KETJUMURTOLUVUT

Harjoituksia 2019

1. Todista/Prove
   (a) Lause 2.2. käyttäen Lausetta 2.3./by using Theorem 2.3.
   (b) Lause 2.4. käyttäen Lausetta 2.3./by using Theorem 2.3.

2. Määrää Cantorin kehitelmät luvuille
   (a)
   $$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 23,\ 117;$$
   (b)
   $$(m+1)!-1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

3. Olkoon $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Määrää lukujen
   (a)
   $$\frac{1}{b-1};$$
   (b)
   $$\frac{1}{b+1};$$
   (c)
   $$\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b+1}$$
   b-kantakehitelmät.

4. Määrää lukujen
   (a) 8/3;
   (b) 1/22
   binääri- ja 3-kantaiset esitykset.

5. Esitä luvut
   (a) $(0,123)_7$;
   (b) $(0,\overline{123})_7$;
   (c) $(0;0\overline{13})_6$
   rationaalilukuina.

6. Määrää lukujen
   $$1/7, \quad 2/7, \quad 3/7, \quad 4/7, \quad 5/7, \quad 6/7$$
   desimaaliesitykset (10-kantaiset) käyttäen Lauseen 2.5 algoritmia eli palautuskaavoja (2.11) ja (2.12). Huomaa, että muiden lukujen esitykset saadaan luvun 1/7 algoritmista.

7. Määrää lukujen
$$\frac{1}{2\cdot 7},\quad \frac{1}{4\cdot 7},\quad \frac{1}{8\cdot 7},\quad \frac{1}{5\cdot 7}$$
desimaaliesityksien alkutermien ja jaksojen pituudet käyttäen Lausetta 2.9.

8. (a) Määrää $\operatorname{ord}_{13} 10$.
   (b) Määrää luvun 1/13 desimaaliesityksen alkutermin ja jakson pituudet käyttäen Lausetta 2.9.
   (c) Määrää $\operatorname{ord}_{17} 10$.
   (d) Määrää luvun
   $$\frac{1}{2^a 5^c \cdot 7},\quad a, c \in \mathbb{N}$$
   desimaaliesityksen alkutermin ja jakson pituudet käyttäen Lausetta 2.9.

9. Olkoon $b \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$. Osoita, että
   (a)
   $$\operatorname{ord}_{(b-1)^2} b = b - 1.$$
   (b)
   $$\frac{1}{(b-1)^2} = (0, \overline{0123...b-3\ b-1})_b.$$

10. Olkoon $p \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq m \leq p-1$ ja oletetaan, että
$$\frac{1}{p} = (0, \overline{c_1 ... c_{p-1}})_b,$$
missä $p-1$ on minimijakson pituus. Osoita, että
$$\frac{m}{p} = (0, \overline{c_{k+1} ... c_{p-1} c_1 ... c_k})_b,$$
jollakin $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq p-1$

11. Olkoon $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Osoita, että
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n^2}} \notin \mathbb{Q}.$$

12. Osoita, että
$$0,123456789\ 10\ 11\ 12\ 13... \notin \mathbb{Q}.$$

13. Määrää seuraavien ketjumurtolukujen n. konvergentit, kun $n \leq 6$.
    (a)
    $$[1; 1, 1, ...];$$
    (b)
    $$[b_0; b_1, ...]_\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ...].$$

(c) Näytä b) kohtaan nojautuen, että

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{15 \cdot 7^2};$$

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{292 \cdot 113^2}.$$

14. Määrää seuraavien lukujen ketjumurtoesitykset.

(a)
$$\sqrt{6};$$

(b)
$$\sqrt{43}.$$

15. Määrää seuraavien ketjumurtolukujen arvot.

(a)
$$[\overline{2, 4}];$$

(b)
$$[2, \overline{2, 4}];$$

(c)
$$[4, 3, 2, 1, \overline{2, 4}];$$

(d)
$$[5, \overline{1, 1, 1, 10}];$$

(e)
$$[2^{2^{n-1}}, \overline{2^{2^{n-1}+1}}].$$

16. Olkoon $\alpha = [b_0, b_1, ...] > 1$ yksinkertainen ketjumurtoluku ja $A_n/B_n = [b_0, b_1, ..., b_n]$ sen n.s konvergentti.

