802655S KETJUMURTOLUVUT,

CONTINUED FRACTIONS

Tapani Matala-aho

MATEMATIIKKA/LUTK/OULUN YLIOPISTO

KEVÄT 2017

Sisältö

1 ABSTRACT

KETJUMURTOLUVUT, CONTINUED FRACTIONS, NEWERENDING FRACTIONS, KETTENBRÜCHEN

Ketjumurtolukujen teoria on kiinteä osa matematiikan lukuteoriaa.

2 INTRODUCTION/JOHDANTO

2.1 ESITYKSIÄ SEKÄ TYÖKALUJA

Luennoilla tarkastelemme aluksi reaalilukujen b-kantaesityksiä ja yksinkertaisia ketjumurtoesityksiä sekä esityksien ominaisuuksia-päättyvä, päättymätön, irrationaalisuus, jaksollisuus, approksimaatio-ominaisuudet.

Seuraavaksi tutkitaan yleisiin ketjumurtolukuihin liittyviä rekursiota ja transformaatioita sekä suppenemis- ja irrationaalisuusehtoja.

Edelleen tarkastellaan hypergeometristen sarjojen ketjumurtokehitelmiä, joista saadaan tuttujen lukujen kuten Neperin luvun ja piin ketjumurtokehitelmiä.

Tutkimus suunnataan myös yleisempiin irrationaalisuuskysymyksiin ja Diofantoksen yhtälöihin.

802655S KETJUMURTOLUVUT/NOPPA LINK.

802655S CONTINUED FRACTIONS/NOPPA LINK.

2.2 BASICS AND REFERENCES/POHJATIEDOT JA LÄHTEITÄ

Esitiedot:

Pakolliset aineopinnot ja Lukuteorian perusteet.

Kurssilla käytetään Lukuteorian perusteet kurssin merkintöjä.

Notations and basics of Number Theory from the course: Basics of Number Theory.

2.3 LÄHTEITÄ:

Lisa Lorentzen and Haakon Waadeland: Continued Fractions with Applications (1992).
Oskar Perron: Die Lehre von den Kettenbruchen (1913).
G.H. Hardy & E.M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers.
Kenneth H. Rosen: Elementary number theory and its applications.
Number Theory Web/LINK
American Mathematical Monthly/LINK

3 Jakoalgoritmi

Algebran perusteet:

Lause 1. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $b \neq 0$. Tällöin

$$\exists! \quad q \in \mathbb{Z} \quad \text{ja} \quad \exists! \quad r \in \mathbb{N}:$$

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r \leq |b| - 1. \tag{3.1}$$

Kun $b \in \mathbb{Z}^+$, niin

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor. \tag{3.2}$$

4 KOKONAISLUVUN KANTAKEHITELMÄT

4.1 Kokonaisluvun b-kantakehitelmä

b-base expansion of an integer:

Lause 2. Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $a \in \mathbb{N}$. Tällöin $\exists!$ esitys

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n b^n, \quad 0 \leq a_n \leq b - 1, \quad a_n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Esitystä/representation (4.1) sanotaan kokonaisluvun b-kantakehitelmäksi.

Merkintä 1.

$$a_m ... a_0 = (a_m ... a_0)_b = a_m b^m + ... + a_1 b + a_0. \tag{4.2}$$

4.2 Kokonaisluvun Cantorin kehitelmä

Cantor expansion of an integer:

Lause 3. Olkoot $\{b_1, b_2, ...\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $a \in \mathbb{N}$ annettu. Tällöin $\exists!$ esitys

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n \prod_{i=1}^{n} b_i, \quad 0 \leq a_n \leq b_{n+1} - 1, \quad a_n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Seurauksena saadaan Cantorin kehitelmä

Lause 4. Olkoon $a \in \mathbb{N}$. Tällöin $\exists!$ Cantorin esitys

$$a = \sum_{n \geq 1} a_n n!, \quad 0 \leq a_n \leq n, \quad a_n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Lauseen 3 todistus.

Jakoalgoritmia toistamalla/by repeating the division algorithm

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 b_1 + a_0, & 0 \le a_0 \le b_1 - 1;\\
q_1 &= q_2 b_2 + a_1, & 0 \le a_1 \le b_2 - 1;\\
q_2 &= q_3 b_3 + a_2, & 0 \le a_2 \le b_3 - 1;\\
&\dots & ;\\
q_{s-1} &= q_s b_s + a_{s-1}, & 0 \le a_{s-1} \le b_s - 1;\\
q_s &= 0 \cdot b_{s+1} + a_s, & 0 \le a_s \le b_{s+1} - 1.
\end{aligned}
$$

Osoitetaan myöhemmin, että tällainen s on olemassa.

Siten

$$
\begin{aligned}
a =&(q_2 b_2 + a_1) b_1 + a_0\\
=&q_2 b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0\\
=&(q_3 b_3 + a_2) b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0\\
=&q_3 b_3 b_2 b_1 + a_2 b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0\\
=&\dots\\
=&a_s b_s \cdots b_2 b_1 + ... + a_2 b_2 b_1 + a_1 b_1 + a_0.
\end{aligned}
$$

Sopimuksen mukaan $\prod_{i=1}^{0} b_i = 1$ (tyhjä tulo$= 1$), joten saadaan esitys (4.3).

Näytetään vielä, että on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}$, että $q_{s+1} = 0$.

Meillä oli $b_k \ge 2$ kaikilla k. Siten

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 b_1 + a_0 \ge 2q_1;\\
q_1 &= q_2 b_2 + a_1 \ge 2q_2;\\
q_2 &= q_3 b_3 + a_2 \ge 2q_3;\\
&\dots;\\
q_{k-1} &= q_k b_k + a_{k-1} \ge 2q_k,
\end{aligned}
$$

josta saadaan

$$q_k \leq \frac{a}{2^k}. \tag{4.5}$$

Yksikäsitteisyyden todistus sivuutetaan. $\square$

Esimerkki 1. Olkoot $b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 2$ ja $a = 11$. Laskemalla saadaan, että

$$11 = 1 \cdot (2 \cdot 3) + 1 \cdot 3 + 2 = 0 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 3) + 1 \cdot 3 + 2 \tag{4.6}$$

on luvun 11 Cantorin kehitelmä kannassa $\{3, 2, 3, 2\}$

4.2.1 Peräkkäisten lukujen digitit/Digits of consecutive integers

Palataan vielä Cantorin lauseen 3 tarkasteluun. Olkoot $\{b_1, b_2, ...\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ annettu. Tutkitaan tilannetta

$$\begin{gathered} a = a_0 + a_1 b_1 + a_2 b_1 b_2 + ... + a_h b_1 \cdots b_h + ..., \\ a_0 = b_1 - 1, ..., a_{h-1} = b_h - 1,\ a_h \leq b_{h+1} - 2, \end{gathered} \tag{4.7}$$

missä digitit $a_0, ..., a_{h-1}$ ovat maksimissaan. Lasketaan

$$\begin{aligned} a + 1 &= 1 + (b_1 - 1) + (b_2 - 1)b_1 + ... + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_1 + (b_2 - 1)b_1 + (b_3 - 1)b_1 b_2 + ... + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_2 b_1 + (b_3 - 1)b_1 b_2 + ... + (b_h - 1)b_1 \cdots b_{h-1} + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_3 b_1 b_2 + ... + (b_h - 1)b_1 \cdots b_{h-1} + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= b_h b_1 \cdots b_{h-1} + a_h b_1 \cdots b_h + ... \\ &= (a_h + 1)b_1 \cdots b_h + ... \leq (b_{h+1} - 1)b_1 \cdots b_h + ... \end{aligned} \tag{4.8}$$

Siten ylivuoto pysähtyy ensimmäiseen vajaaseen digittiboksiin./Overflow will stop to the first non-full digit box.

Koska

$$\#\{a_0, a_1, ..., a_h\} = b_1 \cdots b_{h+1}, \tag{4.9}$$

niin peräkkäiset kokonaisluvut/consecutive integers $0, 1, ..., b_1 \cdots b_{h+1} - 1$ ovat esitettävissä muodossa/ can be prepresented in the form

$$a_0 + a_1 b_1 + a_2 b_1 b_2 + ... + a_h b_1 \cdots b_h, \quad 0 \le a_i \le b_{i+1} - 1. \tag{4.10}$$

Seurauksena saadaan

$$\begin{aligned} 1 + (b_1 - 1) + (b_2 - 1)b_1 + ... + (b_h - 1)b_1 \cdots b_{h-1} \\ + (b_{h+1} - 1)b_1 \cdots b_h = b_1 \cdots b_h b_{h+1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

eli

$$(b_1 - 1) + (b_2 - 1)b_1 + ... + (b_{h+1} - 1)b_1 \cdots b_h = b_1 \cdots b_h b_{h+1} - 1, \tag{4.12}$$

mikä on voimassa myös arvolla/valid also with the value $b_1 = 1$. Niinpä esimerkiksi

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + h \cdot h! = (h + 1)! - 1. \tag{4.13}$$

5 REAALILUVUN KANTAKEHITELMÄT

5.1 Reaaliluvun b-kantakehitelmä/base b-expansion of a real number

Lause 5. Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$ ja $x \in \mathbb{R}$, $0 \le x < 1$. Tällöin $\exists$ esitys/representation

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}, \quad 0 \le x_n \le b - 1, \quad x_n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

joka on yksikäsitteinen mikäli vaaditaan, että jokaista $N \in \mathbb{Z}^+$ kohti $\exists$ sellainen luku $k \in \mathbb{Z}_{\ge N}$ että $x_k \ne b - 1$. It is unique, if we demand that for every $N \in \mathbb{Z}^+$ there $\exists$ such a number $k \in \mathbb{Z}_{\ge N}$ that $x_k \ne b - 1$.

Merkintä 2.

$$0,x_1x_2... = (0,x_1x_2...)_b = x_1b^{-1} + x_2b^{-2} + ... \tag{5.2}$$

$$a_m...a_0,x_1x_2... = (a_m...a_0,x_1x_2...)_b = \tag{5.3}$$

$$a_mb^m + ... + a_1b^1 + a_0b^0 + x_1b^{-1} + x_2b^{-2} + ...$$

Todistus. Kaikilla $y \in \mathbb{R}$ pätee (katso Lukuteorian perusteet)

$$0 \leq y - \lfloor y \rfloor < 1. \tag{5.4}$$

Asetetaan $y_0 = x$ ja palautuskaavat/recurrences

$$x_{k+1} = \lfloor by_k \rfloor; \tag{5.5}$$

$$y_{k+1} = by_k - x_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Tällöin

$$x_1 = \lfloor by_0 \rfloor = \lfloor bx \rfloor \tag{5.7}$$

ja

$$0 \leq x_1 = \lfloor bx \rfloor \leq bx < b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_1 \leq b-1. \tag{5.8}$$

Edelleen

$$y_1 = by_0 - x_1 = bx - \lfloor bx \rfloor \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y_1 < 1 \tag{5.9}$$

ja

$$x = y_0 = \frac{x_1}{b} + \frac{y_1}{b}. \tag{5.10}$$

Vastaavasti

$$y_1 = \frac{x_2}{b} + \frac{y_2}{b}, \quad 0 \leq y_2 < 1, \tag{5.11}$$

ja siten

$$x = y_0 = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \frac{y_2}{b^2}. \tag{5.12}$$

Edelleen

$$x = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + ... + \frac{x_n}{b^n} + \frac{y_n}{b^n}, \tag{5.13}$$

missä

$$0 \leq x_i \leq b-1, \quad 0 \leq y_i < 1 \quad \forall i = 1, ..., n. \tag{5.14}$$

Olkoon

$$x = X_n + \frac{y_n}{b^n}, \tag{5.15}$$

missä

$$X_n = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + ... + \frac{x_n}{b^n} \tag{5.16}$$

on kasvava/increasing ja rajoitettu/bounded. Näytetään, että X_n on rajoitettu:

$$\begin{aligned} X_n \leq & \frac{b-1}{b} + \frac{b-1}{b^2} + ... + \frac{b-1}{b^n} + ... = \\ = & \frac{b-1}{b}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + ...\right) \\ = & \frac{b-1}{b}\frac{1}{1-1/b} = 1. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Siten

$$\lim X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n} \quad \exists. \tag{5.18}$$

Osoitetaan vielä, että

$$\lim X_n = x. \tag{5.19}$$

Tuloksen/By the result (5.13) nojalla

$$\begin{aligned} |x - X_n| &= \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + ... + \frac{x_n}{b^n} + \frac{y_n}{b^n} - \left(\frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + ... + \frac{x_n}{b^n}\right) \\ &= \frac{y_n}{b^n} \leq \frac{1}{b^n} \ \to \ 0. \quad \square \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.1.1 Reaaliluvun Cantorkehitelmä

Lauseen 5 yleistyksenä saadaan.

Lause 6. Olkoot $\{b_1, b_2, ...\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$. Tällöin $\exists$ esitys

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_1 \cdots b_n}, \quad 0 \leq c_n \leq b_n - 1, \quad c_n \in \mathbb{N}. \tag{5.21}$$

Lauseen 6 erikoistapauksena saadaan Cantor tyyppinen esitys.

Lause 7. Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$. Tällöin $\exists$ esitys

$$x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n!}, \quad 0 \leq d_n \leq n - 1, \quad d_n \in \mathbb{N}. \tag{5.22}$$

Esimerkki 2. Määrätään luvuille

$$e - 2, \quad 1/e \tag{5.23}$$

esitykset (5.22).

Käytetään eksponenttifunktion sarjakehitelmää/series expansion

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{5.24}$$

jolloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... \\ &= \frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} + ... \end{aligned} \tag{5.25}$$

5.1.2 Rationaaliluvun b-kantakehitelmä

Määritelmä 1.

Esitys

$$x = 0, x_1 x_2 ... \tag{5.26}$$

on päättyvä/finite/terminating, jos $\exists$ sellainen $M \in \mathbb{Z}^+$, että

$$x_k = 0, \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq M}. \tag{5.27}$$

Esitys (5.26) on jaksollinen/periodic, mikäli $\exists$ sellaiset $N \in \mathbb{N}$ ja $L \in \mathbb{Z}^+$, että

$$x_{n+L} = x_n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq N+1}, \tag{5.28}$$

missä L on jakso/period.

Tällöin käytetään merkintöjä

$$x = 0, x_1 x_2 ... = 0, x_1 ... x_N \overline{x_{N+1} ... x_{N+L}} =$$

$$0, x_1 ... x_N x_{N+1} ... x_{N+L} x_{N+1} ... x_{N+L} ..., \tag{5.29}$$

missä N on alkutermin pituus/lenght of the initial term. Jos $N = 0$ eli alkutermiä ei ole/no initial term, niin tällöin kehitelmä on puhtaasti jaksollinen/purely periodic.

Huomautus 1. Jos muuta ei sanota, niin jakso ja alkutermi valitaan mahdollisimman lyhyeksi. If nothing else is mentioned, then we choose period and initial terms as short as possible.
Käytetään myös termiä minimijakso/minimal period.

Huomautus 2. Reaaliluvun päättyvä esitys on jaksollinen eli

$$x = a, x_1 ... x_N = a, x_1 ... x_N 0 ... = a, x_1 ... x_N \overline{0} \tag{5.30}$$

ja rationaalinen eli

$$x = a, x_1 ... x_N \in \mathbb{Q}. \tag{5.31}$$

5.2 b-kantaesitys/Algoritmi

Palautuskaavat (5.5) ja (5.6) antavat algoritmin:

$$\begin{aligned} y_0 &= x; \\ x_{k+1} &= \lfloor by_k \rfloor; \\ y_{k+1} &= by_k - x_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ...; \end{aligned} \tag{5.32}$$

reaaliluvun b-kantaesityksen laskemiseen.

Esimerkki 3.

$$\frac{1}{7} = (0,001001...)_2 = (0,\overline{001})_2. \tag{5.33}$$

Nyt $b = 2$ ja $y_0 = x = 1/7$, jolloin

$$\begin{aligned} x_1 &= \lfloor by_0 \rfloor = \lfloor \frac{2}{7} \rfloor = 0; \\ y_1 &= by_0 - x_1 = \frac{2}{7} - 0 = \frac{2}{7}; \\ x_2 &= \lfloor by_1 \rfloor = \lfloor \frac{4}{7} \rfloor = 0; \\ y_2 &= by_1 - x_2 = \frac{4}{7} - 0 = \frac{4}{7}; \\ x_3 &= \lfloor by_2 \rfloor = \lfloor \frac{8}{7} \rfloor = 1; \\ y_3 &= by_2 - x_3 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7} = y_0; \\ x_4 &= x_1; \quad \dots \end{aligned} \tag{5.34}$$

Esimerkki 4. $b = 10$.

$$\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}, \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}, \quad \frac{6}{7} = 0,\overline{857142},$$

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}, \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}, \quad \frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$$

Huomautus 3. Huomaa, että rationaaliluku $x \in \mathbb{Q}$ voidaan esittää supistetussa muodossa

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad r \in \mathbb{Z}, \ s \in \mathbb{Z}^+. \tag{5.35}$$

5.3 Terminating expansion

Lause 8.

Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$.

A). Jos rationaaliluvulle $x \in \mathbb{Q}$, missä

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad s = \prod_{i=1}^{h} p_i^{v_i}, \quad p_i \in \mathbb{P}, \quad v_i \in \mathbb{Z}^+, \tag{5.36}$$

pätee ehto/holds a condition

$$\prod_{i=1}^{h} p_i \Bigg| b, \tag{5.37}$$

niin esitys (5.1) on päättyvä.

B). Jos reaaliluvun x esitys (5.1) on päättyvä, niin $x \in \mathbb{Q}$ ja sen supistetulle esitykselle

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad s = \prod_{i=1}^{h} p_i^{v_i}, \quad p_i \in \mathbb{P}, \quad v_i \in \mathbb{Z}^+, \tag{5.38}$$

pätee ehto

$$\prod_{i=1}^{h} p_i \Bigg| b. \tag{5.39}$$

Ehto/condition (5.37) lyhemmin/shortly

$$p|s \quad \Rightarrow \quad p|b, \quad p \in \mathbb{P}. \tag{5.40}$$

Todistus.

A. Ehdosta (5.37) seuraa, että

$$s|b^K, \quad K = \max\{v_1, ..., v_h\}. \tag{5.41}$$

Siten $b^K x = b^K \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}^+$, joten

$$b^K x = c_0 + c_1 b + ... + c_m b^m, \quad 0 \leq c_i \leq b - 1, \quad m < K. \tag{5.42}$$

Siispä

$$x = \frac{c_m}{b^{K-m}} + ... + \frac{c_0}{b^K}. \quad \square \tag{5.43}$$

B. Olkoon esitys päättyvä eli

$$x = \frac{x_1}{b} + ... + \frac{x_N}{b^N} = \frac{x_1 b^{N-1} + ... + x_N}{b^N} := \frac{r}{s}, \quad r \perp s. \tag{5.44}$$

Siten

$$b^N r = (x_1 b^{N-1} + ... + x_N)s, \quad r \perp s. \tag{5.45}$$

Olkoon $p_i|s$. Koska $r \perp s$, niin $p_i|b^N$, joten $p_i|b$ kaikilla s:n alkutekijöillä p_i. $\square$

Esimerkki 5. Olkoon $b = 5$ ja $x = 7/9$. Nyt $s = 3^2$, joten ehto (5.40) ei ole voimassa. Siten 5-kantainen kehitelmä luvulle 7/9 on päättymätön/infinite.

Esimerkki 6. Olkoon $b = 3$ ja $x = 7/9$. Nyt $s = 3^2$, joten ehto (5.40) on voimassa. Siten 3-kantainen kehitelmä luvulle 7/9 on päättyvä/finite. Algoritmilla (5.32) saadaankin:

$$\frac{7}{9} = (0,21)_3. \tag{5.46}$$

Nyt $y_0 = x = 7/9$, jolloin

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lfloor by_0 \rfloor = \lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2; \\
y_1 &= by_0 - x_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}; \\
x_2 &= \lfloor by_1 \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1; \\
y_2 &= by_1 - x_2 = 1 - 1 = 0; \\
x_3 &= \lfloor by_2 \rfloor = 0; \\
y_3 &= by_2 - x_3 = 0; \\
x_4 &= x_5 = ... = 0.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Määritelmä 2. Olkoot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $b \in \mathbb{Z}$ ja $b \perp n$. Luvun b kertaluku $\operatorname{ord}_n b$, on pienin luku $k \in \mathbb{Z}^+$, jolle pätee

$$b^k \equiv 1 \pmod{n}. \tag{5.48}$$

Olkoon $\bar{b} \in \mathbb{Z}_n^*$ ja

$$\langle \bar{b} \rangle = \{\bar{b}^k \mid k \in \mathbb{N}\} \tag{5.49}$$

alkion $\bar{b}$ generoima syklinen aliryhmä. Tällöin

$$\mathrm{ord}_n\ b = \#\langle \bar{b} \rangle. \tag{5.50}$$

Koska aliryhmän kertaluku jakaa ryhmän kertaluvun, niin

$$\mathrm{ord}_n\ b \,|\, \#\mathbb{Z}_n^* = \varphi(n)\ . \tag{5.51}$$

Tarkemmin kurssilla Lukuteoria A/LINK.

Esimerkki 7. $n = 7$, $b = 10$, $\overline{10} = \bar{3} \in \mathbb{Z}_7^*$.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ord}_7\ 10 | 6 = \varphi(7). \tag{5.52}$$

Lasketaan siis

$$\bar{3}^1 = \bar{3}, \bar{3}^2 = \bar{2}, \bar{3}^3 = \bar{6}, \tag{5.53}$$

joten

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ord}_7\ 10 \geq 4 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ord}_7\ 10 = 6. \tag{5.54}$$

5.4 Periodic expansion

Kerrataan vielä, että reaaliluvun päättyvä esitys on jaksollinen eli

$$x = a, x_1 ... x_N = a, x_1 ... x_N 0 ... = a, x_1 ... x_N \bar{0}$$

ja päättyvä esitys on rationaalinen eli

$$x = a, x_1 ... x_N \in \mathbb{Q}.$$

Erityisesti

$$0 = 0,00... = 0, \bar{0} = \frac{0}{1}.$$

Lause 9.

Olkoot $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ja $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 1$.

A). Jaksollinen esitys on rationaalinen eli

$$x = 0, x_1 ... x_N \overline{x_{N+1} ... x_{N+L}} = \frac{r}{s}, \quad r \perp s. \tag{5.55}$$

B). Rationaaliluvun $x = r/s$ esitys on jaksollinen eli

$$\frac{r}{s} = 0, x_1 ... x_N \overline{x_{N+1} ... x_{N+L}}. \tag{5.56}$$

C). Olkoot

$$x = \frac{r}{s}, \quad r \perp s, \quad s = TU, \quad U \perp b; \tag{5.57}$$

$$p|T \quad \Rightarrow \quad p|b, \quad p \in \mathbb{P}; \tag{5.58}$$

$$ord_U \ b = L; \tag{5.59}$$

ja luku $N \in \mathbb{N}$ on pienin/smallest, jolle pätee/for which holds

$$T|b^N. \tag{5.60}$$

Tällöin jakson pituus on L ja alkutermin pituus N.

Huom: Jos $T = 1$, niin $N = 0$, jolloin alkutermiä ei ole ja kehitelmä on puhtaasti jaksollinen.

Todistus.

A. Tutkitaan ensin puhtaasti jaksollista kehitelmää/first we study a purely periodic expansion

$$\begin{aligned}z = 0,\overline{z_1...z_L} = \frac{z_1}{b} + ... + \frac{z_L}{b^L} + \\ \frac{1}{b^L}\left(\frac{z_1}{b} + ... + \frac{z_L}{b^L} + \frac{z_1}{b^{L+1}} + ... + \frac{z_L}{b^{2L}} + ...\right) \\ = \frac{d}{b^L} + \frac{1}{b^L}z,\end{aligned} \tag{5.61}$$

mistä saadaan

$$z = \frac{d}{b^L - 1}. \tag{5.62}$$

Siispä

$$\begin{aligned}x = 0,x_1...x_N\overline{x_{N+1}...x_{N+L}} = \frac{x_1}{b} + ... + \frac{x_N}{b^N} + \\ \frac{1}{b^N}\left(\frac{x_{N+1}}{b} + ... + \frac{x_{N+L}}{b^L} + \frac{x_{N+1}}{b^{L+1}} + ... + \frac{x_{N+L}}{b^{2L}} + ...\right) \\ = \frac{c}{b^N} + \frac{1}{b^N}\frac{d}{b^L - 1} := \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}.\end{aligned} \tag{5.63}$$

$B \subseteq C$.

Olkoon sitten $0 < x < 1$. Ehdon (5.60) nojalla

$$b^N = TV, \quad \text{jollakin} \quad V \in \mathbb{Z}^+. \tag{5.64}$$

Siten

$$b^N x = TV\frac{r}{TU} = \frac{rV}{U} = \frac{cU + d}{U}, \tag{5.65}$$

missä jakoalgoritmin nojalla

$$rV = cU + d, \quad 0 \leq d \leq U - 1, \quad c, d \in \mathbb{N}. \tag{5.66}$$

Oletuksista saadaan vielä $d \perp U$ ja $0 \leq c < b^N$, joten

$$b^N x = c + \frac{d}{U}, \quad d \perp U, \quad 0 \leq c < b^N. \tag{5.67}$$

a) Tapaus $U = 1$. Nyt $s = T$, jolloin ehdon (5.58) nojalla

$$p|s = T \quad \Rightarrow \quad p|b, \quad p \in \mathbb{P}. \tag{5.68}$$

Lauseen 8 kohdan A. nojalla esitys on päättyvä.

b) Tapaus $U \geq 2$. Oletuksen (5.59) nojalla

$$b^L \equiv 1 \pmod{U}, \tag{5.69}$$

joten on olemassa sellainen $a \in \mathbb{N}$, että saadaan eräänlainen palautuskaava

$$b^L \frac{d}{U} = \frac{(1 + aU)d}{U} = \frac{d}{U} + ad. \tag{5.70}$$

Olkoon

$$\frac{d}{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{b^n}, \quad 0 \leq d_n \leq b - 1, \quad d_n \in \mathbb{N}, \tag{5.71}$$

luvun d/U Lauseen 5 mukainen yksikäsitteinen kantakehitelmä. Sijoitetaan kehitelmä (5.71) kaavaan (5.70), jolloin saadaan

$$d_1 b^{L-1} + ... + d_L b^0 + d_{L+1} b^{-1} + d_{L+2} b^{-2} + d_{L+3} b^{-3} + ... = \tag{5.72}$$

$$ad + d_1 b^{-1} + d_2 b^{-2} + d_3 b^{-3} + ... \tag{5.73}$$

Vertaamalla vastinpotenssien kertoimia (kantakehitelmien yksikäsitteisyyden nojalla) saadaan

$$d_1 = d_{L+1}, \quad d_2 = d_{L+2}, \quad d_3 = d_{L+3}, ... \tag{5.74}$$

eli

$$d_{L+j} = d_j \quad \forall j = 1, 2, ..., \tag{5.75}$$

ja siten luvun d/U kantakehitelmä on puhtaasti jaksollinen.

Edelleen yhtälön (5.67) nojalla

$$x = \frac{c}{b^N} + \frac{1}{b^N} \frac{d}{U}, \tag{5.76}$$

missä

$$c = c_K b^K + ... + c_0, \quad K < N. \tag{5.77}$$

Niinpä

$$x = x_1 b^{-1} + ... + x_N b^{-N} +$$

$$d_1 b^{-(N+1)} + d_2 b^{-(N+2)} + ... + d_L b^{-(N+L)} +$$

$$d_1 b^{-(N+L+1)} + d_2 b^{-(N+L+2)} + ... + d_L b^{-(N+2L)} + ... =$$

$$0, x_1 ... x_N \overline{d_1 ... d_L}. \quad \square \tag{5.78}$$

Esimerkki 8. Olkoon $b = 10$. Tutkitaan lukuja $1/7$ ja $1/14$. Aluksi

$$\begin{gathered} x = \frac{1}{7}, \Rightarrow \; s = 7; U = 7 \quad \Rightarrow \quad ord_U b = ord_7 10 = 6 = L; \\ T = 1 \quad \Rightarrow \quad N = 0. \end{gathered} \tag{5.79}$$

Siten jakson pituus $= 6$ ja alkutermin pituus $= 0$ (Katso: Esimerkit 4 ja 7). Kun taas

$$\begin{gathered} x = \frac{1}{2 \cdot 7}, \quad \Rightarrow \quad s = 2 \cdot 7; U = 7 \quad \Rightarrow \quad L = 6; \\ T = 2 | b^N = 10^1, \quad \Rightarrow \quad N = 1. \end{gathered} \tag{5.80}$$

Siten jakson pituus $= 6$ ja alkutermin pituus $= 1$.

6 Irrationaaliluvuista

Määritelmä 3. Luku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ on irrationaalinen.

(Myös ei-rationaaliset p-adiset ($p \in \mathbb{P}$) luvut ovat irrationaalisia eli luku $\alpha \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}$ on irrationaalinen, missä $\mathbb{C}_p$ on kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$ vastaava p-adisten lukujen kunta.)

Monesti tyydytään suppeampaan määritelmään:

Luku $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on irrationaalinen.

Esimerkki 9.

$$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}, \quad i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}. \tag{6.1}$$

Todistus kurssilla Lukuteorian perusteet.

Määritelmä 4. Luku $m \in \mathbb{Z}$ on neliövapaa (square-free), jos ehdosta $a^2 | m$, $a \in \mathbb{Z}$, välttämättä seuraa $a^2 = 1$.

Tulos (6.1) yleistyy tulokseksi:

Lause 10. Olkoon $D \in \mathbb{Z}$, $D \neq 1$, neliövapaa. Tällöin

$$\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}. \tag{6.2}$$

Lause 11. Olkoot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ ja $r \in \mathbb{Q}^+$. Tällöin

$$\sqrt[n]{1 + r^n} \notin \mathbb{Q}. \tag{6.3}$$

Lauseen 11 todistus palautuu Fermat'n suureen lauseeseen:

Jos $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, niin

$$x^p + y^p \neq z^p \quad \forall \quad x, y, z \in \mathbb{Z}^+. \tag{6.4}$$

Andre Wiles todisti Fermat'n suuren lauseen työssään [Annals of Mathematics 141 (1994)]. Wilesin todistus perustuu mm. elliptisten käyrien ominaisuuksiin.

Tälläkin kurssilla $\log = \log_e = \ln$ eli log tarkoittaa e-kantaista logaritmia, jolloin

$$\log e = 1. \tag{6.5}$$

Esimerkki 10.

$$\frac{\log 2}{\log 3} \notin \mathbb{Q}. \tag{6.6}$$

Todistus. Jos olisi

$$\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}^+, \tag{6.7}$$

niin

$$2^b = 3^a \quad \Rightarrow \quad 2|3^a \quad \Rightarrow \quad 2|3 \tag{6.8}$$

mikä on mahdotonta. □

Seuraus 1.

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \notin \mathbb{Q}. \tag{6.9}$$

Mutta on huomattavasti vaikeampi todistaa, että

Esimerkki 11.

$$\log 2 \notin \mathbb{Q}. \tag{6.10}$$

Todistetaan myöhemmin ketjumurtolukujen avulla yleisempi tulos, josta seuraa esimerkiksi

$$\log m \notin \mathbb{Q}, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}. \tag{6.11}$$

6.1 An irrationality criterion

Lauseeseen 9 nojautuen saadaan hyödyllinen irrationaalisuuskriteeri, jos luvulle τ tunnetaan jokin b-kantakehitelmä.

Lause 12. Jos luvun τ kantakehitelmä on jaksoton eli

$$\tau \neq (a, \tau_1 ... \tau_N \overline{\tau_{N+1} ... \tau_{N+L}})_b, \tag{6.12}$$

niin $\tau \notin \mathbb{Q}$.

Esimerkki 12. Osoita, että

$$\tau = 0,101001000100001... \notin \mathbb{Q}. \tag{6.13}$$

Ratkaisu. Aluksi haetaan bittijonon sääntö jakamalla jono paloihin

$$1 \quad 01 \quad 001 \quad 0001 \quad 00001 \ ..., \tag{6.14}$$

jolloin havaitaan, että k. palan $00\ldots01$ pituus on k ja siinä esiintyy $k-1$ nollaa, jokaisella $k = 1, 2, ...$ (Nollat muodostavat aukon, jonka pituus kasvaa aina yhdellä.)
Siten

$$\tau = 0, \tau_1\tau_2\tau_3\ldots, \quad \tau_n = \begin{cases} 1, & n = n_k = \frac{k(k+1)}{2}; \\ 0, & n \neq n_k = \frac{k(k+1)}{2}. \end{cases} \tag{6.15}$$

Tehdään nyt vastaoletus: $\tau \in \mathbb{Q}$. Tällöin τ:n kehitelmä on jaksollinen eli

$$\tau = 0, \tau_1...\tau_N\overline{\tau_{N+1}...\tau_{N+L}}, \quad N \geq 0, \quad L \geq 1. \tag{6.16}$$

Valitaan sitten tarpeeksi suuri k, että

$$n_k > N \quad \text{ja} \quad k \geq L, \tag{6.17}$$

jolloin ensimmäinen ehto varmistaa, että päästään pois alkutermiltä. Toisen ehdon nojalla saadaan aukko, jonka pituus on suurempi kuin jakson pituus - todistetaan tämä. Ykkösten välissä nollien muodostama aukko:

$$\begin{matrix} \tau_{n_k} & \ldots & \tau_{n_{k+1}} \\ 1 & 00\ldots0 & 1 \end{matrix}$$

Toisaalta jaksollisuuden nojalla

$$\tau_{n_k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_k+L} = 1. \tag{6.18}$$

Mutta

$$n_k + L \leq n_k + k < n_{k+1}. \quad \text{Ristiriita.} \quad \square \tag{6.19}$$

Vastaavasti voidaan todistaa seuraavat tulokset:

Esimerkki 13. Olkoon $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Osoita, että tällöin

$$\tau_b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{\binom{n+1}{2}}} \notin \mathbb{Q}. \tag{6.20}$$

Esimerkki 14. Champernowne constant/LINK

$$C_{10} = 0,123456789\ 10\ 11\ 12\ 13... \notin \mathbb{Q}. \tag{6.21}$$

Esimerkki 15.

