 0; \\
y_2 &= by_1 - x_2 = \frac{4}{7} - 0 = \frac{4}{7}; \\
x_3 &= \lfloor by_2 \rfloor = \lfloor \frac{8}{7} \rfloor = 1; \\
y_3 &= by_2 - x_3 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7} = y_0; \\
x_4 &= x_1; \quad \ldots
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Esimerkki 4

$b = 10.$

$$\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}, \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}, \quad \frac{6}{7} = 0,\overline{857142},$$

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}, \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}, \quad \frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$$

Huomautus 3

Huomaa, että rationaaliluku $x \in \mathbb{Q}$ voidaan esittää supistetussa muodossa

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.48}$$

Terminating expansion

Lause 8

Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$.
A). Jos rationaaliluvulle $x \in \mathbb{Q}$, missä

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad s = \prod_{i=1}^{h} p_i^{v_i}, \quad p_i \in \mathbb{P}, \quad v_i \in \mathbb{Z}^+, \tag{4.49}$$

pätee ehto/holds a condition

$$\prod_{i=1}^{h} p_i \Bigg| \, b, \tag{4.50}$$

niin esitys (4.14) on päättyvä.

Terminating expansion

B). Jos reaaliluvun x esitys (4.14) on päättyvä, niin $x \in \mathbb{Q}$ ja sen supistetulle esitykselle

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad s = \prod_{i=1}^{h} p_i^{v_i}, \quad p_i \in \mathbb{P}, \quad v_i \in \mathbb{Z}^+, \tag{4.51}$$

pätee ehto

$$\prod_{i=1}^{h} p_i \,\Big|\, b. \tag{4.52}$$

Ehto/condition (4.50) lyhemmin/shortly

$$p|s \quad \Rightarrow \quad p|b, \quad p \in \mathbb{P}. \tag{4.53}$$

Todistus.
A. Ehdosta (4.50) seuraa, että

$$s|b^K, \quad K = \max\{v_1, ..., v_h\}. \tag{4.54}$$

Siten $b^K x = b^K \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}^+$, joten

$$b^K x = c_0 + c_1 b + ... + c_m b^m, \quad 0 \le c_i \le b-1, \quad m < K. \tag{4.55}$$

Siispä

$$x = \frac{c_m}{b^{K-m}} + ... + \frac{c_0}{b^K}. \quad \square \tag{4.56}$$

B. Olkoon esitys päättyvä eli

$$x = \frac{x_1}{b} + \ldots + \frac{x_N}{b^N} = \frac{x_1 b^{N-1} + \ldots + x_N}{b^N} := \frac{r}{s}, \quad r \perp s. \tag{4.57}$$

Siten

$$b^N r = (x_1 b^{N-1} + \ldots + x_N)s, \quad r \perp s. \tag{4.58}$$

Olkoon $p_i | s$. Koska $r \perp s$, niin $p_i | b^N$, joten $p_i | b$ kaikilla s:n alkutekijöillä p_i. $\square$

Esimerkki 5

Olkoon $b = 5$ *ja* $x = 7/9$. *Nyt* $s = 3^2$, *joten ehto* (4.53) *ei ole voimassa. Siten* 5*-kantainen kehitelmä luvulle* 7/9 *on päättymätön/infinite.*

Esimerkki 6

Olkoon $b = 3$ *ja* $x = 7/9$. *Nyt* $s = 3^2$, *joten ehto* (4.53) *on voimassa. Siten* 3*-kantainen kehitelmä luvulle* 7/9 *on päättyvä/finite. Algoritmilla* (4.45) *saadaankin:*

$$\frac{7}{9} = (0,21)_3. \tag{4.59}$$

Nyt $y_0 = x = 7/9$, jolloin

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lfloor by_0 \rfloor = \lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2; \\
y_1 &= by_0 - x_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}; \\
x_2 &= \lfloor by_1 \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1; \\
y_2 &= by_1 - x_2 = 1 - 1 = 0; \\
x_3 &= \lfloor by_2 \rfloor = 0; \\
y_3 &= by_2 - x_3 = 0; \\
x_4 &= x_5 = \ldots = 0.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Määritelmä 2

Olkoot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $b \in \mathbb{Z}$ ja $b \perp n$. Luvun b kertaluku $\mathrm{ord}_n\ b$, on pienin luku $k \in \mathbb{Z}^+$, jolle pätee

$$b^k \equiv 1 \pmod{n}. \tag{4.61}$$

Olkoon $\overline{b} \in \mathbb{Z}_n^*$ ja

$$\langle \overline{b} \rangle = \{ \overline{b}^k \mid k \in \mathbb{N} \} \tag{4.62}$$

alkion $\overline{b}$ generoima syklinen aliryhmä. Tällöin

$$\mathrm{ord}_n\ b = \# \langle \overline{b} \rangle. \tag{4.63}$$

Koska aliryhmän kertaluku jakaa ryhmän kertaluvun, niin

$$\mathrm{ord}_n\ b \,|\, \# \mathbb{Z}_n^* = \varphi(n)\ . \tag{4.64}$$

Tarkemmin kurssilla Lukuteoria A/LINK.