(a) Näytä, että
$$\frac{1}{\alpha} = [0, b_0, b_1, ...];$$

(b) Johda identiteetti

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = [b_{k+1}, b_k, ..., b_0] \quad \forall\ k \in \mathbb{N};$$

(c) Johda identiteetti

$$\frac{B_{k+1}}{B_k} = [b_{k+1}, b_k, ..., b_1] \quad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

17. Osoita, että äärettömän yksinkertaisen ketjumurtoluvun $\tau = [b_0; b_1, ...]$ konvergenteille pätee

(a)

$$A_{n+2}B_n - A_nB_{n+2} = b_{n+2}(-1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(b)

$$B_n \geq F_{n+1} \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+,$$

missä (F_n) on Fibonaccin lukujono.

(c)

$$0 < \frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \tau < \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+.$$

(d)

$$(B_{n+1}\tau - A_{n+1})(B_n\tau - A_n) < 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

18. Näytä, että 377/233 on luvun

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

konvergentti (etsi sopiva tulos luennoista).

19. Määrää Neperin luku 10 desimaalin tarkkuudella käyttäen kehitelmää

(a)

$$e = [2, \overline{1, 2k, 1}]_{k=1}^{\infty}.$$

(b)

$$e = 1 + 2[0, 1, \overline{4k+2}]_{k=1}^{\infty}.$$

20. Olkoon $d \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Johda luvulle

$$\frac{1+\sqrt{4d^2+1}}{2}$$

yksinkertainen ketjumurtokehitelmä.

(b) Määrää kehitelmän

$$[d, \overline{1, 1, 2d-1}]$$

arvo.

(c) Johda luvulle

$$\sqrt{d^2+1}$$

yksinkertainen ketjumurtokehitelmä.

(d) Määrää kehitelmän

$$[d, \overline{2d}]$$

arvo.

21. Olkoon $d \in \mathbb{Z}^+$. Osoita (laskemalla kehitelmän arvo), että

(a)

$$\sqrt{d^2+2} = [d, \overline{d, 2d}].$$

(b)
$$\sqrt{d^2+4} = [d, \overline{(d-1)/2, 1, 1, (d-1)/2, 2d}], \quad 2 \nmid d \geq 3.$$

(c)
$$\sqrt{d^2-1} = [d-1, \overline{1, 2d-2}], \quad d \geq 2.$$

(d)
$$\sqrt{d^2-2} = [d-1, \overline{1, d-2, 1, 2d-2}], \quad d \geq 3.$$

(e)
$$\sqrt{d^2-4} = [d-1, \overline{1, (d-3)/2, 2, (d-3)/2, 1, 2d-2}], \quad 2 \nmid d \geq 5.$$

22. Mitkä ovat kahden edellisen tehtävän ketjumurtoesityksien jaksojen pituudet?

23. Osoita, että Diofantoksen yhtälön
$$x^2 - 7y^2 = 2$$
positiivisille ratkaisuille $x, y \in \mathbb{Z}^+$ pätee, että
$$\frac{x}{y} = \frac{A_k}{B_k},$$
jollakin luvun $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$ konvergentilla A_k/B_k. Hae ainakin kaksi ratkaisua.

24. Olkoon $d \in \mathbb{Z}^+$, $\sqrt{d} = [b_0, b_1, ...]$ irrationaalinen ja $A_n/B_n = [b_0, b_1, ..., b_n]$ sen n.s konvergentti. Käytetään Lauseen 4.16 merkintöjä.

   (a) Osoita, että
   $$A_k^2 - dB_k^2 = (-1)^{k+1} Q_{k+1}.$$

   (b) Päättele a) kohtaa apuna käyttäen, että
   $$1 \leq Q_k \leq d, \quad |P_k| \leq d-1.$$

   (c) Ratkaise Diofantoksen yhtälö
   $$x^2 - 6y^2 = -2.$$

   (d) Ratkaise Diofantoksen yhtälö
   $$x^2 - 7y^2 = 2.$$

25. Näytä, että
$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} {}_{+} \frac{a_2}{b_2} {}_{+\ldots} = b_0 - \frac{a_1}{-b_1} {}_{+} \frac{a_2}{-b_2} {}_{+} \frac{a_3}{-b_3} {}_{+\ldots}.$$

26. Määrää ketjumurtojen

   (a)
   $$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right);$$

(b)

$$\mathbb{K}_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right);$$

arvot ratkaisemalla rekursiot ja laskemalla konvergenttijonon raja-arvo.

