

FOURIER-SARJAT

HEIKKI APIOLA

Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos
Syksy 2003

Huom! Tämä ei kata kaikkea Fourier-sarjoista. Lisäksi on syytä konsultoida kirjoja ja/tai luentomuistiinpanoja. Painovirheitä ja keskeneräisyyksiä saattaa olla.

SISÄLTÖ

Johdanto, merkintöjä	ii
Viitteet	1
1. Jaksolliset funktiot, trigonometriset sarjat	2
1.1. Trigonometrinen sarja	3
Parilliset ja parittomat funktiot	3
2. Jaksollisen funktion Fourier-sarja	6
2.1. Eulerin kaavat Fourier-sarjan kertoimille	6
2.2. Esimerkkejä Fourier-sarjoista	9
2.3. Fourier-sarjojen suppeneminen	12
2.4. Mielivaltainen jakso $p = 2L$	13
2.5. Fourier-sarjan suppeneminen	15
3. Esimerkkejä Fourier-sarjoista	17
Jaksolliset, parilliset ja parittomat fkt.	17

JOHDANTO, MERKINTÖJÄ

Kirjallisuutta:

[Kre99, Luku 10],[J⁺99, Luku] ,[C⁺01, Luku 23], [BN01, Luku 1] ,[M.D88, Luku 10]

Aaltomuotojen analysointi... Fourier-analyysi antaa työkalut, joiden avulla aalto voidaan jakaa taajuuskomponentteihinsa.

Usein on hyödyllistä ajatella signaalia taajuuskomponenttiesityksenä, eikä pelkästään aikaesityksenä.

Signaalin suodatus ...

Suodatetaan pois taajuudet, joita ei haluta, jotka ovat teheneet tehtävänsä, kuten kantoaalto.

Historiaa: Trig. sarjat 1700-luvulla värähtelevien kielten yms. yhteydessä.

1808 Fourier: Lämmönjohtuminen, julkaistiin vasta 1822

Riemann-integraali, lebesgue-integraali syntyivät tässä yhteydessä. "arose in the study of F-series"(and the related F-transf.)

Sovellutuksia: Tod ja til., signaalinkäsittely, kvanttimekaniikka...

datan pakkaaminen ...

200 vuotta on kulunt, edelleen tärkeä sekä teoreettisesti että sovelluksissa. (niissä ja nyt vasta onkin!)

[Ben77] For a historical survey + references ...

Klassinen Fourier-sarja Sturm-Liouville: Where Fourier series "comes from"Jakso $\rightarrow \infty$ -> Fourier-integraali -> Fourier-muunnos

Euler 1707-1783

D'Alembert 1717-1783

Bernoulli 1700 - 1782

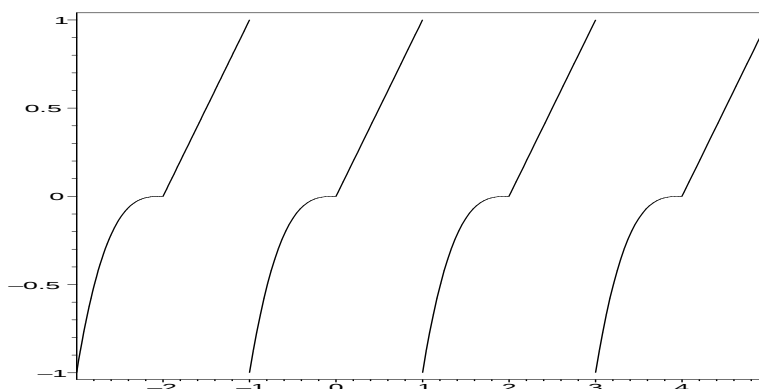
Clairault 1713-1765

Dirichlet 1805-1859 riittävät ehdot 1829

History: Jeffrey: Trig. series 1956, Kline: Math. Thought ... 1972

VIITTEET

- [Ben77] J. J. Benedetto. *Harmonic Analysis and Applications*. CRC Press, 1977.
- [Bet97] [D]avid Betounes. *Partial Differential Equations for Computational Science*. Springer, 1997.
- [BN01] Albert Boggess and Narcowich. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Prentice Hall, 2001.
- [BWC97] E. Boyce W[illiam] and DiPrima R[ichard] C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 6 edition, 1997.
- [C⁺01] A. Croft et al. *Engineering Mathematics*. Prentice Hall, 2001.
- [J⁺99] Glyn James et al. *Advanced Engineering Mathematics*. Addison Wesley, 1999.
- [Kre99] E[rwin] Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, eighth edition, 1999.
- [M.D88] Greenberg M.D. *Advanced Engineering Mathematics*. Prentice Hall, 1 edition, 1988.



KUVA 1. Jaksollinen funktio, jakso=2

luku1.tex Päivitys 3.12.03

1. JAKSOLLISET FUNKTIOT, TRIGONOMETRISET SARJAT

Funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on jaksollinen, jaksona $p > 0$, jos $f(x+p) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos f on p -jaksoinen, niin se on kp -jaksoinen kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Pienin tällainen luku p on *perusjakso*.

Onko nyt varmasti tällainen pienin jakso aina olemassa? No eipä olekaan! Vakiofunktio on selvästi jaksollinen miten pienin jaksoin hyvänsä, ts. jokainen $p > 0$ kelpaa jaksoksi.

Jaksollinen funktio ($p = 2$) näyttää tyypillisesti kuvan 1 mukaiselta.

Huomautus 1.1. Signaalinkäsittelyn yhteydessä erityisesti merkitään yleensä muuttujaa t :llä, viitaten aikaan. Usein jaksoa merkitään tällöin kirjaimella T .

Noudatamme tässä enimmäkseen kirjan [Kre99, Luku 10] merkintöjä, mutta esittelemme myös muita yleisessä käytössä olevia tilaisuuksien tullen.

Esimerkki 1.1. Tutuimmat ja perustavanlaatuisimmat jaksolliset funktiot ovat $\sin$ ja $\cos$, joiden (perus)jakso $= 2\pi$.