Esimerkki 7

$n = 7,\ b = 10,\ \overline{10} = \overline{3} \in \mathbb{Z}_7^*.$

$$\Rightarrow \quad ord_7\ 10 | 6 = \varphi(7). \tag{4.65}$$

Lasketaan siis

$$\overline{3}^1 = \overline{3}, \overline{3}^2 = \overline{2}, \overline{3}^3 = \overline{6}, \tag{4.66}$$

joten

$$\Rightarrow \quad ord_7\ 10 \geq 4 \quad \Rightarrow \quad ord_7\ 10 = 6. \tag{4.67}$$

Periodic expansion

Kerrataan vielä, että reaaliluvun päättyvä esitys on jaksollinen eli

$$x = a, x_1 \ldots x_N = a, x_1 \ldots x_N\, 0 \ldots = a, x_1 \ldots x_N\, \overline{0}$$

ja päättyvä esitys on rationaalinen eli

$$x = a, x_1 \ldots x_N \in \mathbb{Q}.$$

Erityisesti

$$0 = 0, 00 \ldots = 0, \overline{0} = \frac{0}{1}.$$

Periodic expansion

Lause 9

Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$.
A). Jaksollinen esitys on rationaalinen eli

$$x = 0, x_1 \ldots x_N \, \overline{x_{N+1} \ldots x_{N+L}} = \frac{r}{s}, \quad r \perp s. \tag{4.68}$$

B). Rationaaliluvun $x = r/s$ esitys on jaksollinen eli

$$\frac{r}{s} = 0, x_1 \ldots x_N \, \overline{x_{N+1} \ldots x_{N+L}}. \tag{4.69}$$

Periodic expansion

C). Olkoot

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad s = TU, \quad U \perp b; \tag{4.70}$$

$$p|T \quad \Rightarrow \quad p|b, \quad p \in \mathbb{P}; \tag{4.71}$$

$$ord_U \ b = L; \tag{4.72}$$

ja luku $N \in \mathbb{N}$ on pienin/smallest, jolle pätee/for which holds

$$T|b^N. \tag{4.73}$$

Tällöin jakson pituus on L ja alkutermin pituus N.
Huom: Jos $T = 1$, niin $N = 0$, jolloin alkutermiä ei ole ja kehitelmä on puhtaasti jaksollinen.

Todistus.
A. Tutkitaan ensin puhtaasti jaksollista kehitelmää/first we study a purely periodic expansion

$$
\begin{aligned}
z = 0,\overline{z_1 \dots z_L} = \frac{z_1}{b} + \dots + \frac{z_L}{b^L} + \\
\frac{1}{b^L}\left(\frac{z_1}{b} + \dots + \frac{z_L}{b^L} + \frac{z_1}{b^{L+1}} + \dots + \frac{z_L}{b^{2L}} + \dots\right) \\
= \frac{d}{b^L} + \frac{1}{b^L} z,
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

mistä saadaan

$$
z = \frac{d}{b^L - 1}. \tag{4.75}
$$

Siispä

$$x = 0,x_1\ldots x_N\,\overline{x_{N+1}\ldots x_{N+L}} = \frac{x_1}{b} + \ldots + \frac{x_N}{b^N} + \frac{1}{b^N}\left(\frac{x_{N+1}}{b} + \ldots + \frac{x_{N+L}}{b^L} + \frac{x_{N+1}}{b^{L+1}} + \ldots + \frac{x_{N+L}}{b^{2L}} + \ldots\right) = \frac{c}{b^N} + \frac{1}{b^N}\frac{d}{b^L - 1} := \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}. \quad (4.76)$$

$B \subseteq C$.
Olkoon sitten $0 < x < 1$. Ehdon (4.73) nojalla

$$b^N = TV, \quad \text{jollakin} \quad V \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.77}$$

Siten

$$b^N x = TV \frac{r}{TU} = \frac{rV}{U} = \frac{cU + d}{U}, \tag{4.78}$$

missä jakoalgoritmin nojalla

$$rV = cU + d, \quad 0 \leq d \leq U - 1, \quad c, d \in \mathbb{N}. \tag{4.79}$$

Oletuksista saadaan vielä $d \perp U$ ja $0 \leq c < b^N$, joten

$$b^N x = c + \frac{d}{U}, \quad d \perp U, \quad 0 \leq c < b^N. \tag{4.80}$$

a) Tapaus $U = 1$. Nyt $s = T$, jolloin ehdon (4.71) nojalla

$$p|s = T \quad \Rightarrow \quad p|b, \quad p \in \mathbb{P}. \tag{4.81}$$

Lauseen 8 kohdan A. nojalla esitys on päättyvä.
b) Tapaus $U \geq 2$. Oletuksen (4.72) nojalla

$$b^L \equiv 1 \pmod{U}, \tag{4.82}$$

joten on olemassa sellainen $a \in \mathbb{N}$, että saadaan eräänlainen palautuskaava

$$b^L \frac{d}{U} = \frac{(1 + aU)d}{U} = \frac{d}{U} + ad. \tag{4.83}$$

Olkoon

$$\frac{d}{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{b^n}, \quad 0 \leq d_n \leq b-1, \quad d_n \in \mathbb{N}, \tag{4.84}$$

luvun d/U Lauseen 5 mukainen yksikäsitteinen kantakehitelmä. Sijoitetaan kehitelmä (4.84) kaavaan (4.83), jolloin saadaan

$$d_1 b^{L-1} + ... + d_L b^0 + d_{L+1} b^{-1} + d_{L+2} b^{-2} + d_{L+3} b^{-3} + ... = \tag{4.85}$$

$$ad + d_1 b^{-1} + d_2 b^{-2} + d_3 b^{-3} + ... \tag{4.86}$$

Vertaamalla vastinpotenssien kertoimia (kantakehitelmien yksikäsitteisyyden nojalla) saadaan

$$d_1 = d_{L+1}, \quad d_2 = d_{L+2}, \quad d_3 = d_{L+3}, ... \tag{4.87}$$

eli

$$d_{L+j} = d_j \quad \forall j = 1, 2, ..., \tag{4.88}$$

ja siten luvun d/U kantakehitelmä on puhtaasti jaksollinen.