Muodostetaan sanoja seuraavasti käyttäen kuvausta

$$\sigma(a) = ab, \quad \sigma(b) = a, \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y). \tag{6.22}$$

Lähtemällä sanasta b saadaan

$$\sigma(b) = a,$$

$$\sigma^2(b) = \sigma(a) = ab,$$

$$\sigma^3(b) = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = aba,$$

$$\sigma^4(b) = \sigma(aba) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a) = abaab,$$

$$\sigma^5(b) = \sigma(abaab) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)\sigma(a)\sigma(b) = abaababa,$$

$$...$$

$$\sigma^\infty(b) = abaababaabaab...$$

Tulkitaan kirjaimet biteiksi: $a = 1$, $b = 0$, ja muodostetaan binääriluku

$$\kappa = 0,10110101....(= 0, abaababa...). \tag{6.23}$$

Osoita, että $\kappa \notin \mathbb{Q}$.

Tiedetään, että Neperin luvulle e pätee

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{6.24}$$

Lause 13. Neperin luku e on irrationaalinen.

Todistus kurssilla Lukuteorian perusteet.

Lause 14. Neperin luku e on transkendenttinen eli ehdosta

$$a_m e^m + a_{m-1} e^{m-1} + ... + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_0, ..., a_m \in \mathbb{Z}, \tag{6.25}$$

seuraa $a_0 = ... = a_m = 0$ aina, kun $m \in \mathbb{Z}^+$.

Siten e ei toteuta kokonaislukukertoimista polynomiyhtälöä, jonka aste ≥ 1.

Todistetaan lievempi tulos

Lause 15. Neperin luku e ei ole toisen asteen algebrallinen luku eli

$$ae^2 + be + c \neq 0, \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad ac \neq 0. \tag{6.26}$$

Todistus: Tehdään vastaoletus eli on olemassa sellaiset

$a, b, c \in \mathbb{Z}$, että

$$ae^2 + be + c = 0, \quad ac \neq 0. \tag{6.27}$$

Ehto (6.27) on yhtäpitävää ehdon

$$ae + b + ce^{-1} = 0, \quad ac \neq 0, \tag{6.28}$$

kanssa. Käyttämällä sarjaesityksiä, saadaan

$$a\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\right) + b + c\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = \\ -a\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) - c\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right), \tag{6.29}$$

josta edelleen

$$A = A_m := am!\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\right) + bm! + cm!\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\ = -am!\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) - cm!\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right). \tag{6.30}$$

Aluksi huomataan, että $A_m \in \mathbb{Z}$ ja

$$|A_m| \leq |a|m! \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) + |c|m! \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) \leq$$
$$\frac{|a| + |c|}{m+1} \left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + ... \right) \leq \frac{7}{9}, \quad (6.31)$$

jos valitaan $m \geq 5$ ja $m + 1 \geq 3(|a| + |c|)$. Jos olisi

$$A_m = A_{m+1} = A_{m+2} = 0, \quad (6.32)$$

niin

$$\begin{cases} a \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \right) + b + c \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = 0; \\ a \left(\sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{k!} \right) + b + c \left(\sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = 0; \\ a \left(\sum_{k=0}^{m+2} \frac{1}{k!} \right) + b + c \left(\sum_{k=0}^{m+2} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Vähentämällä 1. yhtälö 2:sta ja vastaavasti 2. yhtälö 3:sta, saadaan

$$\begin{cases} a \frac{1}{(m+1)!} + c \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} = 0; \\ a \frac{1}{(m+2)!} + c \frac{(-1)^{m+2}}{(m+2)!} = 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

Siten saataisiin $a = c = 0$. Ristiriita hypoteesin (6.32) kanssa. Siispä $A_h \neq 0$, jollakin $m \leq h \leq m + 2$. Tällöin

$$A_h \in \mathbb{Z}, \quad 0 < |A_h| < 1. \quad (6.35)$$

Ristiriita vastaoletuksen (6.27) kanssa. $\square$

7 Ketjumurtoluvut/Continued fractions

7.1 Äärellinen ketjumurtoluku

Äärellisellä ketjumurtoluvulla/finite continued fraction tarkoitetaan rationaalilauseketta

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}, \tag{7.1}$$

jolle käytetään seuraavia merkintöjä/for which the following notations are used

$$\mathbb{K}_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{a_1}{b_1 +}\frac{a_2}{b_2 +}\dots\frac{a_n}{+ b_n}. \tag{7.2}$$

Luvut a_n ovat ketjumurtoluvun osaosoittajia/partial numerators ja luvut b_n osanimittäjiä/partial numerators.

7.2 Rekursiot

Lause 16. Olkoot luvut A_n ja B_n annettu rekursioilla

$$A_{n+2} = b_{n+2}A_{n+1} + a_{n+2}A_n, \tag{7.3}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2}B_{n+1} + a_{n+2}B_n \tag{7.4}$$

lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_1 = b_0 b_1 + a_1$ ja $B_1 = b_1$. Tällöin

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{A_n}{B_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \tag{7.5}$$

kunhan $B_n \neq 0$.

Todistus. Induktiolla.

$n = 0$, jolloin

$$V.P. = b_0 = \frac{b_0}{1} = \frac{A_0}{B_0} = O.P.. \tag{7.6}$$

$n=1$, jolloin

$$V.P. = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1} = O.P.. \tag{7.7}$$

Induktio-oletus: Väite pätee, kun $n = 0, 1, ..., l$, jolloin

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_l}{+ b_l} = \frac{A_l}{B_l} = \frac{b_l A_{l-1} + a_l A_{l-2}}{b_l B_{l-1} + a_l B_{l-2}}. \tag{7.8}$$

Korvataan b_l muuttujalla x ja merkitään

$$K(x) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \cdots \frac{a_l}{+ x}, \tag{7.9}$$

jolle kohdan (7.8) nojalla pätee

$$K(x) = \frac{x A_{l-1} + a_l A_{l-2}}{x B_{l-1} + a_l B_{l-2}}, \tag{7.10}$$

kunhan $x \neq 0$ ja nimittäjä $\neq 0$. Siten kohdista (7.9) ja (7.10) seuraa

$$K(b_l + \frac{a_{l+1}}{b_{l+1}}) = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{l+1} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) =$$

$$\frac{\left(b_l + \frac{a_{l+1}}{b_{l+1}}\right) A_{l-1} + a_l A_{l-2}}{\left(b_l + \frac{a_{l+1}}{b_{l+1}}\right) B_{l-1} + a_l B_{l-2}} =$$

$$\frac{\frac{a_{l+1}}{b_{l+1}} A_{l-1} + b_l A_{l-1} + a_l A_{l-2}}{\frac{a_{l+1}}{b_{l+1}} B_{l-1} + b_l B_{l-1} + a_l B_{l-2}} =$$

$$\frac{a_{l+1} A_{l-1} + b_{l+1} A_l}{a_{l+1} B_{l-1} + b_{l+1} B_l} = \frac{A_{l+1}}{B_{l+1}}, \tag{7.11}$$

missä on sovellettu rekursioita (7.3) ja (7.4) pariin otteeseen. Siten induktioaskel on osoitettu ja induktioperiaatteen nojalla väite pätee. $\square$

7.2.1 Konvergentit/convergents

Määritelmä 5. Luku A_n/B_n on äärettömän ketjumurtoluvun

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \tag{7.12}$$

n. konvergentti. Edelleen ketjumurtoluku (7.12) suppenee, mikäli raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} \tag{7.13}$$

on olemassa. Tällöin sanotaan, että äärettömän ketjumurtoluvun (7.12) arvo on raja-arvo (7.13).

7.3 Ääretön ketjumurtoluku/Infinite continued fraction

Ääretöntä ketjumurtolukua (7.12) voidaan merkitä myös seuraavilla tavoilla

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\frac{a_2}{b_2 +}... = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + ...}}. \tag{7.14}$$

Edelleen käytetään merkintöjä

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}\right); \tag{7.15}$$

$$[b_0; b_1, ...] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_k}\right). \tag{7.16}$$

7.4 Yksinkertainen ketjumurtoluku

Usein tarkastellaan yksinkertaisia ketjumurtolukuja.

Määritelmä 6. Olkoot

$$b_0 \in \mathbb{N}, \quad b_k \in \mathbb{Z}^+, \quad a_k = 1, \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{7.17}$$

Tällöin ketjumurtoluku

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b_k} \right) \tag{7.18}$$

on äärellinen yksinkertainen (simple) ketjumurtoluku ja vastaavasti

$$[b_0; b_1, ...] = b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k} \right) \tag{7.19}$$

on ääretön yksinkertainen ketjumurtoluku.

8 Yksinkertaiset ketjumurtoluvut

8.1 Ketjumurtoalgoritmi

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ annettu. Muodostetaan lukuun α liittyvä yksinkertainen ketjumurtolukukehitelmä

$$[b_0; b_1, ...]_\alpha \tag{8.1}$$

seuraavalla Ketjumurtoalgoritmilla:

$$\alpha_0 = \alpha; \quad k = 0; \tag{8.2}$$

$$\alpha_k = \lfloor \alpha_k \rfloor + \{\alpha_k\}, \quad 0 \leq \{\alpha_k\} < 1; \tag{8.3}$$

$$b_k = \lfloor \alpha_k \rfloor; \tag{8.4}$$

Jos

$$\{\alpha_k\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{STOP}; \tag{8.5}$$

Jos

$$\{\alpha_k\} > 0 \quad \Rightarrow; \tag{8.6}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\{\alpha_k\}} \quad \Rightarrow \quad \text{GO TO} \quad 8.3 \quad \text{with } k = k + 1; \tag{8.7}$$

Siten algoritmi alkaa seuraavasti:

$$\alpha_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\}, \quad 0 \le \{\alpha_0\} < 1; \tag{8.8}$$

$$b_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor; \tag{8.9}$$

Jos

$$\{\alpha_0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{STOP}; \tag{8.10}$$

Jos

$$\{\alpha_0\} > 0 \quad \Rightarrow; \tag{8.11}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\}, \quad 0 \le \{\alpha_1\} < 1; \tag{8.12}$$

$$b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor; ... \tag{8.13}$$

Huomautus 4. Hyödyllisiä identiteettejä:

$$[b_0; b_1, ..., b_m] = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, ..., b_m]}; \tag{8.14}$$

$$\alpha_k = b_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}; \tag{8.15}$$

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, b_m + \{\alpha_m\}] = [b_0; b_1, ..., b_m, \alpha_{m+1}]. \tag{8.16}$$

Esimerkki 16.

Olkoon $\alpha = 3,14$.

$$\alpha_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\} = 3 + 14/100; \tag{8.17}$$

$$b_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 3; \tag{8.18}$$

$$\{\alpha_0\} = 14/100 > 0 \quad \Rightarrow \tag{8.19}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\} = 7 + 1/7; \tag{8.20}$$

$$b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 7; \tag{8.21}$$

$$\{\alpha_1\} = 1/7 > 0 \quad \Rightarrow \tag{8.22}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \lfloor \alpha_2 \rfloor + \{\alpha_2\} = 7 + 0; \tag{8.23}$$

$$b_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 7; \tag{8.24}$$

$$\{\alpha_2\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{STOP}; \tag{8.25}$$

ja siten

$$[b_0; b_1, ...]_{3,14} = [3; 7, 7]. \tag{8.26}$$

Huomautus 5. Tärkeä. Numeerisessa laskennassa desimaaliluvut katkaistaan, jolloin katkaistu esitys kannattaa heti kirjoittaa murtoluvuksi. Tällöin algoritmissa vältytään pyöristysvirheiltä.

Esimerkki 17.

Olkoon $\alpha = \sqrt{5}$.

$$\alpha_0 = 2 + \sqrt{5} - 2 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\}; \tag{8.27}$$

$$b_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor = 2; \tag{8.28}$$

$$\{\alpha_0\} = \sqrt{5} - 2 > 0 \quad \Rightarrow \tag{8.29}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2 = 4 + \sqrt{5} - 2 = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\}; \tag{8.30}$$

$$b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 4; \tag{8.31}$$

$$\{\alpha_1\} = \sqrt{5} - 2 > 0 \quad \Rightarrow \tag{8.32}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2 = 4 + \sqrt{5} - 2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor + \{\alpha_2\}; \tag{8.33}$$

$$b_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 4; \tag{8.34}$$

$$\{\alpha_2\} = \sqrt{5} - 2 = \{\alpha_1\} > 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = b_2 = b_1 = 4 \tag{8.35}$$

ja edelleen $b_k = 4$ kaikilla $k \geq 1$. Niinpä

$$[b_0; b_1, ...]_{\sqrt{5}} = [2; 4, 4, 4, ...]. = [2; \overline{4}] \tag{8.36}$$

kehitelmä on jaksollinen.

8.2 Äärelliset yksinkertaiset ketjumurtoluvut/Finite simple continued fractions

Lause 17. Äärellisen yksinkertaisen ketjumurtoluvun arvo on rationaaliluku eli

$$[b_0; b_1, ..., b_m] \in \mathbb{Q} \quad \forall\ b_0 \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}^+. \tag{8.37}$$

Todistus induktiolla käyttäen kaavaa (8.14).

Lause 18. Positiivinen rationaaliluku $r/s \in \mathbb{Q}^+$ voidaan esittää äärellisenä yksinkertaisena ketjumurtolukuna eli $\exists$ sellaiset kokonaisluvut $b_0 \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., b_m]. \tag{8.38}$$

Lisäksi rationaaliluvulla on yksikäsitteinen muotoa

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., 1] \tag{8.39}$$

oleva esitys. Edelleen rationaaliluvun kaikki esitykset ovat äärellisiä.

Todistus. Eukleideen algoritmi Lukuteorian perusteet/LINK:

$$\begin{aligned}
&r_0 = r,\ r_1 = s \\
&r_0 = b_0 r_1 + r_2 && 0 \le r_2 < r_1 \\
&\vdots \\
&r_k = b_k r_{k+1} + r_{k+2} && 0 \le r_{k+2} < r_{k+1} \\
&\vdots \\
&r_{m-1} = b_{m-1} r_m + r_{m+1} && 0 \le r_{m+1} < r_m \\
&\exists\ m \in \mathbb{N}: \quad r_{m+1} \ne 0,\ r_{m+2} = 0 \\
&r_m = b_m r_{m+1} \\
&r_{m+1} = \mathrm{syt}(r, s).
\end{aligned}$$

Nyt $r/s = \alpha_0$ ja

$$\alpha_0 = \frac{r_0}{r_1} = b_0 + \frac{r_2}{r_1} = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\}, \tag{8.40}$$

$$0 \leq \{\alpha_0\} = \frac{r_2}{r_1} < 1; \tag{8.41}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{r_1}{r_2} = b_1 + \frac{r_3}{r_2} = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\}, \tag{8.42}$$

$$0 \leq \{\alpha_1\} = \frac{r_3}{r_2} < 1; \tag{8.43}$$

...

$$\alpha_k = \frac{r_k}{r_{k+1}} = b_k + \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}}, \tag{8.44}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\{\alpha_k\}} = \frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}, \tag{8.45}$$

...

$$\alpha_{m-1} = \frac{r_{m-1}}{r_m} = b_{m-1} + \frac{r_{m+1}}{r_m}, \tag{8.46}$$

$$\alpha_m = \frac{1}{\{\alpha_{m-1}\}} = \frac{r_m}{r_{m+1}} = b_m + 0. \tag{8.47}$$

Siten

$$\{\alpha_m\} = 0 \tag{8.48}$$

ja

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., b_m]. \tag{8.49}$$

Koska $b_m \geq 2$ (totea!), niin

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, b_m] = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, b_m - 1, 1]. \tag{8.50}$$

Siten rationaaliluvulla on yksikäsitteinen muotoa

$$\frac{r}{s} = [b_0; b_1, ..., 1] \tag{8.51}$$

oleva esitys. Edelleen, Eukleideen algoritmin pituus on äärellinen, joten esitykset ovat äärellisiä. □

Lauseen 16 erikoistapauksena saadaan n. konvergentti laskettua seuraavien rekursioiden (8.52) ja (8.53) avulla.