Jos ω on positiivinen reaaliluku, niin $\cos \omega x$ ja $\sin \omega x$ ovat $\frac{2\pi}{\omega}$ -jaksoisia, sillä olkoon vaikkapa $f(x) = \cos \omega x$ ja olkoon $p = \frac{2\pi}{\omega}$. Tällöin

$$f(x+p) = \cos \omega(x+p) = \cos(\omega x + 2\pi) = \cos \omega x = f(x).$$

Kokoamme yhteen joitakin jaksollisten funktioiden ominaisuuksia, jotka ovat välittömiä seurauksia määritelmästä.

Lause 1.1. p -jaksoisten funktioiden summa on p -jaksoinen,

vakio kertaa p -jaksoinen funktio on edelleen p -jaksoinen.

Jos funktio on p -jaksoinen, niin se on np -jaksoinen jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Kaksi ensimmäistä ominaisuutta tarkoittavat lineaarialgebran kielellä ilmaistuna: *p -jaksoiset funktiot muodostavat vektori(ali)avaruuden.*

Edellisen esimerkin mukaan erityisesti $\cos nx$ ja $\sin nx$ ovat $\frac{2\pi}{n}$ -jaksoisia ja siten myös 2π -jaksoisia, joten muotoa

$$a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

oleva summa on 2π -jaksoinen. Jos tällaiset summat lähestyvät raja-arvoa $s(x)$, kun $N \rightarrow \infty$, niin raja-funktio $s(x)$ on myös 2π -jaksoinen. Kyseessä on tällöin *trigonometrinen sarja*, joka on pääasiallinen mielenkiintomme kohde seuraavassa.

1.1. Trigonometrinen sarja. Tutkimme trigonometrista sarjaa:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Erityisesti signaalianalyysin yhteydessä merkitsemme muuttujaa usein x :n sijasta t :llä. Edustakoon $f(t)$ signaalia, kuten ajasta riippuvaa sähköjännitettä, musiikki-instrumentin tuottamaa ääniaaltoa tms. Funktion f esitys trigonometrisena summana antaa signaalin esityksen eri taajuuskomponenttien avulla.

Tyyppiä $\sin kt$ olevan siniaallon jakso on $\frac{2\pi}{k}$ ja (kulma)taajuus k (ts. k värähdysjaksoa 2π :n pituisella aikavälillä.) Kulmataajuus voi olla tietysti myös mielivaltainen positiivinen reaaliluku ω , jolloin siniaalto on $\sin \omega t$, jakso $= \frac{2\pi}{\omega}$ ja taajuus (värähdystä aikayksikössä) on $\frac{\omega}{2\pi}$.

Jos signaalimme on vaikkapa

$$f(t) = 2 \sin t - 100 \sin 3t + 10 \sin 50t,$$

niin se sisältää taajuuskomponentit, jotka värähtelevät (kulma)taajuuksilla 1, 3 ja 50 kertaa 2π :n levyistä aikaväliä kohti. Taajuudella 3 värähtelevä komponentti dominoi, sen amplitudi 100 on merkittävästi suurempi muiden komponenttien amplitudeja.

Kaksi tyypillistä sovellusaluetta:

- 1) Korkeataajuuksisen "kohinan" suodattaminen Data compression [BN01, Luku 1,1.1.2] s. 38 alh.
- 2) Datan pakkaaminen

Tavallinen tehtävä signaalinkäsittelyssä on tiedon pakkaaminen. Tarkoituksena on lähettää signaali siten, että minimoidaan siirrettävän tiedon määrä, mutta säilytetään mahdollisimman hyvin olennainen tietosisältö. Eräs tapa on esittää signaali trigonometrisenä sarjana ja lähettää vain ne kertoimet a_k, b_k , jotka ovat itseisarvoltaan suurempia kuin jokin annettu toleranssi.

Voidaan osoittaa, että yleisillä funktiota f koskevilla ehdoilla kertoimet $a_k \rightarrow 0$ ja $b_k \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$ (*Riemann-Lebesgue*-lemma). Siten jokaista annettua (positiivista) toleranssia kohti vain äärellinen määrä kertoimia jää lähetettäväksi.

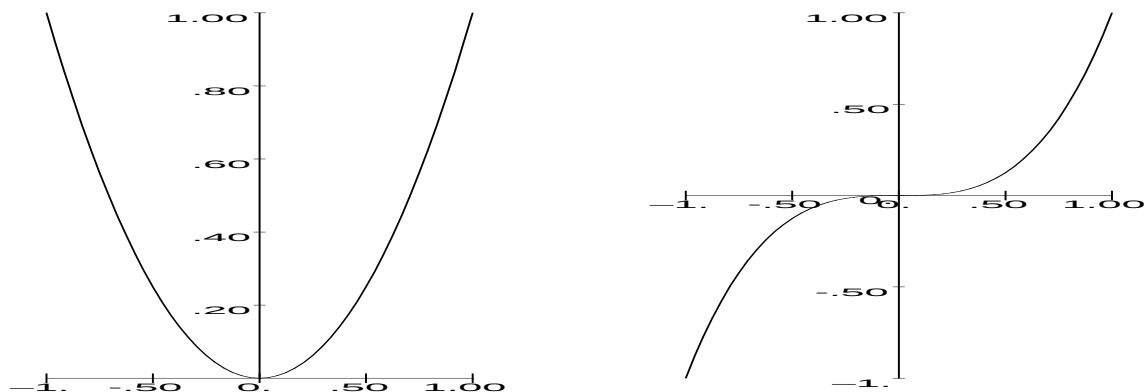
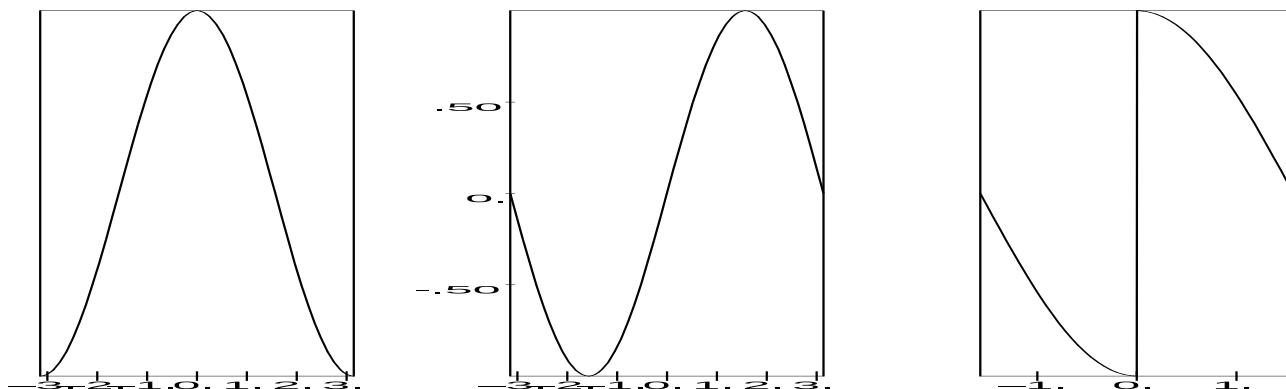
Parilliset ja parittomat funktiot. Tarkastelemme funktiota $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Määritelmä 1.1. Funktio f on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ ja *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x .