Edelleen yhtälön (4.80) nojalla

$$x = \frac{c}{b^N} + \frac{1}{b^N}\frac{d}{U}, \tag{4.89}$$

missä

$$c = c_K b^K + \ldots + c_0, \quad K < N. \tag{4.90}$$

Niinpä

$$\begin{gathered} x = x_1 b^{-1} + \ldots + x_N b^{-N} + \\ d_1 b^{-(N+1)} + d_2 b^{-(N+2)} + \ldots + d_L b^{-(N+L)} + \\ d_1 b^{-(N+L+1)} + d_2 b^{-(N+L+2)} + \ldots + d_L b^{-(N+2L)} + \ldots = \\ 0, x_1 \ldots x_N \overline{d_1 \ldots d_L}. \quad \square \end{gathered} \tag{4.91}$$

Esimerkki 8

Olkoon $b = 10$. *Tutkitaan lukuja* $1/7$ *ja* $1/14$. *Aluksi*

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{7}, \Rightarrow \; s = 7;\; U = 7 \quad &\Rightarrow \quad ord_U b = ord_7 10 = 6 = L; \\ T = 1 \quad &\Rightarrow \quad N = 0. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Siten jakson pituus $= 6$ *ja alkutermin pituus* $= 0$ *(Katso: Esimerkit 4 ja 7).*

Esimerkki 8

Olkoon $b = 10$. *Tutkitaan lukuja* $1/7$ *ja* $1/14$. *Aluksi*

$$x = \frac{1}{7}, \Rightarrow s = 7;\ U = 7 \quad \Rightarrow \quad ord_U b = ord_7 10 = 6 = L; \qquad T = 1 \quad \Rightarrow \quad N = 0. \tag{4.92}$$

Siten jakson pituus $= 6$ *ja alkutermin pituus* $= 0$ *(Katso: Esimerkit 4 ja 7). Kun taas*

$$x = \frac{1}{2 \cdot 7}, \quad \Rightarrow \quad s = 2 \cdot 7;\ U = 7 \quad \Rightarrow \quad L = 6; \qquad T = 2 | b^N = 10^1, \quad \Rightarrow \quad N = 1. \tag{4.93}$$

Siten jakson pituus $= 6$ *ja alkutermin pituus* $= 1$.

Määritelmä 3

Luku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ *on irrationaalinen.*

(Myös ei-rationaaliset p-adiset ($p \in \mathbb{P}$) luvut ovat irrationaalisia eli luku $\alpha \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}$ on irrationaalinen, missä $\mathbb{C}_p$ on kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$ vastaava p-adisten lukujen kunta.)

Määritelmä 3

Luku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ *on irrationaalinen.*

(Myös ei-rationaaliset p-adiset ($p \in \mathbb{P}$) luvut ovat irrationaalisia eli luku $\alpha \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}$ on irrationaalinen, missä $\mathbb{C}_p$ on kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$ vastaava p-adisten lukujen kunta.)

Monesti tyydytään suppeampaan määritelmään:
Luku $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on irrationaalinen.

Esimerkki 9

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}, \quad i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}. \tag{5.1}$$

Todistus kurssilla Lukuteorian perusteet.

Määritelmä 4

Luku $m \in \mathbb{Z}$ on neliövapaa (square-free), jos ehdosta $a^2 | m$, $a \in \mathbb{Z}$, välttämättä seuraa $a^2 = 1$.

Tulos (5.1) yleistyy tulokseksi:

Lause 10

Olkoon $D \in \mathbb{Z}$, $D \neq 1$, neliövapaa. Tällöin

$$\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}. \tag{5.2}$$

Lause 11

Olkoot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ *ja* $r \in \mathbb{Q}^+$. *Tällöin*

$$\sqrt[n]{1 + r^n} \notin \mathbb{Q}. \tag{5.3}$$

Lauseen 11 todistus palautuu Fermat'n suureen lauseeseen:
Jos $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, niin

$$x^p + y^p \neq z^p \quad \forall \quad x, y, z \in \mathbb{Z}^+. \tag{5.4}$$

Andre Wiles todisti Fermat'n suuren lauseen työssään [Annals of Mathematics 141 (1994)]. Wilesin todistus perustuu mm. elliptisten käyrien ominaisuuksiin.

Tälläkin kurssilla log = $\log_e$ = ln eli log tarkoittaa e-kantaista logaritmia, jolloin

$$\log e = 1. \tag{5.5}$$

Esimerkki 10

$$\frac{\log 2}{\log 3} \notin \mathbb{Q}. \tag{5.6}$$

Todistus. Jos olisi

$$\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}^+, \tag{5.7}$$

niin

$$2^b = 3^a \quad \Rightarrow \quad 2|3^a \quad \Rightarrow \quad 2|3 \tag{5.8}$$

mikä on mahdotonta. □

Seuraus 1

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \notin \mathbb{Q}. \tag{5.9}$$

Mutta on huomattavasti vaikeampi todistaa, että

Esimerkki 11

$$\log 2 \notin \mathbb{Q}. \tag{5.10}$$

Todistetaan myöhemmin ketjumurtolukujen avulla yleisempi tulos, josta seuraa esimerkiksi

$$\log m \notin \mathbb{Q}, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}. \tag{5.11}$$

An irrationality criterion

Lauseeseen 9 nojautuen saadaan hyödyllinen irrationaalisuuskriteeri, jos luvulle τ tunnetaan jokin b-kantakehitelmä.

Lause 12

Jos luvun τ kantakehitelmä on jaksoton eli

$$\tau \neq (a, \tau_1 \ldots \tau_N \overline{\tau_{N+1} \ldots \tau_{N+L}})_b, \tag{5.12}$$

niin $\tau \notin \mathbb{Q}$.

