Osittaisintegrointi

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \bigg/_{a}^{b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Rationaalifunktioden integrointi

Rationaalifunkion integraali voidaan laskea kunhan nimittäjän nollakohdat löytyvät

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int s(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

missä polynomin $r(x)$ aste on pienempi kuin polynomin $q(x)$ aste

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

$$A_1 = \lim_{x\to x_1} \frac{(ax+b)(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{ax_1+b}{x_1-x_2}$$

$$A_2 = \lim_{x\to x_2} \frac{(ax+b)(x-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{ax_2+b}{x_2-x_1}$$

$$\frac{ax+b}{(x-x_0)^2} = \frac{a}{x-x_0} + \frac{ax_0+b}{(x-x_0)^2}$$

$$\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \tfrac{1}{2}a\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\alpha a+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x = \ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + C$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,\mathrm{d}x \underset{(x-\alpha)/\beta = t}{\overset{\text{sijoituksella}}{=}} \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\beta}\arctan(t) + C = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

"Yleistetty" integraali

Funktio $f:(a,b)\to\mathbb{R}^+$ (eli $f(x)\geq 0$) on integroituva välillä (a,b) jos
on olemassa jono funktioita $(f_n(x))$ siten, että
$f_1(x)\leq f_2(x)\leq\ldots\leq f_n(x)\leq\ldots$ ja $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ kun $x\in(a,b)$,
f_n on paloittain jatkuva välillä (a,b) ja 0 rajoitetun välin ulkopuolella
(esimerkiksi $f_n(x)=\min\{n,f(x)\}$ kun $|x|\leq n$ ja $x\in(a,b)$ ja 0 muuten)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x<\infty$$

Funktio $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ on integroituva jos
funktiot $f_+(x)=\max\{f(x),0\}$ ja $f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$ ovat integroituvia

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x$$

Funktio $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ on integroituva jos
funktiot $\mathrm{Re}\,f(x)$ ja $\mathrm{Im}\,f(x)$ ovat integroituvia

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{Re}\,f(x)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\alpha>-1$$
$$\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\alpha<-1$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\beta<1$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x<\infty\Leftrightarrow\beta>1$$

Jos $0\leq f(x)\leq g(x)$, $x\in(a,b)$
ja f ja g ovat esim. paloittain jatkuvia niin
g on integroituva välillä $(a,b)\Rightarrow f$ on integroituva välillä (a,b)
f ei ole integroituva välillä $(a,b)\Rightarrow g$ ei ole integroituva välillä (a,b)

Numeerinen integrointi

Keskipistemenetelmä

$$x_j = a + h(j - \tfrac{1}{2}), \quad j = 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$M_n = h(f(x_1) + \ldots + f(x_n)) = h \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

$$\left| M_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2} = \frac{K(b-a)}{24} h^2, \quad |f''(x)| \le K$$

Suunnikasmenetelmä

$$x_j = a + hj, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$T_n = h\big(\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2} f(x_n)\big)$$

$$\left| T_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{K(b-a)}{12} h^2, \quad |f''(x)| \le K$$

Simpsonin menetelmä

$$x_j = a + hj, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

n on parillinen

$$S_n = \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$

$$\left| S_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4} = \frac{K(b-a)}{180} h^4, \quad |f^{(4)}(x)| \le K$$

Erilaisilla sijoituksilla $t = \frac{1}{x}$, $t^2 = \frac{1}{x}$, $t^2 = x$, $t^m = x$

saadaan usein integraalista $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ integraali $\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t$

jossa $-\infty < c < d < \infty$ ja g on rajoitettu ja (monta kertaa) derivoituva

niin, että integraalin $\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t$ numeerinen laskeminen onnistuu hyvin

Pinta-ala- ja tilavuuslaskut

Jos $f(x) \geq 0$ kun $x \in [a, b]$ niin

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

on käyrän $y = f(x)$ ja suorien $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman joukon pinta-ala