Tyypiesimerkkejä parillisista funktioista ovat parilliset potenssifunktiot sekä $\cos$ ja $\cosh$ ja parittomista vastaavasti parittomat potenssit, $\sin$ ja $\sinh$.

Muita esimerkkejä: e^{-x^2} , sgn . Jälkimmäinen tarkoittaa "merkki-funktiota, ts. funktiota, joka saa arvot $-1, 0, 1$ sen mukaan, onko argumentti negatiivinen, nolla vai positiivinen. Lukija päätelkään näiden funktioiden parillisuus/parittomuus-käytöksen. Alla on muutama tyypillinen kuva.

Huomautus 1.2. 1. Mielivaltainen reaaliakselilla määritelty funktio ei yleensä ole parillinen eikä pariton.

KUVA 2. Parillinen (x^2) ja pariton (x^3)KUVA 3. Parillinen ($\cos$), pariton ($\sin$) ja pariton epäjatkuva funktio

2. Jokainen positiivisella reaaliakselilla määritelty funktio voidaan jatkaa koko reaaliakselille parilliseksi tai yhtä hyvin parittomaksi funktioksi. Edellinen saadaan aikaan määrittelemällä $f(x) = f(-x)$, kun $x < 0$ ja jälkimmäinen määrittelemällä $f(x) = -f(-x)$, kun $x < 0$.

Niinpä silmämääräisesti on vaikea sanoa, olisiko edellisen kuvan 2 vasen ruutu sittenkin funktion $f(x) = x^3$ parillinen jatko ja oikea ruutu taas funktion $f(x) = x^2$ pariton jatko.

Välitön seuraus määritelmästä on:

Lause 1.2. $\text{pariton} \times \text{pariton} = \text{parillinen}$,
 $\text{pariton} \times \text{parillinen} = \text{pariton}$,
 $\text{parillinen} \times \text{parillinen} = \text{parillinen}$

Todistus. Kyse on vain siitä, että kahden samanmerkkisen luvun tulo on positiivinen ja erimerkkisten tulo on negatiivinen. Täsmällinen todistus menee näin:

Olkoot f ja g parittomia. Tällöin

$$fg(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = f(x)g(x) = fg(x).$$

Muut kohdat vastaavasti. □

Parillisen ja parittoman funktion integrointi yli symmetrisen välin. Fourier-kertoimien laskemisessa on syytä tottua käyttämään sujuvasti hyväksi yksinkertaista ja havainnollista integrointiseikkaa:

Lause 1.3. a) Jos f on pariton ja $c > 0$, niin

$$\int_{-c}^c f(x) dx = 0.$$

(b) Jos f on parillinen, niin

$$\int_{-c}^c f(x) dx = 2 \int_0^c f(x) dx.$$

Todistus. Jos tulkitsemme integraalin pinta-alana, niin vakuutemme asiasta välittömästi kuvaa katso-
malla. Muodollinen todistus voidaan tehdä joko suoraan integraalin määritelmään nojautuen tai kaikkein
mekaanisimmin suorittamalla muuttujanvaihto $x = -t$ sopivassa kohdassa. (Harj. teht.) $\square$

luku2.tex Päivitys 3.12.03

2. JAKSOLLISEN FUNKTION FOURIER-SARJA

Peruskursseilla 1-2 on kehitetty "sileitä" funktioita *Taylorin sarjoiksi* ja tutkittu, millä ehdoilla sarja suppenee ja esittää annettua funktiota. Kyseessä on potenssisarja:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

missä kertoimet saadaan kaavalla $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Tyypillisesti tällainen sarja esittää funktiota jossain kehityskeskuksen x_0 riittävän pienessä ympäristössä.

Voimme sanoa, että Taylorin sarja on kehitelmä, jossa "kantafunktioina" ovat monomit $(x - x_0)^n$.

Tällä kertaa tarkastelemme koko reaaliakselilla määriteltyä jaksollista funktiota ja etsimme sille sarjakehitelmää jaksollisten "kantafunktioiden" $\cos nx$ ja $\sin nx$ avulla.

2.1. Eulerin kaavat Fourier-sarjan kertoimille. Olkoon $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jaksollinen, oletamme aluksi merkintöjen yksinkertaistamiseksi, että jaksona on $p = 2\pi$. Myöhemmin palautamme yksinkertaisella muuttujan vaihdolla yleisen tapauksen tähän.

Kuten usein matematiikassa, lähdemme liikkeelle siitä oletuksesta, että funktiolla on suppeneva sarjaesitys:

$$(2.1) \quad f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Johdamme kertoimille välttämättömät lausekkeet. Myöhemmin tarkastelemme ehtoja, joiden vallitessa sarjakehitelmä on voimassa.