Lause 19. Olkoot luvut A_n ja B_n annettu rekursioilla

$$A_{n+2} = b_{n+2}A_{n+1} + A_n, \tag{8.52}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2}B_{n+1} + B_n \tag{8.53}$$

lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_1 = b_0b_1 + 1$ ja $B_1 = b_1$. Tällöin

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = \frac{A_n}{B_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{8.54}$$

Lause 20. Olkoon (F_n) on Fibonaccin lukujono. Tällöin

$$B_n \geq F_{n+1} \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{8.55}$$

Lause 21. Determinanttikaavat.

$$A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} = (-1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{8.56}$$

$$A_{n+2}B_n - A_nB_{n+2} = b_{n+2}(-1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{8.57}$$

Todistus induktiolla käyttäen rekursioita (8.52) ja (8.53).

Seuraus 2.

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n}{B_nB_{n+1}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{8.58}$$

$$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{b_{n+2}(-1)^n}{B_nB_{n+2}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{8.59}$$

Seuraus 3.

$$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < ... < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \tag{8.60}$$

$$< \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} < ... < \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}. \tag{8.61}$$

kaikilla $k, h \in \mathbb{N}$.

Todistus. Tuloksen (8.59) nojalla

$$\frac{A_{2k+2}}{B_{2k+2}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{b_{2k+2}}{B_{2k}B_{2k+2}} > 0 \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \tag{8.62}$$

mikä todistaa epäyhtälöt (8.60).

Samaten tuloksen (8.59) nojalla

$$\frac{A_{2h+3}}{B_{2h+3}} - \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} = -\frac{b_{2h+1}}{B_{2h+1}B_{2h+3}} < 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{N} \tag{8.63}$$

mikä todistaa epäyhtälöt (8.61).

Tutkitaan vielä epäyhtälöketjujen (8.60) ja (8.61) välistä epäyhtälöä.

a) Tapaus $h \geq k$. Tällöin

$$\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2h}}{B_{2h}} + \frac{A_{2h}}{B_{2h}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{8.58}{=} \tag{8.64}$$

$$\frac{1}{B_{2h}B_{2h+1}} + \frac{A_{2h}}{B_{2h}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{8.60}{>} 0. \tag{8.65}$$

b) Tapaus $h < k$. Tällöin

$$\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{8.61}{>} \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \overset{8.58}{=} \frac{1}{B_{2k}B_{2k+1}} > 0. \tag{8.66}$$

Siten

$$\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} > 0 \quad \forall\ h, k \in \mathbb{N}. \quad \square \tag{8.67}$$

Lause 22.

$$A_n \perp A_{n+1}, \quad B_n \perp B_{n+1}, \tag{8.68}$$

$$A_n \perp B_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{8.69}$$

Huomautus 6. Tuloksen (8.69) nojalla konvergentit $\frac{A_n}{B_n}$ ovat supistetussa muodossa olevia rationaalilukuja.

8.3 Äärettömät yksinkertaiset ketjumurtoluvut

Lause 23. Olkoon

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = \frac{A_n}{B_n}, \qquad b_0 \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}^+, \tag{8.70}$$

äärettömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun $[b_0; b_1, ...]$ konvergenttijono. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \tau \qquad \exists, \quad \tau \in \mathbb{R}^+, \tag{8.71}$$

ja

$$0 < \left| \tau - \frac{A_m}{B_m} \right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{8.72}$$

Todistus. Tuloksien (8.60) ja (8.61) nojalla jono $(\frac{A_{2k}}{B_{2k}})$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Vastaavasti jono $(\frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}})$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Täten

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \alpha_2 \qquad \exists, \tag{8.73}$$

$$\lim_{h\to\infty} \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} = \alpha_1 \qquad \exists. \tag{8.74}$$

Yhtälöstä (8.55) ja (8.58)saadaan

$$0 < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{1}{B_{2k} B_{2k+1}} \leq \tag{8.75}$$

$$\frac{1}{F_{2k+1}F_{2k+2}} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{4k} \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{8.76}$$

Edelleen raja-arvona saadaan

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k}}{B_{2k}} \leq \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{4k}, \tag{8.77}$$

josta

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{8.78}$$

Siten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \alpha_1 = \alpha_2. \tag{8.79}$$

Merkitään vielä $\tau = \alpha_1 = \alpha_2$. Tällöin (Laskarit)

$$0 < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \tau < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}}, \tag{8.80}$$

mistä saadaan $\tau > 0$ ja edelleen

$$0 < \tau - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{1}{B_{2k}B_{2k+1}} \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{8.81}$$

Vastaavasti (osoita!)

$$0 < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \tau < \frac{1}{B_{2k+1}B_{2k+2}} \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{8.82}$$

Siispä

$$0 < \left|\tau - \frac{A_m}{B_m}\right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}} \qquad \forall\ m \in \mathbb{N}. \quad \square \tag{8.83}$$

Lause 24.

Olkoon

$$[b_0; b_1, ..., b_n] = \frac{A_n}{B_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{8.84}$$

äärettömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun $[b_0; b_1, ...] = \tau$ konvergenttijono. Tällöin

$$\tau = b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{B_n B_{n+1}} \tag{8.85}$$

ja

$$\frac{b_{m+2}}{B_m B_{m+2}} < \left|\tau - \frac{A_m}{B_m}\right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}} \quad \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{8.86}$$

Edelleen

$$\frac{1}{(b_{m+1}+2)B_m^2} < \left|\tau - \frac{A_m}{B_m}\right| < \frac{1}{b_{m+1}B_m^2} \leq \frac{1}{B_m^2} \tag{8.87}$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

Huomautus 7. Usein arvion (8.86) sijasta käytetään väljempää arviota (8.87).

Todistus. Summataan yhtälö (8.58) puolittain, jolloin

$$\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}\right) = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n}{B_n B_{n+1}} \tag{8.88}$$

ja siten

$$\frac{A_m}{B_m} = b_0 + \sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n}{B_n B_{n+1}}. \tag{8.89}$$

Raja-arvona saadaan (8.85). Edelleen

$$\tau - \frac{A_m}{B_m} = \sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{B_n B_{n+1}}, \tag{8.90}$$

missä alternoivan summan ominaisuuksilla saadaan

$$\frac{1}{B_m B_{m+1}} - \frac{1}{B_{m+1}B_{m+2}} < \left|\tau - \frac{A_m}{B_m}\right| < \frac{1}{B_m B_{m+1}}. \tag{8.91}$$

Vielä

$$\frac{1}{B_m B_{m+1}} - \frac{1}{B_{m+1}B_{m+2}} = \frac{B_{m+2} - B_m}{B_m B_{m+1} B_{m+2}} =$$

$$\frac{b_{m+2}}{B_m B_{m+2}}. \quad \square \tag{8.92}$$

Lause 25. Äärettömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun arvo τ on irrationaalinen eli $\forall\ b_0 \in \mathbb{N}, b_1, b_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ pätee

$$\tau = [b_0; b_1, ...] \notin \mathbb{Q}. \tag{8.93}$$

Todistus. Aluksi, Lauseen 23 nojalla $\tau \in \mathbb{R}^+$.

I tapa. Lauseen 18 nojalla rationaaliluvun esitys on päättyvä, joten päättymättömän arvo ei voi olla rationaalinen.

II tapa. Vastaoletus

$$[b_0; b_1, ...] = \tau = r/s \in \mathbb{Q}^+, \quad r, s \in \mathbb{Z}^+. \tag{8.94}$$

Tuloksen (8.81) nojalla

$$0 < \frac{r}{s} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \frac{1}{B_{2k}B_{2k+1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+ \tag{8.95}$$

Täten

$$0 < rB_{2k} - sA_{2k} \leq \frac{s}{B_{2k+1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{8.96}$$

Koska

$$rB_{2k} - sA_{2k} \in \mathbb{Z}^+, \tag{8.97}$$

niin

$$1 \leq rB_{2k} - sA_{2k} \leq \frac{s}{B_{2k+1}} \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{8.98}$$

Tuloksen (8.55) nojalla on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}^+$, että

$$\frac{s}{B_{2k+1}} < 1, \tag{8.99}$$

joka johtaa ristiriitaan. □

Lause 26. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \alpha > 0$ annettu ja olkoon

$$[b_0; b_1, ...]_\alpha \tag{8.100}$$

Ketjumurtoalgoritmilla muodostettu lukuun α liittyvä yksinkertainen ketjumurtolukukehitelmä. Tällöin

$$\alpha = [b_0; b_1, ...]_\alpha. \tag{8.101}$$

Todistus. Olkoon

$$[b_0; b_1, ..., b_k] = \frac{A_k}{B_k} \tag{8.102}$$

ketjumurtolukuun

$$[b_0; b_1, ...]_\alpha \tag{8.103}$$

liittyvä konvergenttijono. Toisaalta ketjumurtoalgoritmin identiteetin (8.16) nojalla

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{m-1}, \alpha_m] = \frac{\tilde{A}_m}{\tilde{B}_m}, \tag{8.104}$$

missä

$$\tilde{A}_m = \alpha_m A_{m-1} + A_{m-2}, \quad \tilde{B}_m = \alpha_m B_{m-1} + B_{m-2}. \tag{8.105}$$

Lasketaan seuraavaksi

$$B_m \tilde{A}_m - A_m \tilde{B}_m =$$

$$B_m(\alpha_m A_{m-1} + A_{m-2}) - A_m(\alpha_m B_{m-1} + B_{m-2}) =$$

$$\alpha_m(A_{m-1}B_m - A_m B_{m-1}) + A_{m-2}B_m - A_m B_{m-2} =$$

$$(-1)^m(\alpha_m - b_m) = (-1)^m\{\alpha_m\}. \tag{8.106}$$

Siten

$$\left|\alpha - \frac{A_m}{B_m}\right| = \left|\frac{\tilde{A}_m}{\tilde{B}_m} - \frac{A_m}{B_m}\right| =$$

$$\frac{\{\alpha_m\}}{\tilde{B}_m B_m} \underset{m\to\infty}{\to} 0. \quad \square \tag{8.107}$$

Lause 27. Olkoot $b_0, c_0 \in \mathbb{N}, b_1, c_1, b_2, c_2, ... \in \mathbb{Z}^+$ ja

$$[b_0; b_1, ...] = [c_0; c_1, ...], \tag{8.108}$$

tällöin

$$b_k = c_k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{8.109}$$

Siten irrationaaliluvun yksinkertainen ketjumurtokehitelmä on yksikäsitteinen.

Huomautus 8.

Tarkastellaan ääretöntä yksinkertaista ketjumurtolukua

$$[1,1,1,...]=[b_0,b_1,...], \tag{8.110}$$

jonka konvergenttijonolle pätee

$$[b_0,b_1,...,b_m]=\frac{A_m}{B_m}=\frac{F_{m+2}}{F_{m+1}}, \tag{8.111}$$

sillä rekursiot

$$A_k=A_{k-1}+A_{k-2}, \quad B_k=B_{k-1}+B_{k-2} \quad \forall k=2,3,..., \tag{8.112}$$

antavat Fibonaccin jonoja. Koska nämä rekursiot osataan ratkaista Lukuteorian perusteet/LINK

eli

$$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \tag{8.113}$$

niin raja-arvokin

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A_m}{B_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{F_{m+2}}{F_{m+1}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{8.114}$$

saadaan kivuttomasti. Niinpä

$$[1,1,1,...]=\frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{8.115}$$

Yleensä, kuitenkin, rekursioitten ratkaiseminen on vaikeampaa, jolloin voidaan soveltaa esimerkiksi seuraavaa menettelyä.

Lauseen 23 nojalla ketjumurtoluvun (8.110) arvo $\exists$, olkoon se τ. Tällöin

$$\tau=[1,1,1,...]=[1,\tau], \quad \tau\in\mathbb{R}_{>1}, \tag{8.116}$$

joten

$$\tau=1+\frac{1}{\tau}, \quad \Rightarrow \quad \tau=\frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{8.117}$$

8.4 Toisen asteen algebralliset luvut

Määritelmä 7. Luku $\alpha \in \mathbb{C}$ on toisen asteen algebrallinen luku, mikäli on olemassa sellaiset rationaaliluvut $a, b \in \mathbb{Q},\ D \in \mathbb{Z}$, että

$$\alpha = a + b\sqrt{D}, \quad \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}. \tag{8.118}$$

Luku

$$\overline{\alpha} = a - b\sqrt{D} \tag{8.119}$$

on luvun α liittoluku. Toisen asteen algebralliset luvut (8.118) muodostavat 2. asteen neliökunnan

$$\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{a + b\sqrt{D} |\ a, b \in \mathbb{Q}\}. \tag{8.120}$$

Huomautus 9. Konjugointi eli liittoluvun ottaminen

$$h(\alpha) = \overline{\alpha} = a - b\sqrt{D}, \quad h : \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{D}), \tag{8.121}$$

on rengasmorfismi (2 laskutoimitusta). Tällöin saadaan esimerkiksi

$$\overline{\alpha^n} = \overline{\alpha}^n, \quad \overline{n\alpha} = n\overline{\alpha} \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{8.122}$$

$$\overline{\alpha/\beta} = \overline{\alpha}/\overline{\beta} \quad \forall \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}). \tag{8.123}$$

Lause 28. Olkoon $\alpha \in \mathbb{C}$ toisen asteen algebrallinen luku, tällöin on olemassa sellaiset kokonaisluvut $A, B, C \in \mathbb{Z}$, että

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0. \tag{8.124}$$

Määritelmä 8. Toisen asteen algebrallinen luku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ on toisen asteen irrationaaliluku eli

$$\alpha = a + b\sqrt{D}, \quad b \neq 0, \sqrt{D} \notin \mathbb{Q}. \tag{8.125}$$

Lause 29. Irrationaaliluku $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ on toisen asteen irrationaaliluku, mikäli on olemassa sellaiset kokonaisluvut $A, B, C \in \mathbb{Z}, A \neq 0$, että

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0. \tag{8.126}$$

8.5 Jaksolliset yksinkertaiset ketjumurtoluvut

Määritelmä 9.

Yksinkertainen ketjumurtoluku

$$[b_0; b_1, ...] \tag{8.127}$$

on jaksollinen, mikäli $\exists$ sellaiset $N \in \mathbb{N}$ ja $L \in \mathbb{Z}^+$, että

$$b_{n+L} = b_n, \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq N}, \tag{8.128}$$

missä L on jakso. Tällöin käytetään merkintöjä

$$[b_0; b_1, ...] = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \overline{b_N, ..., b_{N+L-1}}] =$$

$$[b_0; b_1, ..., b_{N-1}, b_N, ..., b_{N+L-1}, b_N, ..., b_{N+L-1}, ...] \tag{8.129}$$

Jos

$$[b_0; b_1, ...] = [\overline{b_0, ..., b_{L-1}}], \tag{8.130}$$

niin tällöin kehitelmä on puhtaasti jaksollinen.

Huomautus 10. Jos muuta ei sanota, niin jakso ja alkutermi valitaan mahdollisimman lyhyeksi.

Käytetään myös termiä minimijakso.

Esimerkki 18.

$$[\overline{1}] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{8.131}$$

Esimerkki 19.

$$[\overline{2}] = 1+\sqrt{2}, \quad [1, \overline{2}] = \sqrt{2}. \tag{8.132}$$

Esimerkki 20.

$$[3, \overline{3, 6}] = \sqrt{11}. \tag{8.133}$$

Esimerkki 21.

$$[10, \overline{20}] = \sqrt{101}. \tag{8.134}$$

8.5.1 Eulerin lause

Lause 30. Yksinkertainen päättymätön jaksollinen ketjumurtoluku

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \overline{c_0, ..., c_{L-1}}] \tag{8.135}$$

on reaalinen toisen asteen irrationaaliluku.

