802656S ALGEBRALLISET LUVUT

Harjoituksia 2020

1. Näytä, että/Show that

   (a)
   $$2^{1/2}, \quad 3^{1/2}, \quad 2^{1/3};$$

   (b)
   $$2^{1/2} + 3^{1/2};$$

   (c)
   $$2^{1/3} + 3^{1/2};$$

   (d)
   $$e^{i\pi/m}, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

   (e)
   $$\sin(\pi/m),\ \cos(\pi/m),\ \tan(\pi/m), \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

   ovat algebrallisia lukuja/are algebraic numbers.

2. Olkoon K kokonaisalue/Let K be an integral domain ja $P(x), Q(x) \in K[x]$.

   (a) Todista, että/Prove that
   $$\deg P(x)Q(x) = \deg P(x) + \deg Q(x).$$

   (b) Osoita, että jos nolla-polynomille pätisi/Show that, if the zero-polynomial would satisfy
   $$\deg 0(x) \in \mathbb{Z},$$
   niin a) kohdan astekaava ei toimisi/then the degree formula would not work.

3. Näytä, että renkaat/Show that the rings

   (a)
   $$\mathbb{Z}_{10};$$

   (b)
   $$\mathbb{Z}_{10}[x];$$

   eivät ole kokonaisalueita/are not integral domains.

4. Olkoon R kommutatiivinen ykkösellinen rengas/Let R be a commutative ring with unity.

   (a) Näytä, että yksikköjen joukko/Show that the set of units
   $$R^* = \{u \in R \mid \exists\ u^{-1} \in R : \ uu^{-1} = 1\}$$
   on ryhmä kertolaskun suhteen/is a group with respect to multiplication.

(b) Osoita, että relaatio

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists \quad u \in R^* : \; b = ua$$

on ekvivalenssirelaatio.

(c) Määrää/Determine

$$[1] = \{b \sim 1 | \; b \in R\}.$$

5. Määrää

(a)

$$\mathbb{Z}_{10}^*;$$

(b)

$$\mathbb{Z}_{10}[x]^*;$$

(c)

$$\mathbb{Z}_m^*, \quad m \in \mathbb{Z}_{m \geq 2};$$

(d)

$$\mathbb{Z}_m[x]^*, \quad m \in \mathbb{Z}_{m \geq 2};$$

(e)

$$\mathbb{Z}[i]^*;$$

(f)

$$\mathbb{Z}_5[\sqrt{2}]^*;$$

6. Olkoon D kokonaisalue. Näytä, että

(a)

$$0|0;$$

(b)

$$a|a \quad \forall \; a \in D.$$

(c)

$$1|a \quad \forall \; a \in D.$$

7. Olkoon $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(a) Onko R kokonaisalue?

(b) Määrää R:n yksikköryhmä R^*.

(c) Määrää lukujen 3 ja $2 + \sqrt{-5}$ liitännäisalkiot/Determine the associates of the numbers.

(d) Ovatko 3 ja $2 + \sqrt{-5}$ jaottomia/are the numbers irreducible?

(e) Ovatko 3 ja $2 + \sqrt{-5}$ alkualkioita/primes? (Tutki yhtälöä/investigate the equation $3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$.)

(f) Onko R UFD?

(g) Onko R Eukleideen alue/domain?

8. Tutki polynomien

$$x^4 + x + 1, \quad x^4 + 1$$

jaottomuutta polynomirenkaassa/investigate the irreducibility of the polynomials in the ring $K[x]$, kun

   (a) $K = \mathbb{Q}$;
   (b) $K = \mathbb{R}$;
   (c) $K = \mathbb{C}$;
   (d) $K = \mathbb{Z}_2$;
   (e) $K = \mathbb{Z}_3$.

9. Determine $\gcd(a(x), b(x))$ in the polynomial ring $\mathbb{Q}[x]$, when

   (a) $a(x) = x^4 + x + 1, \quad b(x) = x^4 + 1$;
   (b) $a(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \quad b(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$.