Huomautus 2.1. Merkitsemme vakiokerrointa tavallisuudesta poiketen A_0 :lla. Tämä siksi, että joissakin kirjoissa vakio esitetään muodossa a_0 (esim. KRE) ja toisissa taas $\frac{a_0}{2}$ (esim. Lop)

Kertoimien johtaminen on helppoa. Se perustuu ortogonaalisuusideaan. Kyseessä on aivan sama asia kuin esitettäessä vektoriavaruuden vektoria ortogonaalisen kannan avulla.

Palautamme tämän mieleen, niin näemme.

Olkoon $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vektoriavaruuden kanta. Halutkaamme esittää annettu vektori $\mathbf{v}$ tämän kannan avulla. Tässä tapauksessa tiedämme, että on olemassa esitys:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{e}_k.$$

Kerrotaan tämä esitys puolittain sisätulon mielessä kantavektoreilla $\mathbf{e}_j$, jolloin saadaan:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = \xi_j,$$

koska $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{k,j}$.

Muistele lineaarialgebraa suuttua!

Fourier-sarjan tapauksessa "kantavektoreina" on funktiot $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$. Voimme määritellä funktioavaruudessa sisätulon integraalina:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Aivan kuten tutummissakin vektoriavaruuksissa, sanomme funktioavaruuden vektoreita f ja g *ortogonaalisiksi* ja merkitsemme $f \perp g$, jos $\langle f, g \rangle = 0$.

Tehtävänä on ensin osoittaa, että kantafunktiot muodostavat ortogonaalisen joukon.

Siihen tarvitsemme trigonometrisia kaavoja, joilla sinin ja kosinin tulot saadaan lausutuksi summoina.

Kosinin yhteenlaskukaavat:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(-\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{cases}$$

Laskemalla ensin yhteen ja sitten vähentämällä puolittain saadaan kosinien ja sinien tulot lausutuksi summien avulla, jolloin integrointi käy helposti.

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\cos(\beta) = 1/2 \cos(-\alpha + \beta) + 1/2 \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) = -1/2 \cos(\alpha + \beta) + 1/2 \cos(-\alpha + \beta) \end{cases}$$

Näistä saadaan sijoittamalla $\alpha = nx$ ja $\beta = mx$:

$$\begin{cases} \cos(nx)\cos(mx) = 1/2 \cos(nx - mx) + 1/2 \cos(nx + mx) \\ \sin(nx)\sin(mx) = -1/2 \cos(nx + mx) + 1/2 \cos(nx - mx) \end{cases}$$

Tämän trigonometrisen pikku harjoitelman jälkeen saamme ortogonaalisuustuloksen aivan suoraan:

1. $\cos nx \perp \cos mx$, jos $n \neq m$, sillä

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1/2 \cos((n-m)x) + 1/2 \cos((n+m)x)) dx = 0,$$

kun $n \neq m$.

Jos $n = m$, saadaan integraaliksi $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \pi$

2. $\sin nx \perp \sin mx$, jos $n \neq m$, sillä

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (-1/2 \cos((n+m)x) + 1/2 \cos((n-m)x)) dx = 0,$$

kun $n \neq m$.

Jos $n = m$, saadaan integraaliksi $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx))^2 dx = \pi$

3. $\cos nx \perp \sin mx$ aina (vaikka olisi $n = m$), sillä $\sin$ on pariton ja $\cos$ on parillinen, joten niiden tulo on pariton, ja siten integraali yli $0:n$ suhteen symmetrisen välin $= 0$.

Kertoimien johtaminen

Toimimme edellä olevan vektoriavaruusmallin mukaisesti, kun käytössämme on trigonometrisen systeemin muodostama ortogonaalinen "kanta". Tällä kertaa käsittelemme kuitenkin ääretöntä summaa. Tässä vaiheessa vältämme vaikeudet olettamalla, että on luvallista operoida samaan tapaan kuin äärellisillä summilla.

Myöhemmin palaamme kysymykseen operaatioiden luovallisuudesta. Tämä on hyvin tavallista matematiikassa. Katsotaan, mitä seuraa, jos teemme sellaisia oletuksia, joiden vallitessa saamme tuloksia johdetuksi. Voimassaolotarkastelu tehdään sitten erikseen (tai vedotaan siihen, että se "voidaan tehdä").

Olettakaamme siis, että annettu 2π -jaksoinen funktio f voidaan esittää sarjana

$$(2.2) \quad f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Kerroin A_0

Kerrotaan yhtälö (2.2) puolittain vakiofunktiolla 1 ja integroidaan $\int_{-\pi}^{\pi}$. (Idea: $1 \perp \cos nx$, $1 \perp \sin nx$.)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= A_0 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = \\ &= A_0 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx}_{=0} \end{aligned}$$

Saadaan siis:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Kertoimet a_n , $n \geq 1$

Periaate on aivan sama kuin edellä. Jos $n \geq 1$ on kiinnitetty, kerrotaan yhtälö (2.2) puolittain $\cos nx$:llä ja integroidaan. Tällöin summan kaikki muut termit ovat $= 0$, paitsi $\cos nx$ -termi:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= A_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx}_{=0, \text{ kun } k \neq n} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx}_{=0 \quad \forall k} \end{aligned}$$

Näin saadaan yhtälö:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = a_n \pi,$$

josta ratkaistaan:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

Kertoimien b_n määrittäminen

Ei ole vaikea arvata: Kerrotaan yhtälö (2.2) puolittain $\sin nx$:llä ja integroidaan.

Näin päädytään kaavaan:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Olemme näin johtaneet **Eulerin kaavat Fourier-kertoimille**:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad f(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Kertoimia (2.3) sanotaan siis funktion f *Fourier kertoimiksi* ja sarjaa (2.2) *Fourier sarjaksi*. Kaavassa (2.2) käytetty merkki $\sim$ viittaa siihen, että emme vielä tiedä, millä ehdoilla sarja suppenee ja jos se suppenee, esittääkö se funktiota kaikissa tai ainakin joissakin pisteissä x .