Todistus. Merkitään

$$\beta = [\overline{c_0, ..., c_{L-1}}], \tag{8.136}$$

jolloin

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \beta]. \tag{8.137}$$

Olkoon (C_n/D_n) kehitelmän (8.136) konvergenttijono, tällöin Jaksollisuuden nojalla

$$\beta = [c_0, ..., c_{L-1}, \beta] = \frac{\tilde{C}_L}{\tilde{D}_L}, \tag{8.138}$$

missä

$$\tilde{C}_L = \beta C_{L-1} + C_{L-2}, \quad \tilde{D}_L = \beta D_{L-1} + D_{L-2} \tag{8.139}$$

ja

$$C_k = c_k C_{k-1} + C_{k-2}, \quad D_k = c_k D_{k-1} + D_{k-2} \tag{8.140}$$

kaikilla $k = 2, ..., L - 1$.

Siten

$$\beta = \frac{\beta C_{L-1} + C_{L-2}}{\beta D_{L-1} + D_{L-2}}, \tag{8.141}$$

josta

$$D_{L-1}\beta^2 + (D_{L-2} - C_{L-1})\beta - C_{L-2} = 0. \tag{8.142}$$

Niinpä β on 2. asteen irrationaaliluku ja $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, jollakin $D \in \mathbb{Z}$ (määrää D). Edelleen

$$\alpha = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \beta] = \frac{\tilde{A}_N}{\tilde{B}_N}, \tag{8.143}$$

missä

$$\tilde{A}_N = \beta A_{N-1} + A_{N-2}, \quad \tilde{B}_N = \beta B_{N-1} + B_{N-2} \tag{8.144}$$

ja

$$A_k = b_k A_{k-1} + A_{k-2}, \quad B_k = b_k B_{k-1} + B_{k-2} \tag{8.145}$$

kaikilla $k = 2, ..., N-1$. Siispä

$$\alpha = \frac{\beta A_{N-1} + A_{N-2}}{\beta B_{N-1} + B_{N-2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}). \tag{8.146}$$

Siten α on 2. asteen irrationaaliluku. $\square$

Esimerkki 22. Sovelletaan äskeisen todistuksen menetelmää ketjumurtolukuun

$$\alpha = [2, 3, 8, \overline{1, 1, 1, 4}]. \tag{8.147}$$

Nyt

$$\beta = [\overline{1, 1, 1, 4}] \tag{8.148}$$

ja siten

$$\beta = [1, 1, 1, 4, \beta] = \frac{\tilde{C}_4}{\tilde{D}_4}, \tag{8.149}$$

missä

$$\frac{C_0}{D_0} = 1, \quad \frac{C_1}{D_1} = 2, \quad \Rightarrow \ C_0 = D_0 = D_1 = 1, \ C_1 = 2, \tag{8.150}$$

$$C_2 = c_2 C_1 + C_0 = 3, \quad C_3 = c_3 C_2 + C_1 = 14, \tag{8.151}$$

$$D_2 = c_2 D_1 + D_0 = 2, \quad D_3 = c_3 D_2 + D_1 = 9, \tag{8.152}$$

$$\tilde{C}_4 = \beta C_3 + C_2 = 14\beta + 3, \quad \tilde{D}_4 = \beta D_3 + D_2 = 9\beta + 2. \tag{8.153}$$

Niinpä

$$\beta = \frac{14\beta + 3}{9\beta + 2}, \quad \Rightarrow \quad 3\beta^2 - 4\beta + 1 = 0, \tag{8.154}$$

ja siten

$$\beta = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}. \tag{8.155}$$

Edelleen

$$\alpha = [2, 3, 8, \beta] = \frac{\tilde{A}_3}{\tilde{B}_3}, \tag{8.156}$$

$$A_0 = 2,\ B_0 = 1,\ A_1 = 7,\ B_1 = 3,\ A_2 = 58,\ B_2 = 25, \tag{8.157}$$

$$\tilde{A}_3 = \beta A_2 + A_1 = 58\beta + 7, \quad \tilde{B}_3 = \beta B_2 + B_1 = 25\beta + 3, \tag{8.158}$$

$$\alpha = \frac{58\beta + 7}{25\beta + 3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{7}). \tag{8.159}$$

Sievennä vielä α:n lauseke.

Lemma 1. Kun $\alpha = [b_0, b_1, ..., b_{n-1}, \alpha_n]$, niin

$$\alpha = \frac{\alpha_n A_{n-1} + A_{n-2}}{\alpha_n B_{n-1} + B_{n-2}} \quad \Leftrightarrow \tag{8.160}$$

$$\alpha_n = -\frac{\alpha B_{n-2} - A_{n-2}}{\alpha B_{n-1} - A_{n-1}}. \tag{8.161}$$

Lemma 2. Olkoot $a, b \in \mathbb{Q}, D \in \mathbb{Z}$. Tällöin luku $\alpha = a + b\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ voidaan esittää muodossa

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{d}}{Q}, \quad Q|P^2 - d, \quad P, Q, d \in \mathbb{Z}. \tag{8.162}$$

8.5.2 Lagrangen lause

Lause 31. Reaalisen neliökunnan positiivisen irrationaaliluvun α ketjumurtoesitys on jaksollinen.

Todistus. Aluksi Lemman 2 nojalla saadaan esitys

$$\alpha_0 = \alpha = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0}, \quad Q_0 | P_0^2 - d, \quad P_0, Q_0, d \in \mathbb{Z}. \tag{8.163}$$

Käytetään seuraavaksi ketjumurtoalgoritmia (8.2)–(8.7). Ensin

$$\alpha_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \{\alpha_0\} = b_0 + \{\alpha_0\}, \tag{8.164}$$

missä

$$0 < \{\alpha_0\} = \frac{P_0 - b_0 Q_0 + \sqrt{d}}{Q_0} < 1. \tag{8.165}$$

Siten

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{P_1 + \sqrt{d}}{Q_1}, \tag{8.166}$$

missä

$$P_1 = b_0 Q_0 - P_0, \quad Q_1 = \frac{d - P_1^2}{Q_0}. \tag{8.167}$$

Tässä

$$Q_0 | P_1^2 - d, \tag{8.168}$$

joten

$$P_1, Q_1 \in \mathbb{Z}. \tag{8.169}$$

Edelleen pätee

$$Q_1 | P_1^2 - d = Q_1 Q_1. \tag{8.170}$$

Seuraavaksi jatketaan algoritmin mukaisesti

$$\alpha_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor + \{\alpha_1\} = b_1 + \{\alpha_1\} \quad ... \tag{8.171}$$

ja yleisemmin

$$1 < \alpha_n = \frac{P_n + \sqrt{d}}{Q_n}, \quad P_n, Q_n \in \mathbb{Z}, \tag{8.172}$$

missä

$$Q_n | P_n^2 - d. \tag{8.173}$$

Algoritmin mukaisesti

$$\alpha_n = \lfloor \alpha_n \rfloor + \{\alpha_n\} = b_n + \{\alpha_n\} \tag{8.174}$$

$$0 < \{\alpha_n\} = \frac{P_n - b_n Q_n + \sqrt{d}}{Q_n} < 1. \tag{8.175}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\{\alpha_n\}} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{d}}{Q_{n+1}}, \tag{8.176}$$

missä

$$P_{n+1} = b_n Q_n - P_n, \quad Q_{n+1} = \frac{d - P_{n+1}^2}{Q_n}. \tag{8.177}$$

Tässä

$$Q_n | P_{n+1}^2 - d, \tag{8.178}$$

joten

$$P_{n+1}, Q_{n+1} \in \mathbb{Z}. \tag{8.179}$$

Edelleen pätee

$$Q_{n+1} | P_{n+1}^2 - d. \tag{8.180}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että jonot (P_k) ja (Q_k) ovat rajoitettuja.

Tarkastellaan lauseketta

$$\alpha_n \overline{\alpha_n} = \frac{P_n^2 - d}{Q_n^2} = \tag{8.181}$$

$$\frac{\alpha B_{n-2} - A_{n-2}}{\alpha B_{n-1} - A_{n-1}} \frac{\overline{\alpha} B_{n-2} - A_{n-2}}{\overline{\alpha} B_{n-1} - A_{n-1}} = G_n \overline{G_n}, \tag{8.182}$$

missä Harjoitustehtävän 17d nojalla

$$G_n = \frac{\alpha B_{n-2} - A_{n-2}}{\alpha B_{n-1} - A_{n-1}} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{8.183}$$

ja

$$\overline{G_n} = \frac{\overline{\alpha} - \frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}}{\overline{\alpha} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}} \frac{B_{n-2}}{B_{n-1}} \tag{8.184}$$

Koska $\overline{\alpha} \neq \alpha$, niin on olemassa sellainen n, että

$$\left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| < \frac{1}{B_k^2} < \frac{2\sqrt{d}}{|Q_0|} = |\alpha - \overline{\alpha}| \tag{8.185}$$

kaikilla $k \geq K = n - 2$. Tällöin, joko

$$\overline{\alpha} - \frac{A_k}{B_k} < 0 \quad \text{tai} \quad \overline{\alpha} - \frac{A_k}{B_k} > 0 \tag{8.186}$$

kaikilla $k \geq K$. Siten

$$\overline{G_k} > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k \overline{\alpha_k} = \frac{P_k^2 - d}{Q_k^2} = G_k \overline{G_k} < 0, \tag{8.187}$$

josta

$$P_k^2 < d \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{d} < P_k < \sqrt{d} \quad \forall k \geq K. \tag{8.188}$$

Edelleen yhtälöstä (8.172) ja (8.188) nähdään, että

$$Q_k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad Q_k \leq Q_k Q_{k+1} = d - P_{k+1}^2 \leq d \tag{8.189}$$

$$1 \leq Q_k \leq d \quad \forall k \geq K. \tag{8.190}$$

Olkoon

$$B = \{(S,T) \in \mathbb{Z}^2 |\ |S| \leq \sqrt{d-1},\ 1 \leq T \leq d\}, \tag{8.191}$$

jonka mahtavuudelle pätee $\#B = M < \infty$. Välittömästi saadaan, että

$$A = \{(P_k, Q_k) \in \mathbb{Z}^2 |\ k = K, K+1, ...\} \subseteq B. \tag{8.192}$$

Siten joillakin $0 \leq l < h \leq M$, pätee

$$(P_{K+l}, Q_{K+l}) = (P_{K+h}, Q_{K+h}). \tag{8.193}$$

Merkitään $L = h - l$, jolloin

$$\alpha_{K+l} = \alpha_{K+L+l} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{K+l+1} = \alpha_{K+L+l+1}, ... \tag{8.194}$$

Merkitään vielä $N = K + l$, jolloin

$$b_{N+j} = b_{N+L+j} \quad \forall \quad j = 0, 1, ... \tag{8.195}$$

ja siten

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{d}}{Q} = [b_0; b_1, ..., b_{N-1}, \overline{b_N, ..., b_{N+L-1}}]. \quad \square \tag{8.196}$$

Esimerkki 23.

Olkoon $d \in \mathbb{Z}^+$. Tällöin

$$\sqrt{d^2 + 2} = [d, \overline{d, 2d}]. \tag{8.197}$$

Todistus. Aluksi huomataan, että

$$d^2 < d^2 + 2 < (d+1)^2 \;\Rightarrow\; d < \sqrt{d^2+2} < d + 1 \;\Rightarrow$$
$$\lfloor \sqrt{d^2+2} \rfloor = d, \quad \{\sqrt{d^2+2}\} = \sqrt{d^2+2} - d. \tag{8.198}$$

Käytetään ketjumurtoalgoritmia

$$\sqrt{d^2+2} = d + \sqrt{d^2+2} - d = b_0 + \{\alpha_0\}, \tag{8.199}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{1}{\sqrt{d^2+2} - d} = \frac{\sqrt{d^2+2} + d}{2} > \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1, \tag{8.200}$$

joten (tästäkin näkee, että) valitulle $\{\alpha_0\}$, pätee $0 < \{\alpha_0\} < 1$.

Edelleen

$$\begin{aligned}\alpha_1 =& d + \frac{\sqrt{d^2+2}-d}{2} = b_1 + \{\alpha_1\},\\ \alpha_2 =& \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \frac{2}{\sqrt{d^2+2}-d} = \\ & \sqrt{d^2+2}+d = 2d + \sqrt{d^2+2}-d = b_2 + \{\alpha_2\},\\ \alpha_3 =& \frac{1}{\{\alpha_2\}} = \frac{1}{\sqrt{d^2+2}-d} = \alpha_1.\end{aligned} \tag{8.201}$$

Siten

$$b_0 = d, \quad b_1 = d, \quad b_2 = 2d, \quad b_3 = b_1 = d, b_4 = b_2 = 2d, ... \quad \square \tag{8.202}$$

Määritelmä 10. Toisen asteen irrationaaliluku $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ on redusoitu, jos

$$\alpha = a + b\sqrt{D} > 1, \quad \text{ja} \quad -1 < \overline{\alpha} = a - b\sqrt{D} < 0. \tag{8.203}$$

Lause 32. Toisen asteen positiivinen irrationaaliluku $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ on redusoitu täsmälleen silloin, kun sen ketjumurtoesitys on puhtaasti jaksollinen. Tarkemmin:

$$\alpha > 1, \quad \text{ja} \quad -1 < \overline{\alpha} < 0 \quad \Leftrightarrow \tag{8.204}$$

$$\alpha = [\overline{b_0, ..., b_{L-1}}] \quad \Leftrightarrow \tag{8.205}$$

$$\frac{-1}{\overline{\alpha}} = [\overline{b_{L-1}, ..., b_0}]. \tag{8.206}$$

Lause 33. Olkoot $D \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$ ja $A = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$. Tällöin

$$\sqrt{D} = [A, \overline{b_1, b_2, ..., b_2, b_1, 2A}]. \tag{8.207}$$

Todistus. Aluksi

$$A = b_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor, \quad \lfloor A + \sqrt{D} \rfloor = 2A. \tag{8.208}$$

Joten

$$\sqrt{D} = [b_0; b_1, b_2, ...] = [A; b_1, b_2, ...] \tag{8.209}$$

ja

$$\alpha := A + \sqrt{D} = [2A; b_1, b_2, ...]. \tag{8.210}$$

Edelleen

$$\overline{\alpha} = A - \sqrt{D} = -(\sqrt{D} - \lfloor\sqrt{D}\rfloor), \quad -1 < \overline{\alpha} < 0 \tag{8.211}$$

eli α on redusoitu. Siten tuloksen (8.205) nojalla

$$\alpha = A + \sqrt{D} = [\overline{2A, b_1, ..., b_{L-1}}] \quad \Rightarrow \tag{8.212}$$

$$\sqrt{D} = [A, b_1, ..., b_{L-1}, 2A, b_1, ..., b_{L-1}, 2A, ...] \tag{8.213}$$

eli

$$\sqrt{D} = [A, \overline{b_1, ..., b_{L-1}, 2A}], \tag{8.214}$$

mistä saadaan

$$\sqrt{D} - A = [0, \overline{b_1, ..., b_{L-1}, 2A}]. \tag{8.215}$$

Tuloksen (8.206) nojalla

$$\frac{-1}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{D} - A} = [\overline{b_{L-1}, ..., b_1, 2A}]. \tag{8.216}$$

josta Harjoitustehtävä 17a:n nojalla

$$\sqrt{D} - A = [0, \overline{b_{L-1}, ..., b_1, 2A}]. \tag{8.217}$$

Verrataan vielä esityksiä (8.215) ja (8.217), joista saadaan

$$b_{L-1} = b_1, b_{L-2} = b_2, ... \tag{8.218}$$

ja siten

$$\sqrt{D} = [A, \overline{b_1, b_2, ..., b_2, b_1, 2A}]. \quad \square \tag{8.219}$$

Esimerkki 24.

$$\sqrt{13} = [3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}]. \tag{8.220}$$

Esimerkki 25.

$$\sqrt{31} = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]. \tag{8.221}$$

Huomautus 11. Jaksollinen jono on rajoitettu ja erityisesti ylöspäin rajoitettu.

Lause 34. Neperin luku e ei ole neliöllinen irrationaaliluku eli

$$e \notin \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \quad \forall \quad D \in \mathbb{Z}. \tag{8.222}$$

Todistus. Myöhemmin, Seuraus 52 todistetaan, että

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, ...] = [2, \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}. \quad \square \tag{8.223}$$

9 Paras approksimaatio

Kerrataan vielä, että rationaalilukujen nimittäjät oletetaan positiivisiksi (kuten yleensäkin tällä kurssilla). We assume that the denominators of rational numbers are positive.

Määritelmä 11. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Rationaaliluku $r/s \in \mathbb{Q}$ on α:n paras approksimaatio/best approximation, jos

$$|s\alpha - r| < |u\alpha - t| \quad \forall \quad t/u \in \mathbb{Q} \setminus \{r/s\}, \tag{9.1}$$

missä $1 \leq u \leq s$.