Joukko, jonka rajoittavat käyrät $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ pyörähtää x-akselin ympäri: Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Joukko, jonka rajoittavat käyrät $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$, $0 \leq a < b$, pyörähtää y-akselin ympäri: Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$2\pi \int_a^b x|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Käyrän $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ pituus on

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Käyrä $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ pyörähtää x-akselin ympäri: Pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Käyrät

Käyrän $\{\,(x(t),y(t)) \mid t\in[a,b]\,\}$ $((x(t),y(t))\neq(x(s),y(s)),\ t\neq s)$ pituus on

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Jos käyrä $\{\,(x(t),y(t)) \mid t\in[a,b]\,\}$ pyörähtää x-akselin ympäri, niin syntyvän pyörähdyspinnan pinta-ala on

$$2\pi\int_a^b |y(t)|\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Jos käyrä $\{\,(x(t),y(t)) \mid t\in[a,b]\,\}$ on umpinainen $(x(a)=x(b),\ y(a)=y(b))$, niin käyrän sisäpuolelle jäävän alueen pinta-ala on

$$\pm\int_a^b x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \mp\int_a^b x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$$

Käyrä $\{\,(x(t),y(t)) \mid t\in[a,b]\,\}$ on sileä jos
funktiot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvasti derivoituvia,
$(x(t),y(t))$ ei ole vakio millään avoimella välillä ja
raja-arvot $\lim_{t\to t_0}\dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}$ ja $\lim_{t\to t_0}\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}$
ovat olemassa myös niissä pisteissä, missä $x'(t_0)=y'(t_0)=0$

eli on olemassa $f(t)$ ja $g(t)$ s.e. ne ovat jatkuvia ja

$f(t)=\dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}$ ja $g(t)=\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}$ kun $x'(t)^2+y'(t)^2>0$

Fourier integraalit

Huom! Kurssilla Mat-1.421 S1 Laplace- ja Fourier-muunnokset esiintyvät esimerkkeinä integraaleista, eikä niiden teoriasta tarvitse tietää yhtään mitään, mutta jos tietää jotain, niin näiden integraalien laskeminen on ehkä mielekkäämpää!

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}(\mathrm{e}^{zb} - \mathrm{e}^{za}), \quad z \neq 0, z \in \mathbb{C}}$$

Jaksollisen funktion Fourier-sarja

$$f(t+T) = f(t)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n t}{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n t}{T}} \hat{f}(n)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

t on ”aika” ja ω on ”taajuus”

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

Napakoordinaatit

$$\boxed{\begin{matrix} \left.\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (x,y) \sim [r,\theta] \\ [-r,\theta] = [r,\theta+\pi], \quad r \geq 0 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Käyrän } r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ pituus on} \\ \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \end{matrix}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Sektorin } 0 \leq r \leq f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ pinta-ala on} \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \end{matrix}}$$

VEKTORILASKU

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \overline{b_x} + a_y \overline{b_y} + a_z \overline{b_z}$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

Vektorin $\mathbf{a}$ projektio vektorille $\mathbf{b}$ on

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Vektorin $\mathbf{a}$ **skalaari**projektio vektorille $\mathbf{b}$ on

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\alpha)$$

missä α on vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välinen kulma

Vektori $\mathbf{a}$ on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{b}$ vastaan eli $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ jos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ on vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ määräämän suunnikkaan pinta-ala

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\alpha)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

on $\pm$ vektoreiden $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ määräämän suuntaissärmiön tilavuus.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

Analyyttinen geometria

Suoran yhtälö parametrimuodossa

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + tv_z \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \text{ on suuntavektori} \end{array}}$$

Suoran yhtälö normaalimuodossa

$$\boxed{\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}}$$

Tason yhtälö normaalimuodossa

$$\boxed{\begin{array}{c} Ax + By + Cz = D \\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ \mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} \text{ on normaali} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pisteen } (x_0, y_0, z_0) \text{ etäisyys tasosta } Ax + By + Cz = D \text{ on} \\ \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pisteen } \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ etäisyys suorasta } \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v} \\ \dfrac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Suorien } \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}_1 \text{ ja } \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{v}_2 \text{ välinen etäisyys} \\ \dfrac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Tasojen } A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \text{ ja } A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ \text{leikkaussuoran kautta kulkevien tasojen yhtälöt ovat} \\ A_1x + B_1y + C_1z - D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0 \\ \text{missä } -\infty \le \lambda \le \infty \end{array}}$$