2.2. Esimerkkejä Fourier-sarjoista. Eulerin kaavojen (2.3) avulla on (periaatteessa) helppoa ja mekaanista laskea funktioiden Fourier-sarjoja.

Aloitamme siis esimerkeillä, samalla saamme tuntumaa siihen, missä määrin sarja todella esittää annettua funktiota, ja miltä käyttäytyminen näyttää poikkeuspisteissä, joita ovat epäjatkuvuuspisteet.

Esimerkki 2.1. Aloitamme kanttiaallosta [Kre99, Luku 10, s. 532] Otamme tapauksen $k = 1$. (Kirjassa merkitään k :lla kanttiaallon “amplitudia”, mutta olkoon se tässä 1).

Kyseessä on 2π -jaksoinen funktio, joka jaksovälillä $[-\pi, \pi]$ määritellään:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{kun } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Kuva saadaan MATLAB:lla näin:

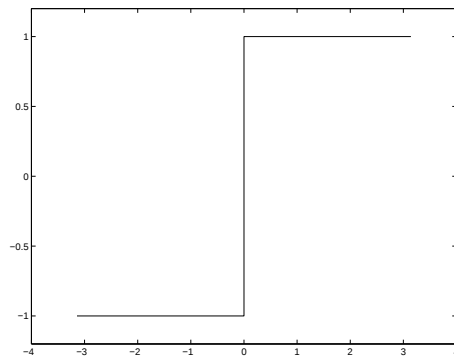
```
>>plot([-pi 0 0 pi],[-1 -1 1 1])
>>ylim([-1.2 1.2])
```

Lasketaanpa Fourier-kertoimet:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \, dx + \int_0^{\pi} 1 \, dx \right) = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0,$$

koska f on pariton ja $\cos$ on parillinen (kts. Lauseet 1.2 ja 1.3 s. 4)



KUVA 4. Kanttiaalto (perusjakso)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

koska $f(x) \sin nx$ on parillinen (Jälleen Lauseet 1.2 ja 1.3, s. 4). Siten saadaan:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} \Big|_0^{\pi} \cos nx = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

Koska $\cos n\pi = (-1)^n$, on siis

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n),$$

auki kirjoitettuna:

$$(b_n) = \frac{4}{\pi} (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots).$$

Fourier-sarja on siten:

$$(2.5) \quad f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

Voidaan kirjoittaa $\sum$ -notaation avulla näin:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin nx}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Ensi töiksi riennämme piirtämään sarjan osasummien kuvia, jotta näemme, onko hommassa jotain järkeä.

```
clf
x=linspace(-pi,pi);
y1=(4/pi)*sin(x);
y3=y1+(4/pi)*sin(3*x)/3;
y5=y3+(4/pi)*sin(5*x)/5;
plot([-pi 0 0 pi],[-1 -1 1 1])
ylim([-1.2 1.2])
hold on
```

```
plot(x,y1)
plot(x,y3)
plot(x,y5)
```

Kts: <http://www.math.hut.fi/teaching/k3/03/L/> sieltä löytyy mm.

demokantti0.m demokantti1.m demokantti2.m demoesim3.m

Suorita MATLAB:ssa sopiva `addpath`-komento ja sitten `demokantti1`.

(Palautteista päätellen on joukko voimaperäisesti “Matlab-protestihenkisiä”, oppilaita. No, jos tästä ei ole mahdollista yli päästä, voi prujun tältä istumalta paiskata nurkkaan, mieluummin kuitenkin uusiokäyttöön.)

Havaintoja, päätelmiä

Kanttiaaltofunktion sarjasta (merk. $s(x)$) näemme seuraavia asioita:

1. $s(0) = s(n\pi) = 0 = \frac{1}{2}(f(0-) + f(0+))$, missä $f(x-) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ ja $f(x+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ ovat vasemman ja oikeanpuoleiset raja-arvot. Tämä nähdään sijoittamalla sarjaesitykseen (2.5) $x = 0$ tai $x = n\pi$, jolloin sarjan kaikki termit ovat $= 0$, joten sarja suppenee taatusti kohti lukua 0.
2. Jos tietäisimme, että sarja suppenee esim. pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$ kohti arvoa $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, saisimme

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots\right),$$

josta seuraisi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

Erikoistapauksena saisimme tuloksen, jonka *Leibniz* johti geometrisluonteisella päättelyllä v. 1673.

Niinpä yleispätevä Fourier-sarjojen suppenemislause, joka soveltuisi esimerkiksi kanttiaallon tapaukseen, sisältää erikoistapauksenaan tämän *Leibniz*’n tuloksen, jonka todistus ei ole aivan yksinkertainen.

Kuten ylläolevasta esimerkistä voidaan päätellä, yleiset Fourier-sarjojen suppenemistulokset ovat syväisiä. Yleensäkin sarjojen summia on vaikea laskea (paitsi geometrisen sarjan). Fourier-sarjojen suppenemistulokset antavat muun hyvän lisäksi erään menetelmän tietynlaisten sarjojen summien laskemiseksi. Mielenkiintoista on, että vaikka geometrisen sarjan summan laskeminen tuntuu kovasti yksinkertaiselta lukion matematiikan asialta, sitä voidaan tässä (ja monessa muussa) käyttää apuna.

Ilahduttavaa on, että matemaatikot ovat pystyneet todistamaan helposti todennettavia yleisiä riittäviä ehtoja, jotka takaavat Fourier-sarjan suppenemisen laajalle joukolle funktioita. Voitaneen kovin paljon liioitteleman sanoa, että tekniikan sovellutuksissa esiintyvistä funktioista valtaosa toteuttaa nämä ehdot.

Fourier-sarjojen teoria on matemaattisesti vaikeaa, edelleenkin siinä on avoimia kysymyksiä. Suppenemisteoriassa ei vielä kukaan tunneta välttämättömiä ja riittäviä ehtoja, kenties sellaisia ei ole tai ei koskaan löydetä? Kuitenkaan matemaattisella vaikeudella ei kannata liikaa pelotella. Tuo yllä mainittu tekniikan tarpeisiin hyvin riittävän lauseen todistus, vaikka onkin jonkin verran pitkä, ei vaadi mitään peruskurssin 1 yli menevää matemaattista esitietoa.