Parhaalle approksimaatiolle r/s pätee/for the best approximation holds

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \left|\alpha - \frac{t}{u}\right|, \quad \text{jos} \quad 1 \leq u \leq s. \tag{9.2}$$

ja $t/u \neq r/s$. Siispä, jos $t/u \neq r/s$ ja

$$\left|\alpha - \frac{t}{u}\right| \leq \left|\alpha - \frac{r}{s}\right|, \tag{9.3}$$

niin $u > s$.

Siten luvun α paras approksimaatio on sellainen rationaaliluku r/s, että kaikilla lukua α lähempänä olevilla rationaaliluvuilla on suurempi nimittäjä. The best approximation r/s is such a rational number, that every rational number which is closer to α has a bigger denominator.

Lause 35. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja (A_k/B_k) sen konvergenttijono. Tällöin, jos

$$|u\alpha - t| < |B_k\alpha - A_k|, \quad u \in \mathbb{Z}^+,\ t \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^+, \tag{9.4}$$

niin $u \geq B_{k+1} > B_k$. Siten irrationaalisen luvun konvergentit ovat parhaita approksimaatioita/Thus the convergents an irrational number are best approximations.

Todistus. Vastaoletus: $u < B_{k+1}$.
Osoitetaan ensin, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} u = aB_k + bB_{k+1}; \\ t = aA_k + bA_{k+1} \end{cases} \tag{9.5}$$

on kokonaislukuratkaisu $(a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ ab < 0$. Yhtälöryhmän determinantti

$$\begin{vmatrix} B_k & B_{k+1} \\ A_k & A_{k+1} \end{vmatrix} = (-1)^k \neq 0, \tag{9.6}$$

joten saadaan ratkaisu

$$\begin{cases} a = (-1)^k(uA_{k+1} - tB_{k+1}); \\ b = (-1)^k(-uA_k + tB_k). \end{cases} \tag{9.7}$$

Yhtälöistä (9.5) ja vastaoletuksesta saadaan, että

$$1 \leq u = aB_k + bB_{k+1} < B_{k+1}. \tag{9.8}$$

Näytetään seuraavaksi, että $ab \neq 0$. Jos olisi $a = 0$, niin

$$1 \leq u = bB_{k+1} < B_{k+1}, \tag{9.9}$$

johtaen ristiriitaan. Siten $a \neq 0$.

Jos $b = 0$, niin

$$u = aB_k, \quad t = aA_k, \tag{9.10}$$

josta edelleen

$$|u\alpha - t| = |a||B_k\alpha - A_k| > |u\alpha - t|, \tag{9.11}$$

johtaen ristiriitaan. Siten $b \neq 0$. Tutkimalla epäyhtälöä (9.8) saadaan relaatiot

$$\begin{aligned} a < 0 \quad &\Rightarrow \quad b > 0; \\ a > 0 \quad &\Rightarrow \quad b < 0; \\ \Rightarrow \quad ab < 0. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Edelleen

$$u\alpha - t = a(B_k\alpha - A_k) + b(B_{k+1}\alpha - A_{k+1}) = aX + bY, \tag{9.13}$$

missä (laskarit)

$$XY = (B_k\alpha - A_k)(B_{k+1}\alpha - A_{k+1}) < 0. \tag{9.14}$$

Katsomalla merkkikombinaatiot saadaan

$$aX > 0 \Rightarrow bY > 0 \quad \text{ja} \qquad aX < 0 \Rightarrow bY < 0 \tag{9.15}$$

kaikissa tapauksissa. Täten

$$|u\alpha - t| = |a||X| + |b||Y| \geq |X| + |Y| = \tag{9.16}$$

$$|B_k\alpha - A_k| + |B_{k+1}\alpha - A_{k+1}| > |B_k\alpha - A_k|. \tag{9.17}$$

Ristiriita. $\square$

Lause 36. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja (A_k/B_k) sen konvergenttijono. Tällöin, jos

$$\left|\alpha - \frac{t}{u}\right| < \left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| \tag{9.18}$$

niin $u > B_k$.

Todistus. Vastaoletus: $u \leq B_k$. Oletuksen (9.18) nojalla saadaan

$$|u\alpha - t| < \frac{u}{B_k}\left|B_k\alpha - A_k\right|, \tag{9.19}$$

josta vastaoletuksen nojalla

$$|u\alpha - t| < \left|B_k\alpha - A_k\right|. \tag{9.20}$$

Mutta tällöin Lauseen 35 mukaan $u \geq B_{k+1} > B_k$. Ristiriita. $\square$

Esimerkki 26. Tiedetään, että

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...] \notin \mathbb{Q} \tag{9.21}$$

ja

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{3}{1}, \ \frac{A_1}{B_1} = \frac{22}{7}, \ \frac{A_2}{B_2} = \frac{333}{106}, \ \frac{A_3}{B_3} = \frac{355}{113}, ... \tag{9.22}$$

ovat π:n konvergentteja. Siten luku $22/7$ on π:n paras approksimaatio Lauseen 35 nojalla. Edelleen Lauseen 36 mukaan ei ole olemassa sellaista rationaalilukua t/u, $1 \leq u \leq 7$, että se olisi lähempänä lukua π kuin $22/7$.

Esimerkiksi

$$\left|\pi - \frac{16}{5}\right| = 0.05840... > \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0.00126... \tag{9.23}$$

Lause 37. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja (A_k/B_k) sen konvergenttijono. Tällöin, jos

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2}, \tag{9.24}$$

niin

$$\frac{r}{s} = \frac{A_k}{B_k}, \tag{9.25}$$

jollakin k.

Todistus. Olkoon

$$\frac{r}{s} \neq \frac{A_l}{B_l} \quad \forall l \quad \Rightarrow \quad |sA_l - rB_l| \geq 1 \quad \forall l. \tag{9.26}$$

Koska jono (B_k) on aidosti kasvava, niin on olemassa sellainen k, että

$$B_k \leq s < B_{k+1}. \tag{9.27}$$

Siten Lauseen 35 ja oletuksen (9.24) mukaan

$$|B_k\alpha - A_k| \leq |s\alpha - r| < \frac{1}{2s} \quad \Rightarrow \tag{9.28}$$

$$\left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| < \frac{1}{2sB_k}. \tag{9.29}$$

Toisaalta

$$\frac{1}{sB_k} \leq \left|\frac{sA_k - rB_k}{sB_k}\right| = \left|\frac{r}{s} - \frac{A_k}{B_k}\right| \leq \tag{9.30}$$

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| + \left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| < \frac{1}{2sB_k} + \frac{1}{2s^2}, \tag{9.31}$$

mistä saadaan $s < B_k$. Ristiriita. □

Lause 38. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja (A_k/B_k) sen konvergenttijono. Tällöin

$$\left|\alpha - \frac{A_k}{B_k}\right| < \frac{1}{2B_k^2} \tag{9.32}$$

tai

$$\left|\alpha - \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}\right| < \frac{1}{2B_{k+1}^2}. \tag{9.33}$$

10 Sovelluksia

10.1 Diofantoksen yhtälöitä

Yleensä, Diofantoksen yhtälöt ovat kokonaislukukertoimisia polynomi- ja/tai eksponenttiyhtälöitä, joihin haetaan kokonaislukuratkaisuja.

Määritelmä 12. Olkoon $d \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Yhtälö

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{10.1}$$

on Pellin yhtälö.

Lause 39. Olkoon $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ ja (A_k/B_k) sen konvergenttijono. Tällöin, jos $x, y \in \mathbb{Z}^+$ on Pellin yhtälön (10.1) ratkaisu, niin

$$\frac{x}{y} = \frac{A_k}{B_k}, \tag{10.2}$$

jollakin $k \in \mathbb{N}$.

Todistus. Yhtälön (10.1) mukaan

$$(x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} > \sqrt{d}; \tag{10.3}$$

$$x - y\sqrt{d} = \frac{1}{x + y\sqrt{d}}. \tag{10.4}$$

Niinpä

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| = \frac{1}{y^2(x/y + \sqrt{d})} < \frac{1}{2y^2}, \tag{10.5}$$

joten Lauseen 37 nojalla

$$\frac{x}{y} = \frac{A_k}{B_k}, \tag{10.6}$$

jollakin $k \in \mathbb{N}$. □

Esimerkki 27.

Tutkitaan yhtälöä

$$x^2 - 2y^2 = 1. \tag{10.7}$$

Aluksi laskemalla konvergentteja nähdään, että $(x, y) = (3, 2)$ ja $(x, y) = (17, 12)$ ovat ratkaisuja.

Muodostetaan lisäratkaisuja asettamalla

$$\beta_n = x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n. \tag{10.8}$$

Tällöin

$$\beta_n\overline{\beta_n} = x_n^2 - 2y_n^2 = (3^2 - 2 \cdot 2^2)^n = 1. \tag{10.9}$$

Täten jokainen identiteetillä (10.8) määrätty pari $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ on ratkaisu. Edelleen, ratkaisemalla yhtälöt

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n, \quad x_n - y_n\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^n \tag{10.10}$$

saadaan seuraavat esitysmuodot

$$x_n = \frac{1}{2}((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n), \tag{10.11}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n). \tag{10.12}$$

Määrätään vielä rekursiot luvuille x_n ja y_n. Identiteetin (10.8) mukaan

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2}) = 3x_n + 4y_n + (2x_n + 3y_n)\sqrt{2}. \tag{10.13}$$

Koska 1 ja $\sqrt{2}$ ovat lineaarisesti vapaita kunnan $\mathbb{Q}$ yli, niin

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n; \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n. \end{cases} \tag{10.14}$$

Edelleen

$$\begin{cases} x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n; \\ y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n. \end{cases} \tag{10.15}$$

Huomaa vielä, että rekursioitten (10.15) karakteristinen polynomi on $x^2 - 6x + 1$, jonka nollakohdat ovat $3 \pm 2\sqrt{2}$. Katso Lukuteorian perusteet.

11 Yleiset ketjumurrot

Kerrataan, että Lauseen 16 nojalla ketjumurron

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \, {}_{+} \frac{a_2}{b_2} \, {}_{+\dots} = \tag{11.1}$$

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \tag{11.2}$$

konvergentit

$$b_0 + \mathbb{K}_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{A_n}{B_n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, \tag{11.3}$$

saadaan laskettua rekursioilla

$$A_{n+2} = b_{n+2} A_{n+1} + a_{n+2} A_n, \tag{11.4}$$

$$B_{n+2} = b_{n+2} B_{n+1} + a_{n+2} B_n \tag{11.5}$$

lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_1 = b_0 b_1 + a_1$ ja $B_1 = b_1$.

Lause 40.

$$A_{n+1} B_n - A_n B_{n+1} = (-1)^n a_1 \cdots a_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{11.6}$$

$$A_{n+2} B_n - A_n B_{n+2} = (-1)^n b_{n+2} a_1 \cdots a_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{11.7}$$

Todistus induktiolla käyttäen rekursioita (11.4) ja (11.5).

Seuraus 4.

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{11.8}$$

$$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n b_{n+2} a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+2}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{11.9}$$

Seuraus 5. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{R}^+$, tällöin

$$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < ... < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \tag{11.10}$$

$$< \frac{A_{2h+1}}{B_{2h+1}} < ... < \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}. \tag{11.11}$$

kaikilla $k, h \in \mathbb{N}$.

12 Suppenemistarkasteluja

Lause 41. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{C}$. Ketjumurtoluku

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) \tag{12.1}$$

suppenee, jos

$$|b_k| \geq |a_k| + 1 \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{12.2}$$

Lause 42. Olkoot $b_k \in \mathbb{C}$, $0 < \epsilon < \pi/2$ ja

$$-\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg b_k < \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{12.3}$$

Tällöin ketjumurtoluku

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k} \right) \tag{12.4}$$

suppenee, jos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \infty. \tag{12.5}$$

Ei todisteta.

Lause 43. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{R}^+$. Ketjumurto

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \tag{12.6}$$

suppenee, jos

$$\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} \to 0, \tag{12.7}$$

ja erityisesti, jos

$$\frac{b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i^2}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i} \to \infty. \tag{12.8}$$

Todistus. Edetään kuten Lauseen 23 todistuksessa.

Nyt yhtälön (11.8) mukaan pätee

$$0 < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} - \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{a_1 \cdots a_{2k+1}}{B_{2k}B_{2k+1}}. \tag{12.9}$$

Täten suppenemiseen riittää tulos

$$\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} \to 0. \tag{12.10}$$

Näytetään seuraavaksi, että tulos (12.10) seuraa ehdosta (12.8). Rekursion nojalla

$$B_{k+2} = b_{k+2}B_{k+1} + a_{k+2}B_k > b_{k+2}B_{k+1}, \tag{12.11}$$

joten

$$B_k > b_k \cdots b_1. \tag{12.12}$$

Siispä ehdon (12.8) nojalla

$$\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} < \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{b_1 \cdots b_n b_1 \cdots b_{n+1}} \to 0. \quad \square \tag{12.13}$$

Esimerkki 28.

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2k+1}\right) \in \mathbb{R}^+. \tag{12.14}$$

Osoitetaan, että ketjumurto (12.14) suppenee. Ratkaisu:

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{b_1 \cdots b_n b_1 \cdots b_n b_{n+1}} = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots n^2 (n+1)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n+1)^2 (2n+3)} \leq \\ &\frac{(n+1)^2}{2n+3} \frac{1}{2^{2n}} \to 0. \quad \square \end{aligned} \tag{12.15}$$

Myöhemmin todistetaan vielä, että

$$\arctan 1 = \frac{1}{1 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2k+1}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \dots}}}. \tag{12.16}$$

Esimerkki 29. Ketjumurto

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+i}\right) \tag{12.17}$$

suppenee.

Esimerkki 30. Ketjumurto

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right) \tag{12.18}$$

suppenee.

Esimerkki 31. Milloin ketjumurto

$$b + \frac{a}{b +} \frac{a}{b + \dots} \tag{12.19}$$

suppenee?

Esimerkki 32.

$$\tau = 3 + \frac{-2}{3 +} \frac{-2}{3 + \dots} \tag{12.20}$$

suppenee aikaisempien tulosten nojalla. Joten saadaan yhtälö

$$\tau = 3 + \frac{-2}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \tau = 1 \quad \text{tai} \quad 2 \tag{12.21}$$

mutta kumpi??

Toisaalta esimerkkien (29–32) suppenemista voidaan tutkia myös ratkaisemalla konvergenttien osoittajonot ja nimittäjäjonot rekursioista ja laskemalla konvergenttijonon raja-arvo.

12.1 Rekursioitten ratkaisemista

Jono (w_n) on ei-triviaali, jos ainakin yksi alkio $w_n \neq 0$.

Määritelmä 13. Olkoot $r, s \in \mathbb{C}, s \neq 0$. Ei-triviaalia jonoa (w_n), joka toteuttaa palautuskaavan

$$w_{n+2} = rw_{n+1} + sw_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{12.22}$$

sanotaan Lucasin jonoksi.

Ratkaistaan rekursio (12.22) yritteellä

$$w_n = x^n, \quad x \in \mathbb{C}^*. \tag{12.23}$$

Rekursiosta (12.22) saadaan

$$x^2 - rx - s = 0, \tag{12.24}$$

jonka ratkaisut ovat

$$\alpha = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4s}}{2}, \quad \beta = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4s}}{2}. \tag{12.25}$$

Määritelmä 14. Polynomi

$$K(x) = K_w(x) = x^2 - rx - s = (x - \alpha)(x - \beta) \tag{12.26}$$

on rekursion (12.22) karakteristinen polynomi.

Lause 44. Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$w_n = a\alpha^n + b\beta^n \tag{12.27}$$

on rekursion (12.22) ratkaisu.

Olkoon $r^2 + 4s \neq 0$, tällöin $\alpha \neq \beta$. Siten rekursion (12.22) kaikki ratkaisut ovat muotoa (12.27), joillakin $a, b \in \mathbb{C}$, jotka riippuvat jonon (w_n) alkuarvoista w_0, w_1.

Esimerkki 33.

Ketjumurron

$$b + \frac{a}{b+}\frac{a}{b+\ldots} \tag{12.28}$$

konvergenteille pätee

$$A_{k+2} = bA_{k+1} + aA_k, \quad B_{k+2} = bB_{k+1} + aB_k. \tag{12.29}$$

Rekursioiden karakteristinen polynomi on muotoa

$$x^2 - bx - a = (x-\alpha)(x-\beta), \tag{12.30}$$

missä

$$\alpha = \frac{b + \sqrt{b^2+4a}}{2}, \quad \beta = \frac{b - \sqrt{b^2+4a}}{2}. \tag{12.31}$$

Siten rekursioitten (12.29) yleiset ratkaisut ovat

$$A_k = t\alpha^k + u\beta^k, \quad B_k = v\alpha^k + w\beta^k, \tag{12.32}$$

missä t, u, v, w saadaan alkuarvoyhtälöistä

$$A_0 = t\alpha^0 + u\beta^0, \quad A_1 = t\alpha^1 + u\beta^1, \tag{12.33}$$

$$B_0 = v\alpha^0 + w\beta^0, \quad B_1 = v\alpha^1 + w\beta^1. \tag{12.34}$$

Tapaus $a, b \in \mathbb{R},\ b^2 + 4a > 0,\ |\alpha| > |\beta|$. Tällöin

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{t + u(\beta/\alpha)^k}{v + w(\beta/\alpha)^k} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \frac{t}{v} \tag{12.35}$$

ja siten

$$b + \frac{a}{b+}\frac{a}{b+\ldots} = \frac{t}{v}. \tag{12.36}$$

Esimerkki 34.