Esimerkki 12

Osoita, että

$$\tau = 0,101001000100001\ldots \notin \mathbb{Q}. \tag{5.13}$$

Ratkaisu. Aluksi haetaan bittijonon sääntö jakamalla jono paloihin

$$1 \quad 01 \quad 001 \quad 0001 \quad 00001 \ldots, \tag{5.14}$$

jolloin havaitaan, että k. palan $00\ldots01$ pituus on k ja siinä esiintyy $k-1$ nollaa, jokaisella $k = 1, 2, \ldots$. (Nollat muodostavat aukon, jonka pituus kasvaa aina yhdellä.)
Siten

$$\tau = 0, \tau_1\tau_2\tau_3\ldots, \quad \tau_n = \begin{cases} 1, & n = n_k = \frac{k(k+1)}{2}; \\ 0, & n \neq n_k = \frac{k(k+1)}{2}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Tehdään nyt vastaoletus: $\tau \in \mathbb{Q}$. Tällöin τ:n kehitelmä on jaksollinen eli

$$\tau = 0, \tau_1\ldots\tau_N\overline{\tau_{N+1}\ldots\tau_{N+L}}, \quad N \geq 0, \quad L \geq 1. \tag{5.16}$$

Valitaan sitten tarpeeksi suuri k, että

$$n_k > N \quad \text{ja} \quad k \geq L, \tag{5.17}$$

jolloin ensimmäinen ehto varmistaa, että päästään pois alkutermiltä. Toisen ehdon nojalla saadaan aukko, jonka pituus on suurempi kuin jakson pituus - todistetaan tämä. Ykkösten välissä nollien muodostama aukko:

$$\begin{array}{l} \tau_{n_k} \quad \cdots \quad \tau_{n_{k+1}} \\ 1\ 00\ldots001 \end{array}$$

Toisaalta jaksollisuuden nojalla

$$\tau_{n_k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_k+L} = 1. \tag{5.18}$$

Mutta

$$n_k + L \leq n_k + k < n_{k+1}. \quad \text{Ristiriita.} \quad \square \tag{5.19}$$

Vastaavasti voidaan todistaa seuraavat tulokset:

Esimerkki 13

Olkoon $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. *Osoita, että tällöin*

$$\tau_b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{\binom{n+1}{2}}} \notin \mathbb{Q}. \tag{5.20}$$

Esimerkki 14

Champernowne constant/LINK

$$C_{10} = 0,123456789\ 10\ 11\ 12\ 13... \notin \mathbb{Q}. \tag{5.21}$$

Esimerkki 15

Muodostetaan sanoja seuraavasti käyttäen kuvausta

$$\sigma(a) = ab, \quad \sigma(b) = a, \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y). \tag{5.22}$$

Lähtemällä sanasta b saadaan

$$\begin{aligned} \sigma(b) &= a, \\ \sigma^2(b) &= \sigma(a) = ab, \\ \sigma^3(b) &= \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = aba, \\ \sigma^4(b) &= \sigma(aba) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a) = abaab, \\ \sigma^5(b) &= \sigma(abaab) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)\sigma(a)\sigma(b) = abaababa, \\ &\dots \\ \sigma^\infty(b) &= abaababaabaab\dots \end{aligned}$$

Tulkitaan kirjaimet biteiksi: $a = 1$, $b = 0$, ja muodostetaan binääriluku

$$\kappa = 0,10110101....(= 0, abaababa...). \tag{5.23}$$

Osoita, että $\kappa \notin \mathbb{Q}$.

Tiedetään, että Neperin luvulle e pätee

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}. \tag{5.24}$$

Lause 13

Neperin luku e on irrationaalinen.

Todistus kurssilla Lukuteorian perusteet.

Lause 14

Neperin luku e on transkendenttinen eli ehdosta

$$a_m e^m + a_{m-1} e^{m-1} + \ldots + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}, \tag{5.25}$$

seuraa $a_0 = \ldots = a_m = 0$ *aina, kun* $m \in \mathbb{Z}^+$.

Siten e ei toteuta kokonaislukukertoimista polynomiyhtälöä, jonka aste ≥ 1.
Todistetaan lievempi tulos

Lause 15

Neperin luku e ei ole toisen asteen algebrallinen luku eli

$$ae^2 + be + c \neq 0, \quad \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad ac \neq 0. \tag{5.26}$$

Todistus: Tehdään vastaoletus eli on olemassa sellaiset $a, b, c \in \mathbb{Z}$, että

$$ae^2 + be + c = 0, \quad ac \neq 0. \tag{5.27}$$

Ehto (5.27) on yhtäpitävää ehdon

$$ae + b + ce^{-1} = 0, \quad ac \neq 0, \tag{5.28}$$

kanssa. Käyttämällä sarjaesityksiä, saadaan

$$a\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\right) + b + c\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = \\ -a\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) - c\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right), \tag{5.29}$$

josta edelleen

$$A = A_m := am!\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\right) + bm! + cm!\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$
$$= -am!\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right) - cm!\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right). \quad (5.30)$$

Aluksi huomataan, että $A_m \in \mathbb{Z}$ ja

$$|A_m| \leq |a|m!\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right) + |c|m!\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right) \leq$$
$$\frac{|a|+|c|}{m+1}\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\ldots\right) \leq \frac{7}{9}, \quad (5.31)$$

jos valitaan $m \geq 5$ ja $m+1 \geq 3(|a|+|c|)$. Jos olisi

$$A_m = A_{m+1} = A_{m+2} = 0, \quad (5.32)$$

niin

$$\begin{cases} a\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\right) + b + c\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = 0; \\ a\left(\sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{k!}\right) + b + c\left(\sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = 0; \\ a\left(\sum_{k=0}^{m+2} \frac{1}{k!}\right) + b + c\left(\sum_{k=0}^{m+2} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Vähentämällä 1. yhtälö 2:sta ja vastaavasti 2. yhtälö 3:sta, saadaan

$$\begin{cases} a\frac{1}{(m+1)!} + c\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} = 0; \\ a\frac{1}{(m+2)!} + c\frac{(-1)^{m+2}}{(m+2)!} = 0. \end{cases} \tag{5.34}$$

Siten saataisiin $a = c = 0$. Ristiriita hypoteesin (5.32) kanssa. Siispä $A_h \neq 0$, jollakin $m \leq h \leq m+2$. Tällöin

$$A_h \in \mathbb{Z}, \quad 0 < |A_h| < 1. \tag{5.35}$$

Ristiriita vastaoletuksen (5.27) kanssa. □

Äärellinen ketjumurtoluku

Äärellisellä ketjumurtoluvulla/finite continued fraction tarkoitetaan rationaalilauseketta

$$\frac{a_1}{b_1+\frac{a_2}{b_2+\dots_{+\frac{a_n}{b_n}}}}, \tag{6.1}$$

jolle käytetään seuraavia merkintöjä/for which the following notations are used

$$\mathbb{K}_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)=\frac{a_1}{b_1}{}_{+}\frac{a_2}{b_2}{}_{+}\cdots{}_{+}\frac{a_n}{b_n}. \tag{6.2}$$

Luvut a_n ovat ketjumurtoluvun osaosoittajia/partial numerators ja luvut b_n osanimittäjiä/partial numerators.