Sovellutusten kannalta hyvä uutinen on luonnollisten riittävien ehtojen olemassaolo ja Fourier-sarjojen helppo ja mekaaninen laskenta. (Toki voi tulla vastaan integrointivaikeuksia, jolloin on turvaututtava

numeeriseen integrointiin. Se puolestaan saattaa joissakin tapauksissa aiheuttaa ylimääräistä virhettä ja raskasta laskentaa.)

2.3. Fourier-sarjojen suppeneminen. Jokaiselle 2π -jaksoiselle integroitavalle funktiolle voidaan muodostaa Fourier-sarja kaavojen (2.3) ja (2.2, s. 13) avulla.

Huom: 2π -jaksoisuudessa ei ole mitään "maagista", kohta näemme, miten mielivaltainen jakso palautuu tähän yksinkertaisella muuttujan skaalauksella. Niinpä kaikki yleiset 2π -jaksoisia koskevat päätelmät ovat yhtä hyvin voimassa muille jaksoille. Kaavat toki muuttavat hieman muotoaan tuon skaalauksen takia.

Luonnolliset kysymykset

- Suppeneeko sarja kaikilla/joillakin x :n arvoilla?
- Jos sarja suppenee pisteessä x , niin onko sen summa $= f(x)$, ts. esittääkö sarjan summafunktiio annettua funktiota f ?

Integroituvuudelle riittävä ehto on paloittain jatkuvuus, joka oli esillä jo Laplace-muunnosten yhteydessä. Kerrataan tässä:

Määritelmä 2.1. Funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on paloittain jatkuva (P.J.), jos väli voidaan jakaa äärelliseen määrään osavälejä jakopisteillä $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ siten, että

1. f on jatkuva kullakin avoimella osavälillä (x_{k-1}, x_k) , $k = 1 \dots N$ ja
2. f :llä on äärelliset raja-arvot lähestyttäessä kunkin osavälin päätepisteitä ao. osavälin sisältä, ts. vasemmssa päätepisteessä x_{k-1} on oikeanpuoleinen raja-arvo ja oikeassa päätepisteessä x_k vasemmanpuoleinen, $k = 1 \dots N$.

Paloittain jatkuvalla funktiolla on siten (korkeintaan) äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä, ja nämä ovat äärellisiä hyppäyksiä, eli yksinkertaista tyyppiä.

Fourier-sarjojen teoria käsittelee jaksollisia funktioita, siten kaikki informaatio funktiosta sisältyy yhteen jaksoväliin. Tässä yhteydessä emme siten tarvitse käsitettä *paloittain jatkuvuus* koko $\mathbb{R}$:ssä määritellylle funktiolle. Muissa yhteyksissä (kuten Laplace-muunnokset) sitä tarvitaan: Paloittain jatkuvaksi sanomme sellaista funktiota, joka on edellisen määritelmän mielessä paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä osavälillä.

Esimerkki 2.2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 7, & x = 2 \\ 8 - x, & 2 < x < 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

Tämä on kätevä tapa esittää kuvia. Jos haluat nähdä, leikkaa/liimaa Matlab-istuntoon. Tässä opetamme samalla erään helpon tavan funktion kuvaajan piirtoon, `fplot`.

```
clf; clear
fplot('x.^2',[0,2]); hold on
plot([2],[4],'o'); plot([2],[7],'*r')
fplot('8-x',[2,5]); plot([5],[3],'o')
plot([5],[0],'*r')
axis([0 5.3 -0.4 7.3]); shg
```

demopaljat Siinä myös esimerkki hyppyä monimutkaisemmasta epäjatkuvuudesta (kertauksena 1-peruskurssin perusteista).

Vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat

Laplace-muunnosten ja Fourier-sarjojen yhteydessä määritellään toispuoliset derivaatat lievemmin kuin 1-peruskurssissa.

Lievennys on teorian kannalta olennainen, saamme kipeästi kaivattuja funktioita Fourier-sarjojen suppenemislauseiden piiriin.

Määritelmä 2.2 (Vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat). (Fourier- ja Laplace-teorian tarvitsemassa väljennetyssä muodossa)

$$f'(x_0-) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0-)}{h}, \quad f'(x_0+) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0+)}{h}$$

Huomautus 2.2. Tavanomainen vasemmanpuolinen/oikeanpuolinen derivaatta määritellään niin, että erotusosamäärän *kantapisteenä* on $f(x_0)$. Silloin pätee:

Lause 2.1 (Vanhan (peruskurssin 1) terminologian mukaan). *f on derivoituva pisteessä x_0 , jos ja vain jos f :llä on x_0 :ssa vasemman- ja oikeanpuoliset derivaatat ja ne yhtyvät.*

Nyt käytettävän väljemmän määritelmän mielessä esim. kanttiaaltofunktiolla on hyppypisteessä sekä vasemman- että oikeanpuoleinen derivaatta ja kumpikin $= 0$. Funktio ei kuitenkaan ole ko. pisteessä edes jatkuva, saati sitten derivoituva.

Alkuperäisessä, ahtaammassa mielessä muodostetut toispuoliset derivaatat riippuvat siitä, miten funktio määritellään ao. pisteessä x_0 , sensijaan uuden, väljemmän määritelmän tapauksessa funktion arvolla x_0 :ssa ei ole asiaan mitään vaikutusta. Tämä sopii yhteen sen kanssa, että Fourier-kertoimet saadaan integraaleina, joiden arvoihin ei vaikuta funktion arvo yksittäisessä pisteessä. Siten epäjatkuvan funktion hyppypisteissä ei yleensä ole tarpeen spesifioida funktion arvoa.

Tehtävä 2.1. Määritä demofunktiomme (2.2) vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat hyppypisteissä sekä "klassisen" että uuden väljennetyin määritelmän suhteen.