Vektorifunktioiden derivointi, kaarevuus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)\big) = \mathbf{a}'(t)\cdot\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}'(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)\big) = \mathbf{a}'(t)\times\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}'(t)$$

$\mathbf{r}(t)$ paikka

$\mathbf{r}'(t)$ nopeus

$|\mathbf{r}'(t)|$ vauhti

$\mathbf{r}''(t)$ kiihtyvyys

Käyrän $\mathbf{r}(s)$ parameterina on kaarenpituus jos
$$|\mathbf{r}'(s)| = 1$$

Jos käyrä $\mathbf{r}(s)$ on parametrisoitu kaarenpituudella niin
$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \mathbf{r}'(s)$$
$$\kappa(s) = |\hat{\mathbf{T}}'(s)| \text{ on kaarevuus}$$
$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\hat{\mathbf{T}}'(s) \text{ on päänormaali}$$
$$\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}}(s)\times\hat{\mathbf{N}}(s) \text{ on sivunormaali}$$
$$\hat{\mathbf{B}}'(s) = -\tau(s)\hat{\mathbf{N}}(s) \text{ missä } \tau(s) \text{ on kierevyys}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{T}}\\ \hat{\mathbf{N}}\\ \hat{\mathbf{B}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{T}}\\ \hat{\mathbf{N}}\\ \hat{\mathbf{B}}\end{bmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$
$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|^2}$$

Interpolointi

Interpolointi

Funktion f arvot $f(x_j)$ tunnetaan pisteissä x_j, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.
Haetaan jokin funktio g (esim. polynomi) siten, että $g(x_j) = f(x_j)$
jolloin (tuntemattoman) luvun $f(x)$ sijasta voidaan käyttää $g(x)$

Jaetut erotukset

$$f[x] = f(x)$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_i] - f[x_j]}{x_i - x_j}$$

$$f[x, x] = f'(x)$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x, x, x] = \frac{f''(x)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}] - f[x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}]}{x_{i_0} - x_{i_k}}$$

Jos p_n on astetta n oleva polynomi jolle pätee
$p_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$ niin

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$$\min\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\} \le t \le \max\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Newtonin interpolointikaava

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Lineaarinen splinifunktio

Jos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ja $f(x_j)$ ovat annettuja
niin g on lineaarinen splini-interpolointifunktio mikäli $g(x_j) = f(x_j)$
ja g on välillä (x_{j-1}, x_j) korkeintaan astetta 1 oleva polynomi,
eli $g(x) = f(x_{j-1}) + \dfrac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}(x - x_{j-1})$ kun $x \in [x_{j-1}, x_j]$.

Kuutiospline

Jos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ ja $f(x_j)$ ovat annettuja
niin g on kuutiosplini-interpolointifunktio mikäli
g on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $[x_0, x_n]$, $g(x_j) = f(x_j)$
ja g on välillä (x_{j-1}, x_j) korkeintaan astetta 3 oleva polynomi.

Jos g on kuutiosplini, $x_{j+1} - x_j = h$ ja $k_j = g'(x_j)$, niin

$$k_{j-1} + 4k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h}\big(f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})\big),$$

$$g(x) = f_{j-1} + (x - x_{j-1})k_{j-1} + (x - x_{j-1})^2 \frac{3\frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} - 2k_{j-1} - k_j}{x_j - x_{j-1}}$$

$$+(x - x_{j-1})^3 \frac{k_{j-1} - 2\frac{f_j - f_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} + k_j}{(x_j - x_{j-1})^2}, \quad x_{j-1} \le x \le x_j$$