Rekursiot

Lause 16

Olkoot luvut A_n ja B_n annettu rekursioilla

$$A_{n+2} = b_{n+2}A_{n+1} + a_{n+2}A_n, \tag{6.3}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2}B_{n+1} + a_{n+2}B_n \tag{6.4}$$

lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_1 = b_0 b_1 + a_1$ ja $B_1 = b_1$. Tällöin

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{A_n}{B_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.5}$$

kunhan $B_n \neq 0$.

Todistus. Induktiolla.
$n = 0$, jolloin

$$V.P. = b_0 = \frac{b_0}{1} = \frac{A_0}{B_0} = O.P.. \tag{6.6}$$

$n = 1$, jolloin

$$V.P. = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1} = O.P.. \tag{6.7}$$

Induktio-oletus: Väite pätee, kun $n = 0, 1, ..., l$, jolloin

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_l}{+ b_l} = \frac{A_l}{B_l} = \frac{b_l A_{l-1} + a_l A_{l-2}}{b_l B_{l-1} + a_l B_{l-2}}. \tag{6.8}$$

Korvataan b_l muuttujalla x ja merkitään

$$K(x) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots \frac{a_l}{+ x}, \tag{6.9}$$

jolle kohdan (6.8) nojalla pätee

$$K(x) = \frac{xA_{l-1} + a_l A_{l-2}}{xB_{l-1} + a_l B_{l-2}}, \tag{6.10}$$

kunhan $x \neq 0$ ja nimittäjä $\neq 0$. Siten kohdista (6.9) ja (6.10) seuraa

$$K(b_l + \frac{a_{l+1}}{b_{l+1}}) = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{l+1}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) =$$

$$\frac{\left(b_l + \frac{a_{l+1}}{b_{l+1}}\right) A_{l-1} + a_l A_{l-2}}{\left(b_l + \frac{a_{l+1}}{b_{l+1}}\right) B_{l-1} + a_l B_{l-2}} =$$

$$\frac{\frac{a_{l+1}}{b_{l+1}} A_{l-1} + b_l A_{l-1} + a_l A_{l-2}}{\frac{a_{l+1}}{b_{l+1}} B_{l-1} + b_l B_{l-1} + a_l B_{l-2}} =$$

$$\frac{a_{l+1} A_{l-1} + b_{l+1} A_l}{a_{l+1} B_{l-1} + b_{l+1} B_l} = \frac{A_{l+1}}{B_{l+1}}, \tag{6.11}$$

missä on sovellettu rekursioita (6.3) ja (6.4) pariin otteeseen. Siten induktioaskel on osoitettu ja induktioperiaatteen nojalla väite pätee. □

Konvergentit/convergents

Määritelmä 5

Luku A_n/B_n on äärettömän ketjumurtoluvun

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \tag{6.12}$$

n. konvergentti. Edelleen ketjumurtoluku (6.12) suppenee, mikäli raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} \tag{6.13}$$

on olemassa. Tällöin sanotaan, että äärettömän ketjumurtoluvun (6.12) arvo on raja-arvo (6.13).

Ääretön ketjumurtoluku/Infinite continued fraction

Ääretöntä ketjumurtolukua (6.12) voidaan merkitä myös seuraavilla tavoilla

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}}. \tag{6.14}$$

Edelleen käytetään merkintöjä

$$[b_0; b_1, \dots, b_n] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b_k} \right); \tag{6.15}$$

$$[b_0; b_1, \dots] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k} \right). \tag{6.16}$$

Yksinkertainen ketjumurtoluku

Usein tarkastellaan yksinkertaisia ketjumurtolukuja.

Määritelmä 6

Olkoot

$$b_0 \in \mathbb{N}, \quad b_k \in \mathbb{Z}^+, \quad a_k = 1, \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.17}$$

Tällöin ketjumurtoluku

$$[b_0; b_1, \ldots, b_n] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b_k} \right) \tag{6.18}$$

on äärellinen yksinkertainen (simple) ketjumurtoluku ja vastaavasti

$$[b_0; b_1, \ldots] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k} \right) \tag{6.19}$$

on ääretön yksinkertainen ketjumurtoluku.

Ketjumurtoalgoritmi

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ annettu. Muodostetaan lukuun α liittyvä yksinkertainen ketjumurtolukukehitelmä

$$[b_0; b_1, \ldots]_\alpha \tag{6.20}$$

seuraavalla Ketjumurtoalgoritmilla:

$$\alpha_0 = \alpha; \quad k = 0; \tag{6.21}$$

$$\alpha_k = \lfloor \alpha_k \rfloor + \{\alpha_k\}, \quad 0 \leq \{\alpha_k\} < 1; \tag{6.22}$$

$$b_k = \lfloor \alpha_k \rfloor; \tag{6.23}$$

Ketjumurtoalgoritmi

Jos

$$\{\alpha_k\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{STOP}; \tag{6.24}$$

Jos

$$\{\alpha_k\} > 0 \quad \Rightarrow; \tag{6.25}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\{\alpha_k\}} \quad \Rightarrow \quad \text{GO TO} \quad 6.22 \quad \text{with } k = k+1; \tag{6.26}$$

Siten algoritmi alkaa seuraavasti:

$$\alpha_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\}, \quad 0 \leq \{\alpha_0\} < 1; \tag{6.27}$$

$$b_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor; \tag{6.28}$$

Ketjumurtoalgoritmi

Jos

$$\{\alpha_0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{STOP}; \tag{6.29}$$