10. Määrää polynomin $a(x)$ ja sen derivaatan $Da(x)$ $\mathrm{syt}(a(x), Da(x))$ polynomirenkaassa $\mathbb{Q}[x]$, kun

   (a) $a(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 1$;
   (b) $a(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

   Mitä huomaat? What do you notice?

11. Tutki polynomin

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

nollakohtien kertalukuja/orders of the zeros polynomirenkaassa $K[x]$, kun

   (a) $K = \mathbb{Q}$;
   (b) $K = \mathbb{R}$;
   (c) $K = \mathbb{C}$;
   (d) $K = \mathbb{Z}_2$;
   (e) $K = \mathbb{Z}_3$.

12. Jaa/factor polynomit

   (a) $x^2 + 2351x + 125$;
   (b) $6x^2 + 7x - 5$;
   (c) $6x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 7x - 5$;
   (d) $x^4 + 7$;
   (e) $x^4 + 4$;
   (f) $x^5 + x + 1$;
   (g) $x^5 - x + 1$;

jaottomiin primitiivisiin tekijöihin polynomirenkaassa/into irreducible primitive factors $\mathbb{Z}[x]$.

13. Olkoon D kokonaisalue. Osoita, että $D[x]^* = D^*$.

14. Olkoon K kunta, $p(x) \in K[x]$ ja $\deg p(x) \geq 1$. Osoita, että $n_K(p(x)) \leq \deg p(x)$.

15. Näytä, että

    (a) $1 + x + x^2 + ... + x^{10} \in J_{\mathbb{Q}[x]}$;
    (b) $7 + 7x - 14x^3 + 2x^5 \in J_{\mathbb{Q}[x]}$;
    (c) $2 - 14x^2 + 7x^4 + 7x^5 \in J_{\mathbb{Q}[x]}$;
    (d) $2 - 14(x-1)^2 + 7(x-1)^4 + 7(x-1)^5 \in J_{\mathbb{Q}[x]}$.

16. Olkoon
$$x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta) \in \mathbb{Q}[x].$$
    Näytä, että

    (a) $\alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{Q}$;
    (b) $\alpha^3 + 2\alpha\beta + \beta^3 \in \mathbb{Q}$.

17. Määrää luvun

    (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;
    (b) $2^{1/3} + 3^{1/3}$;

    minimipolynomi.

18. Onko
$$\frac{1 + \sqrt{37}}{3}$$
    kokonainen algebrallinen luku?

19. Tutki lukujen

    (a) e;
    (b) π;
    (c) $i\pi$;
    (d) $e + i$;
    (e) $i2^{1/3}$;

    algebrallisuutta kuntien $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ suhteen. (tiedetään, että e ja π ovat transkendenttisia $\mathbb{Q}$:n yli.)

20. Tutki lukujen

    (a) $\sqrt{\pi}$;
    (b) $\sqrt{-\pi}$;

(c) π^2;

algebrallisuutta kuntien $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ ja $\mathbb{Q}(\sqrt{-\pi})$ suhteen.

21. Olkoon $\mathbb{K}$ lukukunta ja $\sigma : \ \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ monomorfia. Osoita, että

    (a) $\sigma(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{Q}$.

    (b) $\sigma(a\alpha + b\beta) = a\sigma(\alpha) + b\sigma(\beta), \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

    (c) $\sigma(p(\beta)) = p(\sigma(\beta)) \quad \forall \beta \in \mathbb{K}, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

22. Määrää algebrallisten lukujen (kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen)

    (a) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$;

    (b) $\alpha = 2^{1/3} + 3^{1/3}$;

    (c) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$;

    asteet ja liittoluvut sekä määrää vastaavien peruspolynomien

    $$s_k(\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), ...), \quad k = 1, 2, ...,$$

    arvot/degrees, conjugates and determine the values of the corresponding elementary symmetric polynomials.