Näiden käsitteiden perusteellinen esittely katsottiin tarpeelliseksi, jotta Fourier-sarjojen suppenemislauseeseen käyttö saadaan vankalle pohjalle.

Muotoilemme lauseen 2π -jaksoiselle funktiolle, mutta luonnollisesti se pätee yhtä hyvin mille tahansa jakson pituudelle $p = 2L$ (tällöin viitataan vastaaviin modifioituihin kaavoihin, joihin kohta pääsemme).

Lause 2.2 (Fourier-sarjan suppenemislause). *Olko f 2π -jaksoinen funktio, joka on paloittain jatkuva jaksovälillä $[-\pi, \pi]$ ja jolla on vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat kaikissa välin $[-\pi, \pi]$ pisteissä (ts. kaikissa $\mathbb{R}$:n pisteissä).*

Tällöin f :n Fourier-sarja suppenee jokaisessa pisteessä x kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.

Erityisesti sarja suppenee kohti funktion arvoa $f(x)$ kaikissa pisteissä x , joissa f on jatkuva. Hyppypisteissä se suppenee kohti hyppäyksen keskiarvoa.

Todistus. Jätämme todistuksen tässä vaiheessa käsittelemättä. Palaamme aiheeseen myöhemmin. Peruskurssilla K3/P3 tai vast. voidaan harkinnan mukaan jättää asia tähän ja harjoitella pelkkää soveltamista. Toisaalta voidaan antaa ainakin pääperiaatteet, kuten jäljempänä teemme. $\square$

(Jätetään kuitenkin pois s. 2003.)

Ensimmäiseksi voimme soveltaa lausetta edellä käsiteltyyn kanttiaaltoon. Kuvista ja laskuista havaitsemamme käytös saa näin matemaattisen perustelun. Ovathan vasemman- ja oikeanpuoliset derivaatat kaikkialla olemassa (ja ovat kaikissa pisteissä $= 0$) ja funktio on paloittain jatkuva.

2.4. Mielivaltainen jakso $p = 2L$. Luonnollisesti haluamme käsitellä kaikenlaisia jaksoja, emme vain jaksoa 2π . Yleinen tapaus palautuu käsittelemäämme 2π -jaksoiseen yksinkertaisesti muuttujan skaalauksella.

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, jonka jakso $p = 2L$. Olkoon $t = \frac{\pi x}{L}$ ja merkitään $g(t) = f(x) = f(\frac{Lt}{\pi})$.

Tällöin g on 2π -jaksoinen, sillä:

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{L(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) = g(t),$$

koska f on $2L$ -jaksoinen.

Olkoon g :n Fourier-sarja:

$$g(t) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

Koska $g(t) = f(x)$, missä $x = \frac{Lt}{\pi}$, on siten

$$f(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Toispuoliset raja-arvot ja toispuoliset derivaatat vastaavat tässä skaalausmuunnoksessa toisiaan, joten suppenemislauseen ehdot pysyvät samoina. Kertoimien laskemiseksi on luonnollista tehdä tuo samainen muuttujanvaihto t -muuttujasta x -muuttujaan:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) dt.$$

Suoritetaan muuttujan vaihto $t = \frac{\pi x}{L}$, $dx = \frac{L}{\pi} dt$, integroimisrajat muuttuvat: $-L \dots L$. Saadaan siis:

2L-jaksoisen funktion Fourier-sarjan kaavat:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1 \\ f(x) &\sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Huomautus 2.3. Jaksollisen funktion integraali yli jakson pituisen välin ei riipu integraalin aloituskohdasta. Siten yllä olevissa kaavoissa voidaan integraalit kirjoittaa muodossa

$\int_{x_0}^{x_0+2L}$ mielivaltaisella luvulla x_0 . Tästä voi joissain tapauksissa olla helpotusta käytännön laskuissa. Tarvitsemme sitä myös mm. suppenemislauseen todistuksessa.

luku3.tex 3.12.03

2.5. Fourier-sarjan suppeneminen. Esitimme edellä (Lause 2.2) Fourier-sarjojen suppenemista koskevan peruslauseen ilman todistusta muodossa, jossa sitä on helppo soveltaa. Tarkastelemme tässä lähemmin suppenemiskysymystä. Tähdennämme myös sitä, että funktiosarjan suppenemista voidaan tarkastella erilaisten "normien" suhteen. Fourier-sarjojen käyttäytymisen tutkiminen on ollut lähtökohtana näiden ilmiöiden yleisemmänkin ymmärtämisen ja oivalluksen tiellä.

Tärkeimmät suppenemiskäsitteet ovat nimeltään *pisteittäinen suppeneminen*, *tasainen suppeneminen* ja *suppeneminen "keskiarvon mielessä"*.

Lause 2.2 käsittelee pelkästään ensin mainittua pisteittäistä suppenemista.

Riemann-Lebesgue lemma

Kaikissa esimerkeissämme on ollut voimassa ominaisuus: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Aloitamme osoittamalla, että tämä pätee aina, kun f on paloittain jatkuva.

Eräs merkittävä käytännön seuraus on käytettäessä Fourier-sarjaa tiedon pakkaamisessa: Esitetään signaali Fourier-sarjana, talletetaan (lähetetään pitkin linjaa) vain ne, joiden itseisarvot ylittävät jonkun annetun kynnyksarvon. Yllä mainitusta (alla todistettavasta) syystä niitä on vain äärellinen määrä. (Aiheesta muotoillaan pieni harjoitustehtävä.) Datapakkaukseen käytetään yleisesti Fourier-muunnosta ja Wavelet-teoriaa, joissa lähtökohtana on Fourier-sarjojen teoria.

Kts. esim. [BN01]

Lause 2.3 (Riemann-Lebesgue lemma). *Olkoon f paloittain jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin f :n Fourier-kertoimet a_n ja b_n lähestyvät kohti 0:aa, kun $n \rightarrow \infty$.*

Huomautus 2.4. Paloittain jatkuvuus-oletusta voidaan lieventää huomattavasti, mutta emme pyrikään maksimaaliseen yleisyyteen.