Jos

$$\{\alpha_0\} > 0 \quad \Rightarrow; \tag{6.30}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\}, \quad 0 \le \{\alpha_1\} < 1; \tag{6.31}$$

$$b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor; \ldots \tag{6.32}$$

Huomautus 4

Hyödyllisiä identiteettejä:

$$[b_0; b_1, ..., b_m] = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, ..., b_m]}; \tag{6.33}$$

$$\alpha_k = b_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}; \tag{6.34}$$

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, b_m + \{\alpha_m\}] = [b_0; b_1, ..., b_m, \alpha_{m+1}]. \tag{6.35}$$

Esimerkki 16

Olkoon $\alpha = 3,14$.

$$\alpha_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\} = 3 + 14/100; \tag{6.36}$$

$$b_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 3; \tag{6.37}$$

$$\{\alpha_0\} = 14/100 > 0 \quad \Rightarrow \tag{6.38}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\} = 7 + 1/7; \tag{6.39}$$

$$b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 7; \tag{6.40}$$

$$\{\alpha_1\} = 1/7 > 0 \quad \Rightarrow \tag{6.41}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \lfloor \alpha_2 \rfloor + \{\alpha_2\} = 7 + 0; \tag{6.42}$$

$$b_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 7; \tag{6.43}$$

$$\{\alpha_2\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{STOP}; \tag{6.44}$$

ja siten

$$[b_0; b_1, \ldots]_{3,14} = [3; 7, 7]. \tag{6.45}$$

Huomautus 5

Tärkeä. Numeerisessa laskennassa desimaaliluvut katkaistaan, jolloin katkaistu esitys kannattaa heti kirjoittaa murtoluvuksi. Tällöin algoritmissa vältytään pyöristysvirheiltä.

Esimerkki 17

Olkoon $\alpha = \sqrt{5}$.

$$\alpha_0 = 2 + \sqrt{5} - 2 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\}; \tag{6.46}$$

$$b_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 2; \tag{6.47}$$

$$\{\alpha_0\} = \sqrt{5} - 2 > 0 \quad \Rightarrow \tag{6.48}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2 = 4 + \sqrt{5} - 2 = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\}; \tag{6.49}$$

$$b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 4; \tag{6.50}$$

$$\{\alpha_1\} = \sqrt{5} - 2 > 0 \quad \Rightarrow \tag{6.51}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2 = 4+\sqrt{5}-2 = \lfloor\alpha_2\rfloor + \{\alpha_2\}; \quad (6.52)$$

$$b_2 = \lfloor\alpha_2\rfloor = 4; \quad (6.53)$$

$$\{\alpha_2\} = \sqrt{5}-2 = \{\alpha_1\} > 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = b_2 = b_1 = 4 \quad (6.54)$$

ja edelleen $b_k = 4$ kaikilla $k \geq 1$. Niinpä

$$[b_0; b_1, ...]_{\sqrt{5}} = [2; 4, 4, 4, ...]. = [2; \overline{4}] \quad (6.55)$$

kehitelmä on jaksollinen.

Finite simple continued fractions

Lause 17

Äärellisen yksinkertaisen ketjumurtoluvun arvo on rationaaliluku eli

$$[b_0; b_1, ..., b_m] \in \mathbb{Q} \quad \forall\ b_0 \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.56}$$

Todistus induktiolla käyttäen kaavaa (6.33).

Lause 18

Positiivinen rationaaliluku $r/s \in \mathbb{Q}^+$ *voidaan esittää äärellisenä yksinkertaisena ketjumurtolukuna eli* $\exists$ *sellaiset kokonaisluvut* $b_0 \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}^+$, *että*

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., b_m]. \tag{6.57}$$

Lisäksi rationaaliluvulla on yksikäsitteinen muotoa

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., 1] \tag{6.58}$$

oleva esitys. Edelleen rationaaliluvun kaikki esitykset ovat äärellisiä.

Todistus. Eukleideen algoritmi Lukuteorian perusteet/LINK:

$$
\begin{aligned}
& r_0 = r, \;\; r_1 = s \\
& r_0 = b_0 r_1 + r_2 && 0 \le r_2 < r_1 \\
& \vdots \\
& r_k = b_k r_{k+1} + r_{k+2} && 0 \le r_{k+2} < r_{k+1} \\
& \vdots \\
& r_{m-1} = b_{m-1} r_m + r_{m+1} && 0 \le r_{m+1} < r_m \\
& \exists\; m \in \mathbb{N} : \quad r_{m+1} \ne 0, \;\; r_{m+2} = 0 \\
& r_m = b_m r_{m+1} \\
& r_{m+1} = \mathrm{syt}(r, s).
\end{aligned}
$$

Nyt $r/s = \alpha_0$ ja

$$\alpha_0 = \frac{r_0}{r_1} = b_0 + \frac{r_2}{r_1} = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\}, \tag{6.59}$$

$$0 \leq \{\alpha_0\} = \frac{r_2}{r_1} < 1; \tag{6.60}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{r_1}{r_2} = b_1 + \frac{r_3}{r_2} = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\}, \tag{6.61}$$

$$0 \leq \{\alpha_1\} = \frac{r_3}{r_2} < 1; \tag{6.62}$$

...

$$\alpha_k = \frac{r_k}{r_{k+1}} = b_k + \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}}, \tag{6.63}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\{\alpha_k\}} = \frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}, \tag{6.64}$$

...

$$\alpha_{m-1} = \frac{r_{m-1}}{r_m} = b_{m-1} + \frac{r_{m+1}}{r_m}, \tag{6.65}$$

$$\alpha_m = \frac{1}{\{\alpha_{m-1}\}} = \frac{r_m}{r_{m+1}} = b_m + 0. \tag{6.66}$$

Siten

$$\{\alpha_m\} = 0 \tag{6.67}$$

ja

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., b_m]. \tag{6.68}$$

Koska $b_m \geq 2$ (totea!), niin

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, b_m] = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, b_m - 1, 1]. \tag{6.69}$$

Siten rationaaliluvulla on yksikäsitteinen muotoa

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., 1] \tag{6.70}$$

oleva esitys. Edelleen, Eukleideen algoritmin pituus on äärellinen, joten esitykset ovat äärellisiä. □

Lauseen 16 erikoistapauksena saadaan *n*. konvergentti laskettua seuraavien rekursioiden (6.71) ja (6.72) avulla.