23. Määrää algebrallisen kuntalaajennuksen $\langle \mathbb{Q}, \alpha, \beta \rangle$ dimensio ja jokin kanta kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen, kun/ Determine the dimension and a basis of the algebraic field extension $\langle \mathbb{Q}, \alpha, \beta \rangle$ over the field $\mathbb{Q}$, when

    (a) $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{3}$;

    (b) $\alpha = 2^{1/5}, \beta = 0$;

    (c) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \beta = 0$;

24. Määrää algebrallisen kuntalaajennuksen $\langle \mathbb{K}, \alpha, \beta, \gamma \rangle$ dimensio ja jokin kanta kunnan $\mathbb{K}$ suhteen, kun

    (a) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = \sqrt{15}, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

    (b) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = 0, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$;

    (c) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = \sqrt{7}, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

    (d) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = 0, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$;

25. Esitä kunnat $\langle \mathbb{K}, \alpha, \beta, \gamma \rangle$

    (a) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = \sqrt{15}, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

    (b) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = 0, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$;

    (c) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = \sqrt{7}, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

    (d) $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{5}, \gamma = 0, \ \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$;

    muodossa $\mathbb{Q}(\tau)$.

26. Olkoon $\deg_{\mathbb{Q}} \alpha = n$. Määrää lukukunta $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ muodossa

$$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha + ... + \mathbb{Q}\alpha^{n-1},$$

kun

(a) $\alpha^2 + 1 = 0$;

(b) $\alpha^2 - 3 = 0$;

(c) $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$;

(d) $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$;

(e) $\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$.

Näytä vielä, että

$$\frac{\alpha^3 - 7}{\alpha^5 + \alpha + 2} \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha + ... + \mathbb{Q}\alpha^{n-1}$$

mikäli lauseke on määritelty/whenever the expression is determined.

27. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\tau)$ lukukunta ja $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = m$. Osoita, että

(a) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$;

(b) $T(r\alpha + s\beta) = rT(\alpha) + sT(\beta)$;

(c) $N(r) = r^m, \quad T(r) = mr$;

kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $r, s \in \mathbb{Q}$.

28. Osoita, että $\alpha \notin \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\tau)$, kun

(a) $\alpha = 3^{1/2}$ ja $\tau = 2^{1/2}$;

(b) $\alpha = 3^{1/2}$ ja $\tau = 2^{1/3}$;

(c) $\alpha = 3^{1/2}$ ja $\tau = 2^{1/4}$;

(d) $\alpha = 3^{1/3}$ ja $\tau = 2^{1/3}$;

(e) $\alpha = 3^{1/3}$ ja $\tau = 2^{1/4}$;

(f) $\alpha = 3^{1/4}$ ja $\tau = 2^{1/6}$;

Vihje: Käytä jälkifunktiota ja tai dimensiotuloksia.

29. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Osoita, että

$$2^{1/n} + 3^{1/n} \notin \mathbb{Q}.$$

30. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Määrää renkaiden $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ja $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ kannat $\mathbb{Z}$:n suhteen tapauksissa

(a) $d = -1$;

(b) $d = -2$;

(c) $d = -3$;

(d) $d = -4$;

(e) $d = -5$.

Käytä luentojen Lausetta 14.1.

31. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Määrää yksikköryhmät $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}^*$ tapauksissa

    (a) $d = -1$;

    (b) $d = -2$;

    (c) $d = -3$;

    (d) $d = -5$.

32. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Osoita, että $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ on Eukleideen alue, kun

    (a) $d = -1$;

    (b) $d = -2$;

    (c) $d = -3$.

33. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Osoita, että $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ ei ole Eukleideen alue, kun

    (a) $d = -5$, esimerkiksi tutkimalla identiteettiä
    $3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$.

34. Määrää kaikki Gaussin kokonaislukujen renkaan $\mathbb{Z}[i]$ alkualkiot eli Gaussin alkuluvut $\pi = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, joille pätee

    (a) $N(\pi) \leq 13, \quad 0 \leq b \leq a$.

    (b) $N(\pi) \leq 13$.

    Piirrä kuva Gaussin tasoon.

35. Ratkaise Diofantoksen yhtälö
$$y^2 + 4 = x^3.$$

36. (a) Näytä, että
    $1 + i \sim 1 - i$;

    (b) Näytä, että
    $2 + i \not\sim 1 + 2i$;

    (c) Muodosta alkioiden 6 ja 10 alkutekijäkehitelmät;

    Gaussin kokonaislukujen renkaassa $\mathbb{Z}[i]$.