Todistus. On siis osoitettava, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Todituksen idea aivan yleisessä muodossaan on se, että kun funktio f on annettu kiinteä funktio ja $\cos nx$ ja $\sin nx$ värähtelevät sitä suuremmalla taajuudella, mitä suurempi n on, niin riittävän suurilla ("riittävyys" riippuu annetusta funktiosta f) n :n arvoilla funktio on miltei vakio koko jakson aikana.

Analyttinen todistus on erityisen helppo, jos tehdään lisäoletus: f on derivoituva. Viittaamme kirjaan [BN01][Theorem 1.21, s. 61] Sama lasku esiintyy myös kirjassa [Kre99][s. 535] kohdassa "proof of convergence theorem". Todistuksesta tarvitaan tässä vain ensimmäinen osittaisintegrointi. Yläraja-arvio tehdään ensimmäisen derivaatan avulla vastaavasti kuin kirjassa käytetään toista derivaattaa. ([Kre99]-kirjassa ei esiinny nimeä "Riemann-Lebesgue-lemma").

□

Jotta näkisimme, että suppenemistodistus on täysin peruskurssien tiedoilla esitettävissä, esittelemme sen päävaiheet ja viittaamme yksityiskohtien suhteen kirjallisuuteen.

Samalla tulee näkyviin edellä mainittu periaate sarjesityksen johtamisesta: Johdimme kertoimien lausekkeet, joihin välttämättä päädyimme, mikäli "luonnolliset operaatiot" sarjoilla ovat sallittuja. Nyt käytämme näitä johdettuja lausekkeitä (Fourier-kertoimien kaavoja) hyväksemme todistaaksemme, että kyseiset esitykset todella ovat voimassa.

Saamme johtua matemaattiseen tulokseen vaikka kuinka kyseenalaisilla ja likaisilla, intuition, unien, näkyjen, luulojen, haaveiden johdattelemilla tempuilla, kunhan pystymme jälkikäteen todistamaan, että kyseinen tulos on pätevä. Toki on hyödyllistä etsiä ehtoja, joiden vallitessa Fourier-kertoimien johtamisessa käytetyt termeittäin integroinnit ovat sallittuja, mutta tässä kohdassa niihin vetoaminen ei ole tarpeen.

Jätetään tällä kertaa kuitenkin tähän.

3. ESIMERKKEJÄ FOURIER-SARJOISTA

Niitä kiihkeästi kaivattuja ... Jossain palautteessa puhuttiin käsittämättömistä ja kaiketi tarpeettomista "Fourier-hässäköistä"

Vakuutan, että ainakaan ne eivät ole tarpeettomia, käsittämättömyyden verhoa yritän poistaa.

Oikeasti, Fourier-sarjojen muodostaminen on jokseenkin vain mekaanista laskentaa. Olisko vaikeus siinä, että kertoimet lasketaan integraaleina, muistathan, että määrätty integraali on luku. Tässä nämä luvut riippuvat indeksistä n .

Sitten muodostetaan funktiosarja, jossa kertoimina ovat nuo integroimalla lasketut vakiot, joissa tietenkin esiintyy indeksi n .

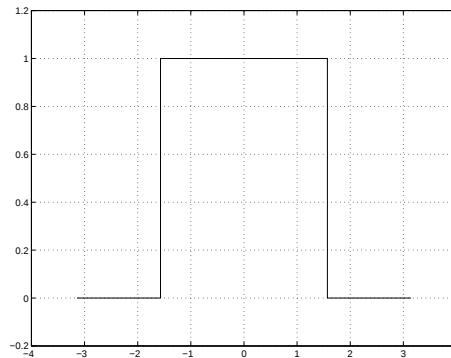
Tarkista: Kertoimissa a_n ja b_n pitää olla nimittäjässä n :ää sisältävä lauseke siten, että kerroin $\rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Muussa tapauksessa jossain on vikaa. Fourier-sarja ei voi supeta, elleivät kertoimet lähene nollaa.

esim.tex 3.12.03

Jaksolliset, parilliset ja parittomat fkt.

1. Muodosta funktion

```
plot([-pi -pi/2 -pi/2 pi/2 pi/2 pi],[0 0 1 1 0 0])
ylim([-0.2 1.2])
grid
shg
```



Fourier-sarja.

Ratkaisu:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} 1\pi = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx = \frac{2}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2},$$

joten $a_n = \frac{2}{\pi} \left(1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots\right)$, eli

$$a_{2k-1} = \frac{2(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}.$$

Koska f on parillinen, on $f(x) \sin(nx)$ pariton, joten $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$.

Siten

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Alla olevassa Matlab-istunnossa näkyy havainnollisesti osasummien rakentaminen.

```
clear; clf
x=linspace(-pi,pi);
y0=1/2; % A0
y1=y0+(2/pi)*cos(x); % A0 + a1*cos(x)
y3=y1-(2/pi)*cos(3*x)/3; % A0 + a1*cos(x)+ a3*cos(3*x)
y5=y3+(2/pi)*cos(5*x)/5; % A0 + a1*cos(x)+ a3*cos(3*x)+a5*cos(5*x)
y7=y5-(2/pi)*cos(7*x)/7 % ...
plot([-pi -pi/2 -pi/2 pi/2 pi/2 pi],[0 0 1 1 0 0])
ylim([-0.2 1.2])
hold on
grid
plot(x,y0*ones(size(x)),'--')
plot(x,y1,'g')
plot(x,y3,'r')
plot(x,y5,'y')
plot(x,y7,'m')
title('Fourier-osasummat 0,1,3,5,7')
shg
```

Osasummia yhä pitemmälle muodostamalla saadaan tarkempi ja tarkempi approksimaatio sarjan summalle. Se, miten pitkälle pitää laskea tiettyä tarkkuutta varten, riippuu pisteestä x , jossa sarjan summaa lasketaan.

Lisää esimerkkiratkaisuja on oppikirjojen lisäksi harjoitusten malliratkaisuissa, jotka menevät tänään (ke 3.12.03) "painoon".