Lause 19

Olkoot luvut A_n ja B_n annettu rekursioilla

$$A_{n+2} = b_{n+2}A_{n+1} + A_n, \tag{6.71}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2}B_{n+1} + B_n \tag{6.72}$$

lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_1 = b_0 b_1 + 1$ ja $B_1 = b_1$. Tällöin

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = \frac{A_n}{B_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.73}$$

Lause 20

Olkoon (F_n) on Fibonaccin lukujono. Tällöin

$$B_n \geq F_{n+1} \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.74}$$

Lause 21

Determinanttikaavat.

$$A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} = (-1)^n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.75}$$

$$A_{n+2}B_n - A_nB_{n+2} = b_{n+2}(-1)^n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.76}$$

Todistus induktiolla käyttäen rekursioita (6.71) ja (6.72).

Seuraus 2

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n}{B_n B_{n+1}} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.77}$$

$$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{b_{n+2}(-1)^n}{B_n B_{n+2}} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.78}$$

Seuraus 3

$$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < \ldots < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \tag{6.79}$$

$$< \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} < \ldots < \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}. \tag{6.80}$$

kaikilla $k, h \in \mathbb{N}$.

Todistus. Tuloksen (6.78) nojalla

$$\frac{A_{2k+2}}{B_{2k+2}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{b_{2k+2}}{B_{2k}B_{2k+2}} > 0 \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{6.81}$$

mikä todistaa epäyhtälöt (6.79).
Samaten tuloksen (6.78) nojalla

$$\frac{A_{2h+3}}{B_{2h+3}} - \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} = -\frac{b_{2h+1}}{B_{2h+1}B_{2h+3}} < 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{N} \tag{6.82}$$

mikä todistaa epäyhtälöt (6.80).
Tutkitaan vielä epäyhtälöketjujen (6.79) ja (6.80) välistä epäyhtälöä.

a) Tapaus $h \geq k$. Tällöin

$$\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2h}}{B_{2h}} + \frac{A_{2h}}{B_{2h}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{6.77}{=} \tag{6.83}$$

$$\frac{1}{B_{2h}B_{2h+1}} + \frac{A_{2h}}{B_{2h}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{6.79}{>} 0. \tag{6.84}$$

b) Tapaus $h < k$. Tällöin

$$\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{6.80}{>} \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{6.77}{=} \frac{1}{B_{2k}B_{2k+1}} > 0. \tag{6.85}$$

Siten

$$\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} > 0 \quad \forall\ h, k \in \mathbb{N}. \quad \square \tag{6.86}$$

Lause 22

$$A_n \perp A_{n+1}, \quad B_n \perp B_{n+1}, \tag{6.87}$$

$$A_n \perp B_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{6.88}$$

Huomautus 6

Tuloksen (6.88) nojalla konvergentit $\frac{A_n}{B_n}$ ovat supistetussa muodossa olevia rationaalilukuja.

Lause 23

Olkoon

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = \frac{A_n}{B_n}, \qquad b_0 \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.89}$$

äärettömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun $[b_0; b_1, ...]$ *konvergenttijono. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \tau \qquad \exists, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \tag{6.90}$$

ja

$$0 < \left|\tau - \frac{A_m}{B_m}\right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}} \quad \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{6.91}$$

Todistus. Tuloksien (6.79) ja (6.80) nojalla jono $(\frac{A_{2k}}{B_{2k}})$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Vastaavasti jono $(\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}})$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Täten

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \alpha_2 \qquad \exists, \tag{6.92}$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} = \alpha_1 \qquad \exists. \tag{6.93}$$

Yhtälöstä (6.74) ja (6.77)saadaan

$$0 < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{1}{B_{2k}B_{2k+1}} \leq \tag{6.94}$$

$$\frac{1}{F_{2k+1}F_{2k+2}} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{4k} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.95}$$

Edelleen raja-arvona saadaan

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \leq \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{4k}, \tag{6.96}$$

josta

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{6.97}$$

Siten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \alpha_1 = \alpha_2. \tag{6.98}$$

Merkitään vielä $\tau = \alpha_1 = \alpha_2$. Tällöin (Laskarit)

$$0 < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \tau < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}}, \tag{6.99}$$

mistä saadaan $\tau > 0$ ja edelleen

$$0 < \tau - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{1}{B_{2k}B_{2k+1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{6.100}$$

Vastaavasti (osoita!)

$$0 < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \tau < \frac{1}{B_{2k+1}B_{2k+2}} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{6.101}$$

Siispä

$$0 < \left|\tau - \frac{A_m}{B_m}\right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}} \quad \forall\ m \in \mathbb{N}. \quad \square \tag{6.102}$$

Lause 24

Olkoon

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = \frac{A_n}{B_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{6.103}$$

äärettömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun $[b_0; b_1, ...] = \tau$ konvergenttijono. Tällöin

$$\tau = b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{B_n B_{n+1}} \tag{6.104}$$

ja

$$\frac{b_{m+2}}{B_m B_{m+2}} < \left| \tau - \frac{A_m}{B_m} \right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}} \quad \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{6.105}$$

Edelleen

$$\frac{1}{(b_{m+1}+2)B_m^2} < \left| \tau - \frac{A_m}{B_m} \right| < \frac{1}{b_{m+1} B_m^2} \leq \frac{1}{B_m^2} \tag{6.106}$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

Huomautus 7

Usein arvion (6.105) sijasta käytetään väljempää arviota (6.106).