Ratkaisemalla rekursiot ja määräämällä raja-arvo saadaan vastaus

$$\tau = 3 + \frac{-2}{3} {}_{+} \frac{-2}{3} {}_{+\ldots} = 2 \tag{12.37}$$

aikaisemman Esimerkin 32 kysymykseen. Nimittäin, nyt $a = -2, b = 3$, joten $\alpha = 2, \beta = 1$. Siten rekursioitten (12.29) yleiset ratkaisut ovat muotoa

$$A_k = t2^k + u1^k, \quad B_k = v2^k + w1^k, \tag{12.38}$$

missä $t = 4, u = -1, v = 2, w = -1$ saadaan alkuarvoyhtälöistä (12.33)

$$A_0 = 3 = t + u, \quad A_1 = 7 = 2t + u, \tag{12.39}$$

$$B_0 = 1 = v + w, \quad B_1 = 3 = 2v + w. \tag{12.40}$$

Siten

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{4 \cdot 2^k - 1}{2 \cdot 2^k - 1} = \frac{4 - (1/2)^k}{2 - (1/2)^k} \underset{k \to \infty}{\to} \frac{4}{2} = 2. \tag{12.41}$$

Jos osaosoittajat ja -nimittäjät eivät ole vakioita, niin rekursioiden ratkaiseminen eksplisiittisesti voi olla vaikeaa tai mahdotonta. Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan tapausta, jossa ketjumurron arvo saadaan ilman, että rekusioita ratkaistaan.

Esimerkki 35.

Tutkitaan ketjumurron

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) \tag{12.42}$$

arvoa. Konvergenteille pätee:

$$A_{k+2} = (k+2)A_{k+1} + (k+3)A_k, \quad B_{k+2} = (k+2)B_{k+1} + (k+3)B_k. \tag{12.43}$$

Tutkimalla alkuarvoja

$$\begin{aligned} A_1 = 2, &\quad B_1 = 1; \\ A_2 = 4, &\quad B_2 = 5; \\ A_3 = 20, &\quad B_3 = 19; \\ A_4 = 100, &\quad B_4 = 101; \ldots \end{aligned} \tag{12.44}$$

huomataan, että

$$A_n = B_n + (-1)^{n+1} \tag{12.45}$$

minkä voikin todistaa induktiolla. Lisäksi $B_n \to \infty$. Siten

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = \lim \frac{A_n}{B_n} = \lim \frac{B_n + (-1)^{n+1}}{B_n} = 1. \tag{12.46}$$

13 Irrationaalisuusehtoja

Määritelmä 15. Ketjumurron

$$\tau = \mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right), \tag{13.1}$$

häntä on ketjumurto

$$\tau_k = \mathbb{K}_{n=k}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right). \tag{13.2}$$

Hännille pätee palautuskaava

$$\tau_k = \frac{a_k}{b_k + \tau_{k+1}}. \tag{13.3}$$

Huomautus 12. Mikäli ketjumurron (13.1) kaikki hännät suppenevat, niin tällöin pätee:

A)

$$\tau_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_k \neq 0. \tag{13.4}$$

B) Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$, $a_k \neq 0$ kaikilla k. Tällöin

$$\tau \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{13.5}$$

Lause 45. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}^+$. Jos

$$a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{13.6}$$

niin

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \notin \mathbb{Q}. \tag{13.7}$$

Lause 46. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. Jos

$$1 \leq |a_k| < |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{13.8}$$

ja

$$|\tau_k| \neq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{13.9}$$

niin

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \notin \mathbb{Q}. \tag{13.10}$$

Ennen lauseiden 45 ja 46 todistusta esitellään ketjumurtojen häntiin liittyvä tulos.

Lause 47. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. Jos

$$0 < |\tau_k| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{13.11}$$

niin

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \notin \mathbb{Q}. \tag{13.12}$$

Todistus. Vastaoletus $\tau \in \mathbb{Q}$. Tällöin

$$\tau_k = \frac{r_k}{s_k}, \quad r_k \in \mathbb{Z},\ s_k \in \mathbb{Z}^+, \quad r_k \perp s_k,$$

$$1 \leq |r_k| \leq s_k - 1 \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}^+. \tag{13.13}$$

Palautuskaavan (13.3) nojalla

$$r_k r_{k+1} = s_{k+1}(s_k a_k - b_k r_k), \tag{13.14}$$

joten välttämättä

$$s_{k+1}|r_k \quad \Rightarrow \quad s_{k+1} \leq |r_k| \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+. \tag{13.15}$$

Edelleen

$$|r_{k+1}| \leq s_{k+1} - 1 \leq |r_k| - 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+. \tag{13.16}$$

Täten saadaan ääretön aidosti vähenevä jono $|r_1| > |r_2| > ...$ positiivisia kokonaislukuja. Ristiriita. $\square$

Lauseen 45 todistus. Aluksi todetaan, että kaikki hännät suppenevat, joten

$$\tau_k < \infty \quad \Rightarrow \quad 0 < \tau_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{13.17}$$

Edelleen

$$0 < \tau_k = \frac{a_k}{b_k + \tau_{k+1}} \overset{13.17}{<} \frac{a_k}{b_k} \overset{13.6}{\leq} 1. \tag{13.18}$$

Sovelletaan vielä Lausetta 47. $\square$

Lemma 3. Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$. Jos

$$1 \leq |a_k| < |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{13.19}$$

niin

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{13.20}$$

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$ annettu. Asetetaan

$$\kappa_n := \frac{a_n}{b_n}, \quad \kappa_k := \frac{a_k}{b_k + \kappa_{k+1}}, \quad k = n-1, ..., 1. \tag{13.21}$$

Oletuksen (13.19) nojalla

$$1 \leq |a_k| \leq |b_k| - 1, \quad k = 1, ..., n, \tag{13.22}$$

ja

$$0 < |\kappa_n| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1. \tag{13.23}$$

Edelleen kolmioepäyhtälön nojalla

$$|b_{n-1}+\kappa_n| \geq$$
$$||b_{n-1}|-|\kappa_n|| \geq |b_{n-1}|-|\kappa_n| >$$
$$|b_{n-1}|-1 \geq |a_{n-1}| \quad (13.24)$$

Siispä

$$0 < |\kappa_{n-1}| = \frac{|a_{n-1}|}{|b_{n-1}+\kappa_n|} < 1 \quad (13.25)$$

eli

$$0 < \left|\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n}}\right| < 1, ..., \quad (13.26)$$

ja lopulta

$$0 < \left|\frac{a_1}{b_1}{}_{+}\frac{a_2}{b_2}{}_{+\ldots+}\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{A_n}{B_n}\right| < 1. \quad (13.27)$$

Niinpä

$$\tau = \lim \frac{A_n}{B_n} \quad \Rightarrow \quad |\tau| \leq 1 \quad (13.28)$$

ja samaten

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \quad \square \quad (13.29)$$

Lauseen 46 todistus. Lemman 3 nojalla

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \quad (13.30)$$

Edelleen kaikkien ehtojen nojalla

$$0 < |\tau_k| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \quad (13.31)$$

joten Lausetta 47 käyttämällä saadaan väite. □

Huomautus 13. Esimerkin (34) nojalla

$$\tau = 3 + \frac{-2}{3}{}_{+}\frac{-2}{3}{}_{+\ldots} = 2, \quad (13.32)$$

joten

$$\tau_1 = \frac{-2}{3} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{-2}{3} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\dots} = -1 \in \mathbb{Q} \tag{13.33}$$

vaikka Lauseen 46 ehto (13.8)

$$1 \leq |a_k| < |b_k| \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{13.34}$$

toteutuu. Mutta nyt

$$|\tau_1| = 1. \tag{13.35}$$

Huomautus 14.

Olkoot $a_k, b_k \in \mathbb{Z}^+$. Tarkastellaan irrationaalisuusehdon (13.6):

$$a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \tag{13.36}$$

rajamaastoa. Tiedetään, että

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n} \right) \notin \mathbb{Q} \tag{13.37}$$

ja

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1 \in \mathbb{Q}. \tag{13.38}$$

Mutta

$$\mathbb{K}_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n+1} \right) \notin \mathbb{Q}. \tag{13.39}$$

Siten, jos ehto (13.36) ei toteudu eli $a_k \geq b_k + 1$, niin ketjumurto voi olla joko rationaalinen tai irrationaalinen.

14 Transformaatioita

Lause 48. Olkoot $t_k \neq 0$ kaikilla k. Tällöin

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_2}{b_2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\dots} = \tag{14.1}$$

$$b_0 + \frac{t_1 a_1}{t_1 b_1 +} \frac{t_1 t_2 a_2}{t_2 b_2 +} \frac{t_2 t_3 a_3}{t_3 b_3 + \ldots} \tag{14.2}$$

eli

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c_k}{d_k}\right), \tag{14.3}$$

missä

$$d_0 = b_0,\ c_1 = t_1 a_1,\ d_1 = t_1 b_1, \tag{14.4}$$

$$c_k = t_{k-1} t_k a_k,\ d_k = t_k b_k, \quad \forall\ k = 2, 3, ... \tag{14.5}$$

Todistus. Olkoot (A_n/B_n) ja (C_n/D_n) ketjumurtojen konvergenttijonot. Näytetään, että

$$C_n = t_1 \cdots t_n A_n, \quad D_n = t_1 \cdots t_n B_n \quad \forall\ n = 1, 2, ... \tag{14.6}$$

Induktiolla käyttäen rekursioita

$$C_{n+2} = d_{n+2} C_{n+1} + c_{n+2} C_n, \tag{14.7}$$

$$D_{n+2} = d_{n+2} D_{n+1} + c_{n+2} D_n, \quad n = 0, 1, ... \quad \square \tag{14.8}$$

15 Kehitelmiä

15.1 Hypergeometriset sarjat

Seuraavassa tutkitaan lukujen ja funktioiden sarjakehitelmiin liittyviä rekursioita, joiden avulla muodostetaan laajahko luokka ketjumurtokehitelmiä.

Pochhammerin symboli määritellään asettamalla

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \tag{15.1}$$

jolloin esimerkiksi

$$(1)_n = n! \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{15.2}$$

Formaalia sarjaa

$${}_AF_B\left(\begin{matrix} a_1, ..., a_A \\ b_1, ..., b_B \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_A)_n}{n!(b_1)_n \cdots (b_B)_n} t^n \tag{15.3}$$

kutsutaan yleistetyksi hypergeometriseksi sarjaksi.

Seuraavassa ei välttämättä tutkita sarjojen suppenemista.

Erikoistapauksia:

Gauss' hypergeometric series

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} t^n. \tag{15.4}$$

Geometric series

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = {}_1F_0\left(\begin{matrix} 1 \\ * \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \tag{15.5}$$

Jos $A = 0$ tai $B = 0$, niin käytetään merkintää $*$.

Logarithm series

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = -\frac{\log(1-t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} t^n \tag{15.6}$$

Binomial series:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, -\alpha \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = (1-t)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-t)^n \tag{15.7}$$

Arcustangent:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}1, 1/2\\ 3/2\end{matrix}\;\middle|\; -t^2\right) = \frac{\arctan t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} \tag{15.8} $$

Eksponenttifunktio:

$$ {}_0F_0\left(\begin{matrix}*\\ *\end{matrix}\;\middle|\; t\right) = \exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \tag{15.9} $$

jonka avulla saadaan sarjaesitykset seuraaville funktioille.

Trigonometriset funktiot

$$ \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}. \tag{15.10} $$

Hyperboliset funktiot

$$ \sinh(t) = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}, \quad \cosh(t) = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}, \qquad \tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}. \tag{15.11} $$

15.2 Hypergeometrinen sarja ${}_0F_1$

Sarjalle

$$ f(c) = {}_0F_1\left(\begin{matrix}*\\ c\end{matrix}\;\middle|\; t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} t^n \tag{15.12} $$

pätee palautuskaava

$$ f(c) = f(c+1) + \frac{t}{c(c+1)} f(c+2), \tag{15.13} $$

josta saadaan

$$ f(c+k) = f(c+k+1) + \frac{t}{(c+k)(c+k+1)} f(c+k+2). \tag{15.14} $$

Niinpä

$$\frac{f(c+k)}{f(c+k+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{(c+k)(c+k+1)}}{f(c+k+1)/f(c+k+2)}. \tag{15.15}$$

Toistetaan yhtälöä (15.15), jolloin

$$\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{f(c+1)/f(c+2)} = \tag{15.16}$$

$$1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{f(c+2)/f(c+3)}} = \ldots \tag{15.17}$$

Voidaan todistaa, että ketjumurtokehitelmä

$$1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{1+\ldots}} \tag{15.18}$$

suppenee kaikilla $t \in \mathbb{C}$ kohti funktiota

$$\frac{f(c)}{f(c+1)}, \tag{15.19}$$

siten käyttämällä vielä muunnosta (14.3)saadaan

Lause 49. Olkoon $c, t \in \mathbb{C},\ c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Tällöin

$$\frac{f(c)}{f(c+1)} = 1 + \frac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{1 + \frac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{1+\ldots}} = \tag{15.20}$$

$$1 + \frac{t/c}{c+1+\frac{t}{c+2+\frac{t}{c+3+\ldots}}}. \tag{15.21}$$

Lemma 4.

$$\sinh z = z\ {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \tag{15.22}$$

$$\cosh z = {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}; \tag{15.23}$$

$$\tanh z = z\, \frac{{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4}\right)}. \tag{15.24}$$

Lemma 5.

$$\sin z = z\ {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2 \end{matrix}\ \middle|\ -\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \tag{15.25}$$

$$\cos z = {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix}\ \middle|\ -\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}; \tag{15.26}$$

$$\tan z = z\ \frac{{}_0F_1\left(\begin{smallmatrix} * \\ 3/2 \end{smallmatrix}\ \middle|\ -\frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\begin{smallmatrix} * \\ 1/2 \end{smallmatrix}\ \middle|\ -\frac{z^2}{4}\right)}. \tag{15.27}$$

Lause 50. Kaikilla $z \in \mathbb{C}$, $z \neq i(\pi/2 + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{z}{1+} \frac{z^2}{3+} \frac{z^2}{5+} \frac{z^2}{7+\ldots}. \tag{15.28}$$

Todistus. Lauseen 49 mukaan

$$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = z\ \frac{{}_0F_1\left(\begin{smallmatrix} * \\ 3/2 \end{smallmatrix}\ \middle|\ \frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\begin{smallmatrix} * \\ 1/2 \end{smallmatrix}\ \middle|\ \frac{z^2}{4}\right)} = \tag{15.29}$$

$$\frac{z}{f(1/2)/f(3/2)} = \frac{z}{1 + \frac{t/c}{c+1+\frac{t}{c+2+\frac{t}{c+3+\ldots}}}} \tag{15.30}$$

$$\overset{t=z^2/4, c=1/2}{=} \frac{z}{1 + \frac{z^2/2}{3/2+\frac{z^2/4}{5/2+\frac{z^2/4}{7/2+\ldots}}}} \tag{15.31}$$

$$= \frac{z}{1 + \frac{z^2}{3+\frac{z^2}{5+\frac{z^2}{7+\ldots}}}}. \quad \square \tag{15.32}$$

Lause 51. Kaikilla $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\tan z = \frac{z}{1+} \frac{-z^2}{3\ +} \frac{-z^2}{5\ +} \frac{-z^2}{7\ +\ldots}. \tag{15.33}$$

15.3 Kehitelmiä Neperin luvulle

Seuraus 6. Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$e^{2z} = 1 + \frac{2z}{1 - z +} \frac{z^2}{3 +} \frac{z^2}{5 + \ldots}. \tag{15.34}$$

Todistus. Yhtälön (15.28) nojalla

$$e^{2z} = -1 + \frac{2}{1 - \tanh z} = -1 + \frac{2}{1 - \frac{z}{1 + \frac{z^2}{3 +} \frac{z^2}{5 +} \ldots}} = \tag{15.35}$$

$$-1 + \frac{2}{1 - \frac{z}{1+\tau}} = \frac{1 + z + \tau}{1 - z + \tau} = 1 + \frac{2z}{1 - z + \tau}, \tag{15.36}$$

missä

$$\tau = \frac{z^2}{3 +} \frac{z^2}{5 + \ldots}. \quad \square \tag{15.37}$$

Seuraus 7.

$$e = 1 + 2[0, 1, \overline{4k+2}]_{k=1}^{\infty} = 1 + \frac{2}{1 +} \frac{1}{6 +} \frac{1}{10 + \ldots}. \tag{15.38}$$

I. Todistus. Asetetaan $z = 1/2$ kehitelmään (15.34), jolloin

$$e = 1 + \frac{1}{1/2 +} \frac{1/4}{3 +} \frac{1/4}{5 + \ldots} \overset{14.3}{=} \tag{15.39}$$

$$1 + \frac{2}{1 +} \frac{1}{6 +} \frac{1}{10 + \ldots}. \quad \square \tag{15.40}$$

Lause 52.

$$e = [2, \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty} = 2 + \frac{1}{1 +} \frac{1}{2 +} \frac{1}{1 + \ldots}. \tag{15.41}$$

$$e^2 = [7, \overline{3k-1, 1, 1, 3k, 12k+6}]_{k=1}^{\infty}. \tag{15.42}$$

Todistus. Todistetaan (15.41), kehitelmä (15.42) menee vastaavasti.