27. Määrää ketjumurron

(a)

$$b+\frac{a}{b}\underset{+}{}\frac{a}{b}\underset{+\ldots}{}$$

arvo, kun $a=-1, b=3$.

(b)

$$b+\frac{a}{c}\underset{+}{}\frac{d}{b}\underset{+}{}\frac{a}{c}\underset{+}{}\frac{d}{b}\underset{+\ldots}{}$$

arvo, kun $a=3, b=1, c=5, d=2$.

28. (a) Ratkaise rekursio

$$a_{n+2}-(n+3)a_{n+1}+(n+1)a_n=0.$$

(b) Olkoot $f_n=n!$ ja $e_n=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Osoita, että $\{(e_n),(f_n)\}$ on (a)-kohdan ratkaisukanta.

(c) Määrää rekursion

$$(n+2)b_{n+2}-(n+3)b_{n+1}+b_n=0$$

ratkaisukanta.

(d) Ratkaise rekursio

$$a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-(n+1)a_n=0.$$

(e) Olkoon $g_n=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Osoita, että $\{(f_n),(g_n)\}$ on (d)-kohdan ratkaisukanta.

29. Todista Lause 5.2.

30. Todista Lause 5.4.

31. Olkoon

$$x_n+y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n \quad \forall\, n\in\mathbb{Z}^+.$$

Määrää palautuskaavat luvuille x_n ja y_n (Katso: Esimerkki 15).

32. Näytä, että

(a)

$$\sin z = z\ {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 3/2\end{matrix}\,\middle|\, -\frac{z^2}{4}\right);$$

(b)

$$\cosh z = {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ 1/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{z^2}{4}\right);$$

(c)

$$\frac{\arctan t}{t} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \,\middle|\, -t^2\right).$$

33. Osoita, että sarjalle

$$f(c) = {}_0F_1\left(\begin{matrix} * \\ c \end{matrix} \,\middle|\, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(c)_n} t^n$$

pätee palautuskaava

$$f(c) = f(c+1) + \frac{t}{c(c+1)} f(c+2).$$

34. Käyttäen tulosta

$$\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{z}{1+} \frac{z^2}{3+} \frac{z^2}{5+} \frac{z^2}{7+\ldots}$$

näytä, että

(a)

$$e^{\frac{r}{s}} \notin \mathbb{Q} \quad \forall\, r/s \in \mathbb{Q}^*.$$

(b)

$$\log \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \quad \forall\, a/b \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}.$$

(c)

$$\log 2 \notin \mathbb{Q}.$$

35. Määrää luvun e^2 yksinkertainen ketjumurtokehitelmä

$$e^2 = [7, \overline{3k-1, 1, 1, 3k, 12k+6}]_{k=1}^{\infty}.$$

36. Näytä, että

$$I_n(\pi) = \frac{1}{2n!} \int_0^{\pi} x^n (\pi - x)^n \sin x \, dx = \sum_{n \le 2l \le 2n} (-1)^{n+l} \frac{(2l)!}{n!} \binom{n}{2l-n} \pi^{2n-2l}.$$

37. Osoita, että

$$1 + \cfrac{\frac{t}{(c)(c+1)}}{1 + \cfrac{\frac{t}{(c+1)(c+2)}}{1 + \ldots}} = 1 + \cfrac{t/c}{c + 1 + \cfrac{t}{c + 2 + \cfrac{t}{c + 3 + \ldots}}}.$$

38. Osoita, että

$$\cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2/2}{3/2 + \cfrac{z^2/4}{5/2 + \cfrac{z^2/4}{7/2 + \ldots}}}} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \ldots}}}}.$$

39. Todista

(a)
$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, a,b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0:\ a\alpha + b = 0.$$

(b)
$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, a,b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0:\ a\alpha + b \neq 0.$$

(c)
$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad 1, \alpha \quad \text{lin. vapaita}/\mathbb{Q}$$

(d)
$$\alpha \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}\} = 2.$$

(e)
$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \alpha\mathbb{Q}\} = 1.$$

40. Todista

(a)
$$e \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad 1, e \quad \text{lin. vapaita}/\mathbb{Q}$$

(b)
$$\pi \notin \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{Q} + \pi\mathbb{Q}\} = 2.$$