Todistus. Summataan yhtälö (6.77) puolittain, jolloin

$$\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}-\frac{A_n}{B_n}\right)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n}{B_nB_{n+1}} \tag{6.107}$$

ja siten

$$\frac{A_m}{B_m}=b_0+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n}{B_nB_{n+1}}. \tag{6.108}$$

Raja-arvona saadaan (6.104). Edelleen

$$\tau-\frac{A_m}{B_m}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{B_nB_{n+1}}, \tag{6.109}$$

missä alternoivan summan ominaisuuksilla saadaan

$$\frac{1}{B_m B_{m+1}} - \frac{1}{B_{m+1} B_{m+2}} < \left|\tau - \frac{A_m}{B_m}\right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}}. \tag{6.110}$$

Vielä

$$\frac{1}{B_m B_{m+1}} - \frac{1}{B_{m+1} B_{m+2}} = \frac{B_{m+2} - B_m}{B_m B_{m+1} B_{m+2}} = \frac{b_{m+2}}{B_m B_{m+2}}. \quad \square \tag{6.111}$$

Lause 25

Äärettömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun arvo τ on irrationaalinen eli $\forall\ b_0 \in \mathbb{N}, b_1, b_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ pätee

$$\tau = [b_0; b_1, ...] \notin \mathbb{Q}. \tag{6.112}$$

Todistus. Aluksi, Lauseen 23 nojalla $\tau \in \mathbb{R}^+$.
I tapa. Lauseen 18 nojalla rationaaliluvun esitys on päättyvä, joten päättymättömän arvo ei voi olla rationaalinen.
II tapa. Vastaoletus

$$[b_0; b_1, ...] = \tau = r/s \in \mathbb{Q}^+, \quad r, s \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.113}$$

Tuloksen (6.100) nojalla

$$0 < \frac{r}{s} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \frac{1}{B_{2k}B_{2k+1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+ \tag{6.114}$$

Täten

$$0 < rB_{2k} - sA_{2k} \leq \frac{s}{B_{2k+1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.115}$$

Koska

$$rB_{2k} - sA_{2k} \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.116}$$

niin

$$1 \leq rB_{2k} - sA_{2k} \leq \frac{s}{B_{2k+1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.117}$$

Tuloksen (6.74) nojalla on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\frac{s}{B_{2k+1}} < 1, \tag{6.118}$$

joka johtaa ristiriitaan. □

Lause 26

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \alpha > 0$ *annettu ja olkoon*

$$[b_0; b_1, \ldots]_\alpha \tag{6.119}$$

Ketjumurtoalgoritmilla muodostettu lukuun α *liittyvä yksinkertainen ketjumurtolukukehitelmä. Tällöin*

$$\alpha = [b_0; b_1, \ldots]_\alpha. \tag{6.120}$$

Todistus. Olkoon

$$[b_0; b_1, ..., b_k] = \frac{A_k}{B_k} \tag{6.121}$$

ketjumurtolukuun

$$[b_0; b_1, ...]_\alpha \tag{6.122}$$

liittyvä konvergenttijono. Toisaalta ketjumurtoalgoritmin identiteetin (6.35) nojalla

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, \alpha_m] = \frac{\tilde{A}_m}{\tilde{B}_m}, \tag{6.123}$$

missä

$$\tilde{A}_m = \alpha_m A_{m-1} + A_{m-2}, \quad \tilde{B}_m = \alpha_m B_{m-1} + B_{m-2}. \tag{6.124}$$

Lasketaan seuraavaksi

$$B_m\tilde{A}_m - A_m\tilde{B}_m =$$

$$B_m(\alpha_m A_{m-1} + A_{m-2}) - A_m(\alpha_m B_{m-1} + B_{m-2}) =$$

$$\alpha_m(A_{m-1}B_m - A_m B_{m-1}) + A_{m-2}B_m - A_m B_{m-2} =$$

$$(-1)^m(\alpha_m - b_m) = (-1)^m\{\alpha_m\}. \tag{6.125}$$

Siten

$$\left|\alpha - \frac{A_m}{B_m}\right| = \left|\frac{\tilde{A}_m}{\tilde{B}_m} - \frac{A_m}{B_m}\right| =$$

$$\frac{\{\alpha_m\}}{\tilde{B}_m B_m} \underset{m\to\infty}{\to} 0. \quad \square \tag{6.126}$$

Lause 27

Olkoot $b_0, c_0 \in \mathbb{N}, b_1, c_1, b_2, c_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ *ja*

$$[b_0; b_1, ...] = [c_0; c_1, ...], \tag{6.127}$$

tällöin

$$b_k = c_k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{6.128}$$

Siten irrationaaliluvun yksinkertainen ketjumurtokehitelmä on yksikäsitteinen.

Huomautus 8

Tarkastellaan ääretöntä yksinkertaista ketjumurtolukua

$$[1, 1, 1, ...] = [b_0, b_1, ...], \tag{6.129}$$

jonka konvergenttijonolle pätee

$$[b_0, b_1, ..., b_m] = \frac{A_m}{B_m} = \frac{F_{m+2}}{F_{m+1}}, \tag{6.130}$$

sillä rekursiot

$$A_k = A_{k-1} + A_{k-2}, \quad B_k = B_{k-1} + B_{k-2} \quad \forall k = 2, 3, ..., \tag{6.131}$$

antavat Fibonaccin jonoja. Koska nämä rekursiot osataan ratkaista Lukuteorian perusteet/LINK eli

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \tag{6.132}$$

niin raja-arvokin

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A_m}{B_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{F_{m+2}}{F_{m+1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{6.133}$$

saadaan kivuttomasti. Niinpä

$$[1,1,1,...] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{6.134}$$

Yleensä, kuitenkin, rekursioitten ratkaiseminen on vaikeampaa, jolloin voidaan soveltaa esimerkiksi seuraavaa menettelyä.
Lauseen 23 nojalla ketjumurtoluvun (6.129) arvo $\exists$, olkoon se τ. Tällöin

$$\tau = [1, 1, 1, ...] = [1, \tau], \quad \tau \in \mathbb{R}_{>1}, \tag{6.135}$$

joten

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{6.136}$$