Lähdetään kehitelmästä (15.38), missä merkitään

$$\alpha = \beta_1 = \frac{2}{1 +} \frac{1}{6 +} \frac{1}{10 + \ldots}. \tag{15.43}$$

Käytetään myös merkintöjä

$$\beta_k = \frac{1}{d_k + \beta_{k+1}}, \quad d_k = 4k - 2,\ k = 2, 3, ... \tag{15.44}$$

ja

$$\alpha_0 = \beta_1 = \frac{2}{d_1 + \beta_2} = \frac{2}{1 + \beta_2}. \tag{15.45}$$

Sovelletaan ketjumurtoalgoritmia lukuun $\alpha_0 = [b_0, b_1, ...]$.

Sijoitetaan

$$\beta_2 = \frac{1}{d_2 + \beta_3} = \frac{1}{6 + \beta_3} \tag{15.46}$$

yhtälöön (15.45), jolloin

$$\alpha_0 = \frac{12 + 2\beta_3}{7 + \beta_3} = 1 + \frac{5 + \beta_3}{7 + \beta_3} = b_0 + \{\alpha_0\}; \tag{15.47}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha_0\}} = \frac{7 + \beta_3}{5 + \beta_3} = 1 + \frac{2}{5 + \beta_3} = b_1 + \{\alpha_1\}; \tag{15.48}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\{\alpha_1\}} = \frac{5 + \beta_3}{2} = 2 + \frac{1 + \beta_3}{2} = b_2 + \{\alpha_2\}; \tag{15.49}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\{\alpha_2\}} = \frac{2}{1 + \beta_3}. \tag{15.50}$$

Sijoitetaan

$$\beta_3 = \frac{1}{d_3 + \beta_4} = \frac{1}{10 + \beta_4} \tag{15.51}$$

yhtälöön (15.50), jolloin

$$\alpha_3 = \frac{2d_3 + 2\beta_4}{d_3 + 1 + \beta_4} = 1 + \frac{d_3 - 1 + \beta_4}{d_3 + 1 + \beta_4} = b_3 + \{\alpha_3\}; \tag{15.52}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\{\alpha_3\}} = \frac{d_3 + 1 + \beta_4}{d_3 - 1 + \beta_4} = 1 + \frac{2}{d_3 - 1 + \beta_4} = b_4 + \{\alpha_4\}; \tag{15.53}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\{\alpha_4\}} = \frac{d_3 - 1 + \beta_4}{2} = \frac{d_3 - 2}{2} + \frac{1 + \beta_4}{2} = b_5 + \{\alpha_5\}; \tag{15.54}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\{\alpha_5\}} = \frac{2}{1 + \beta_4}. \tag{15.55}$$

Yleisemminkin

$$\alpha_{3l-3} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-4}\}} = \frac{2}{1 + \beta_{l+1}}, \tag{15.56}$$

johon sijoitetaan

$$\beta_{l+1} = \frac{1}{d_{l+1} + \beta_{l+2}}. \tag{15.57}$$

Tällöin

$$\alpha_{3l-3} = \frac{2d_{l+1} + 2\beta_{l+2}}{d_{l+1} + 1 + \beta_{l+2}} = \tag{15.58}$$

$$1 + \frac{d_{l+1} - 1 + \beta_{l+2}}{d_{l+1} + 1 + \beta_{l+2}} = b_{3l-3} + \{\alpha_{3l-3}\}; \tag{15.59}$$

$$\alpha_{3l-2} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-3}\}} = \frac{d_{l+1} + 1 + \beta_{l+2}}{d_{l+1} - 1 + \beta_{l+2}} = \tag{15.60}$$

$$1 + \frac{2}{d_{l+1} - 1 + \beta_{l+2}} = b_{3l-2} + \{\alpha_{3l-2}\}; \tag{15.61}$$

$$\alpha_{3l-1} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-2}\}} = \frac{d_{l+1} - 1 + \beta_{l+2}}{2} = \tag{15.62}$$

$$\frac{d_{l+1} - 2}{2} + \frac{1 + \beta_{l+2}}{2} = b_{3l-1} + \{\alpha_{3l-1}\}; \tag{15.63}$$

siten jälleen

$$\alpha_{3l} = \frac{1}{\{\alpha_{3l-1}\}} = \frac{2}{1 + \beta_{l+2}}. \tag{15.64}$$

Niinpä

$$b_{3l-1} = \frac{d_{l+1} - 2}{2} = 2l, \quad b_{3l} = b_{3l+1} = 1 \tag{15.65}$$

ja siten

$$\alpha = \beta_1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2k, 1, ...], \tag{15.66}$$

josta

$$e = 1 + \beta_1 = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2k, 1, ...]. \quad \square \tag{15.67}$$

II. Todistus. Tutkitaan konvergenttijonoa

$$\frac{A_n}{B_n} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2k, 1, ..., b_n], \tag{15.68}$$

missä

$$A_{3n+1} = A_{3n} + A_{3n-1}, \quad B_{3n+1} = B_{3n} + B_{3n-1}; \tag{15.69}$$

$$A_{3n+2} = 2(n+1)A_{3n+1} + A_{3n}, \; B_{3n+2} = 2(n+1)B_{3n+1} + B_{3n}; \tag{15.70}$$

$$A_{3n+3} = A_{3n+2} + A_{3n+1}, \quad B_{3n+3} = B_{3n+2} + B_{3n+1}. \tag{15.71}$$

Asetetaan

$$\alpha_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(x-1)^n e^x \; dx, \tag{15.72}$$

$$\beta_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^n e^x \; dx, \tag{15.73}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(x-1)^{n+1} e^x \; dx. \tag{15.74}$$

Lemma 6.

$$\alpha_n = -\beta_{n-1} - \gamma_{n-1}; \tag{15.75}$$

$$\beta_n = -2n\alpha_n + \gamma_{n-1}; \tag{15.76}$$

$$\gamma_n = \beta_n - \alpha_n. \tag{15.77}$$

Huomataan, että integraaleista tulee lineaarikombinaatioita luvuista 1 ja e, joten merkitään:

Lemma 7.

$$\alpha_n = v_{3n-2}e - t_{3n-2}; \tag{15.78}$$

$$\beta_n = t_{3n-1} - v_{3n-1}e; \tag{15.79}$$

$$\gamma_n = t_{3n} - v_{3n}e. \tag{15.80}$$

Lemma 8.

$$v_n = B_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{15.81}$$

Lemma 9.

$$B_{3n-2}e - A_{3n-2} = \alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0; \tag{15.82}$$

$$B_{3n-1}e - A_{3n-1} = -\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0; \tag{15.83}$$

$$B_{3n}e - A_{3n} = -\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0; \tag{15.84}$$

Todistus.

$$\lim \frac{A_n}{B_n} = e \quad \Rightarrow \quad e = [2, \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}. \quad \square \tag{15.85}$$

16 Irrationaalisuustuloksia

Lause 53. Olkoon $r/s \in \mathbb{Q}^*$, tällöin

$$e^{r/s} \notin \mathbb{Q}. \tag{16.1}$$

Todistetaan tapaus $z = r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Yhtälön (15.28) nojalla

$$\frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1} = \frac{r}{1+}\frac{r^2}{3+}\frac{r^2}{5+}\dots+\frac{r^2}{2k-1+\tau_{k+1}} = \tau. \tag{16.2}$$

Vastaoletus

$$e^r \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1} \in \mathbb{Q}. \tag{16.3}$$

Toisaalta, valitaan k niin isoksi, että

$$b_{k+1} = 2k+1 > r^2 = a_{k+1}, \tag{16.4}$$

jolloin Lauseen 45 nojalla

$$\tau_{k+1} \notin \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \tau \notin \mathbb{Q}. \tag{16.5}$$

Ristiriita. Tapaus $e^{r/s}$ kotitehtävä. $\square$

Lause 54.

$$\pi \notin \mathbb{Q} \tag{16.6}$$

I. Todistus. Valitaan $z = \pi/4$, jolloin $\tan z = 1$ ja yhtälön (15.33) nojalla

$$z = 1 + \frac{-z^2}{3+}\frac{-z^2}{5+}\frac{-z^2}{7+\dots}. \tag{16.7}$$

Vastaoletus $\pi \in \mathbb{Q}$. Olkoon $z = \pi/4 = r/s, r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}^+$, jolloin

$$\frac{r}{s} = 1 + \frac{-(r/s)^2}{3+}\frac{-(r/s)^2}{5+}\frac{-(r/s)^2}{7+\dots} \overset{14.3}{=} \tag{16.8}$$

$$1 + \frac{-r^2}{3s^2+}\frac{-r^2}{5+}\frac{-r^2}{7s^2+\dots} = \tau, \tag{16.9}$$

missä

$$b_k = (2k+1)s^2 \quad 2 \nmid k, \quad b_k = 2k+1 \quad 2|k, \tag{16.10}$$

$$a_k = -r^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{16.11}$$

Nyt

$$b_k \geq |a_k| + 1, \quad \forall k \geq k_0 = \frac{r^2+1}{2} \tag{16.12}$$

ja siten Lemman 3 mukaan

$$|\tau_k| \leq 1 \quad \forall k \geq k_0. \tag{16.13}$$

Edelleen

$$0 < |\tau_k| = \frac{|a_k|}{|b_k + \tau_{k+1}|} \leq \frac{|a_k|}{b_k - |\tau_{k+1}|} \leq \tag{16.14}$$

$$\frac{|a_k|}{b_k - 1} \leq \frac{r^2}{2k} < \frac{r^2+1}{2k} \leq 1 \quad \forall k \geq k_0. \tag{16.15}$$

Siispä Lauseen 47 nojalla

$$\tau_k \notin \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \tau \notin \mathbb{Q}. \tag{16.16}$$

Ristiriita, sillä $\tau = r/s$. Täten vastaoletus väärä eli $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\square$

II. Todistus. Tutkitaan integraaleja

$$I_n(\pi) = \frac{1}{2n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin x \; dx, \tag{16.17}$$

jotka toteuttavat seuraavat ehdot (laskarit):

$$I_n(t) \in \mathbb{Z}[t] \quad \deg_t I_n = n; \tag{16.18}$$

$$0 < I_n(\pi) \leq \frac{\pi^{2n+1}}{n! 2^{2n+1}}. \tag{16.19}$$

Vastaoletus $\pi = r/s \in \mathbb{Q}$. Tällöin

$$s^n I_n(r/s) \in \mathbb{Z}, \tag{16.20}$$

joten

$$1 \leq s^n I_n(r/s) \leq \frac{s^n \pi^{2n+1}}{n! 2^{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{16.21}$$

Ristiriita. $\square$

Tarkemmin. Käytetään merkintää $g(x) = x^n(\pi - x)^n$, jolloin osittaisintegroinnilla

$$J_m = \int_0^\pi g(x) \sin x \; dx = g(0) + g(\pi) - g^{(2)}(0) - g^{(2)}(\pi) \tag{16.22}$$

$$+g^{(4)}(0) + g^{(4)}(\pi) - g^{(6)}(0) - g^{(6)}(\pi) + ... \tag{16.23}$$

Tässä

$$g^{(k)}(0) = g^{(k)}(\pi) = 0, \quad \forall \; k \leq n-1, \; k \geq 2n+1 \tag{16.24}$$

ja

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k g^{(k)}(\pi) = (-1)^k k! \binom{n}{k-n} \pi^{k-n}, \quad \forall \; n \leq k \leq 2n. \tag{16.25}$$

Täten

$$I_n(\pi) = \sum_{n \leq 2l \leq 2n} (-1)^{n+l} \frac{(2l)!}{n!} \binom{n}{2l-n} \pi^{2n-2l}. \tag{16.26}$$

16.1 Irrationaalisuus/lineaarinen riippumattomuus

Kerrataan, että alkioiden (vektoreitten) $\alpha_1, ..., \alpha_m$ lineaarinen vapaus (riippumattomuus) kunnan K yli (lin. vapaita$/K$) tarkoittaa sitä, että ehdosta

$$s_1\alpha_1 + ... + s_m\alpha_m = 0, \tag{16.27}$$

seraa $s_1 = ... = s_m = 0$. Olkoon vielä

$$K\alpha_1 + ... + K\alpha_m = \{k_1\alpha_1 + ... + k_m\alpha_m | \; k_1, ..., k_m \in K\}. \tag{16.28}$$

Tällöin

$$\dim_K \{K\alpha_1 + ... + K\alpha_m\} = m \quad \Leftrightarrow \tag{16.29}$$

alkiot $\alpha_1, ..., \alpha_m$ ovat lineaarisesti vapaita$/K$.

Lause 55.

$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 :\ a\alpha + b = 0. \tag{16.30}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 :\ a\alpha + b \neq 0. \tag{16.31}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad 1, \alpha \quad \text{lin. vapaita}/\mathbb{Q} \tag{16.32}$$

$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}\} = 2. \tag{16.33}$$

$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}\} = 1. \tag{16.34}$$

Esimerkki 36.

$$e \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad 1, e \quad \text{lin. vapaita}/\mathbb{Q} \tag{16.35}$$

$$\pi \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \pi\mathbb{Q}\} = 2. \tag{16.36}$$

Huomautus 15. Avoimia kysymyksiä-erittäin vaikeita.

$$e \quad \text{ja} \quad \pi \quad \text{lin. vapaita}/\mathbb{Q}? \tag{16.37}$$

$$e\pi \ \notin \mathbb{Q}? \tag{16.38}$$

$$e + \pi \ \notin \mathbb{Q}? \tag{16.39}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\log n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \ \notin \mathbb{Q}? \tag{16.40}$$

17 Lisää kehitelmiä

17.1 ${}_1F_1$

Lause 56.

$$\frac{{}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \,\middle|\, t\right)}{{}_1F_1\left(\begin{smallmatrix} a+1 \\ c+1 \end{smallmatrix} \,\middle|\, t\right)} = 1 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k t}{1}\right), \tag{17.1}$$

missä

$$a_{2k} = \frac{a+k}{(c+2k-1)(c+2k)}, \tag{17.2}$$

$$a_{2k+1} = \frac{a-(c+k))}{(c+2k)(c+2k+1)}. \tag{17.3}$$

17.2 ${}_2F_1$

Lause 57.

$$\frac{{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a,b \\ c \end{smallmatrix} \,\middle|\, t\right)}{{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a,b+1 \\ c+1 \end{smallmatrix} \,\middle|\, t\right)} = 1 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k t}{1}\right), \tag{17.4}$$

missä

$$a_{2k} = -\frac{(b+k)(c-a+k)}{(c+2k-1)(c+2k)}, \tag{17.5}$$

$$a_{2k+1} = -\frac{(a+k)(c-b+k)}{(c+2k)(c+2k+1)}. \tag{17.6}$$

Koska

$$\arctan z = z\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, -z^2\right), \tag{17.7}$$

niin

Lause 58.

$$\arctan z = \frac{z}{1+}\frac{1^2 z^2}{3\ +}\frac{2^2 z^2}{5\ +}\frac{3^2 z^2}{7\ +\ldots}. \tag{17.8}$$

17.3 π

Lause 59.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{3+}\,\frac{2^2}{5+}\,\frac{3^2}{7+\dots} = \tag{17.9}$$

$$\frac{1}{1 + \mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2k+1}\right)}. \tag{17.10}$$

17.4 e

Lause 60.

$$e = 2 + \frac{2}{2+}\,\frac{3}{3+}\,\frac{4}{4+\dots}. \tag{17.11}$$