Induktio

On osoitettava, että jokin väite $P(n)$ pätee kaikilla $n \geq n_0$
ja osoitetaan, että

$P(n_0)$ pätee;
jos $k \geq n_0$ ja $P(k)$ pätee, niin silloin myös $P(k+1)$ pätee

Jos nyt $P(n)$ ei olisi voimassa kaikilla $n \geq n_0$ niin
voidaan valita m siten, että se on **pienin** luku jolle väite ei päde.
Silloin $m > n_0$ ($P(n_0)$ pätee) ja väite $P(k)$ pätee kun $k = m - 1$, joten
se pätee myös kun $k = m - 1 + 1 = m$, mikä on ristiriita.

Kompleksiluvut

$$\boxed{z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\,(x + \mathrm{i}y) = x} \qquad \boxed{\mathrm{Im}\,(x + \mathrm{i}y) = y}$$

Moduuli eli itseisarvo

$$\boxed{\mathrm{mod}\ (z) = |z| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + \mathrm{i}y}$$

Liittoluku eli konjugaatti

$$\boxed{\overline{z} = x - \mathrm{i}y, \quad z = x + \mathrm{i}y}$$

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Kolmioepäyhtälö

$$\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

Argumentti eli vaihekulma, $\arg(z) = \theta$

$$\boxed{\begin{array}{c} \theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (+2n\pi), & x > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi \quad (+2n\pi), & x < 0, \\ \dfrac{y}{|y|}\dfrac{\pi}{2} \quad (+2n\pi), & x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \\ \cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z = x + \mathrm{i}y \end{array}}$$

Polaarimuoto

$$\boxed{z = |z|(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \theta = \arg(z)}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,z_1 = \mathrm{Re}\,z_2, \quad \mathrm{Im}\,z_1 = \mathrm{Im}\,z_2 \\ \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \\ \text{missä } \theta_1 = \arg(z_1) \text{ ja } \theta_2 = \arg(z_2) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z^n = w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \Rightarrow z = ? \\ |z^n| = |z|^n, \quad \arg(z) = \theta \Rightarrow \arg(z^n) = n\theta \\ n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad |z|^n = |w| \\ \Rightarrow \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \Rightarrow \\ z = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{w} \\ = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{gathered}}$$

Eksponenttifunktio

$$\boxed{\exp(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big)}$$

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}, \quad \arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}\, z$$

Logaritmifunktio

$$\boxed{\begin{gathered} z = \ln(w) \Leftrightarrow w = \mathrm{e}^z \\ \Leftrightarrow z = \ln(|w|) + \mathrm{i}(\arg(w) + 2n\pi), \quad n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \\ \text{koska jos } z = x + \mathrm{i}y \text{ niin } |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x \text{ ja } \arg(\mathrm{e}^z) = y \\ \text{jolloin } \mathrm{e}^x = |w|, \text{ eli } x = \ln(|w|) \text{ ja } y = \arg(w) + 2n\pi. \end{gathered}}$$

Möbiuskuvaus

$$\boxed{z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0}$$

Ympyrät ja suorat kuvautuvat ympyröille tai suorille

Matriisilasku

$m \times n$-matriisi

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \dots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \dots & A(2,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A(m,1) & A(m,2) & \dots & A(m,n) \end{bmatrix} = [A(j,k)] = [a_{jk}]}$$

Transpoosi, A^{T}

$$\boxed{B = A^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow B(j,k) = A(k,j)}$$

Summa: $A + B = C$, A, B ja C $m \times n$-matriisieja

$$\boxed{C(j,k) = A(j,k) + B(j,k)}$$

Skalaarilla kertominen: $\lambda A = C$

$$\boxed{C(j,k) = \lambda A(j,k)}$$

Hermitointi: $\overline{A}^{\mathrm{T}} = C$

$$\boxed{\begin{array}{c} C(j,k) = \overline{A(k,j)} \\ \text{eli transpoosi ja kompleksikonjugointi} \end{array}}$$

Tulo: $C = AB$, A on $m \times n$-, B on $n \times p$- ja C on $m \times p$-matriisi

$$\boxed{C(j,k) = \sum_{q=1}^{n} A(j,q)B(q,k)}$$

$$\boxed{(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}}$$

$A(BC) = (AB)C$ jos A om $m \times n$, B on $n \times p$ ja C on $p \times q$

$$\boxed{\text{Yleensä } AB \neq BA}$$

$0_{m \times n}$ tai yleensä pelkästään 0 on $m \times n$-matriisi, jonka kaikki elementit ovat 0

$I_{m \times m}$ tai yleensä pelkästään I on $m \times m$-matriisi,
jonka kaikki lävistäjäalkiot ovat 1, eli

$$I(j,k) = \begin{cases} 1, & \text{jos } j = k, \\ 0, & \text{jos } j \neq k. \end{cases}$$

$$\boxed{AI = IA = A}$$

$$
n \times n \text{ matriisi A on} \quad
\begin{cases}
\text{lävistäjämatriisi jos } A(j,k) = 0 \text{ kun } j \neq k \\
\text{yläkolmiomatriisi jos } A(j,k) = 0 \text{ kun } j > k \\
\text{alakolmiomatriisi jos } A(j,k) = 0 \text{ kun } j < k \\
\text{symmetrinen jos } A^{\mathrm{T}} = A \\
\text{vinosymmetrinen jos } A^{\mathrm{T}} = -A \\
\text{ortogonaalinen jos } A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I \\
\text{hermiittinen jos } \overline{A}^{\mathrm{T}} = A \\
\text{vinohermiittinen jos } \overline{A}^{\mathrm{T}} = -A \\
\text{unitaarinen jos } \overline{A}^{\mathrm{T}}A = A\overline{A}^{\mathrm{T}} = I \\
\text{kääntyvä eli säännöllinen jos sillä on} \\
\quad \text{käänteismatriisi } A^{-1} \text{ s.e. } AA^{-1} = A^{-1}A = I
\end{cases}
$$

Gaussin algoritmi

Sallitut rivioperaatiot

(i) Lisätään rivi kerrottuna vakiolla toiseen riviin

(ii) Vaihdetaan kaksi riviä

(iii) Kerrotaan rivi nollasta poikkeavalla vakiolla

Tavoiteena porrasmuoto

$m \times n$ matriisi A on porrasmuotoinen mikäli ehdosta

$$A(j,k) \neq 0 \text{ ja } A(j,q) = 0 \text{ kun } 1 \leq q < k$$

seuraa, että

$$A(p,q) = 0 \text{ kun } j < p \leq m \text{ ja } 1 \leq q \leq k$$

Porrasmuotoisen $m \times n$-matriisin (j,k)-alkio on **tukialkio**, jos $A(j,k) \neq 0$ ja $A(j,q) = 0$ kun $1 \leq q < k$

Matriisi B on A:n porrasmuoto jos B on saatu A:sta soveltamalla Gaussin algoritmin rivioperaatioita

Osittaistuenta:

Vaihdetaan rivejä siten, että tukialkio on itseisarvoltaan mahdollisimman iso

Porrasmuotoisen yhtälösysteemin ratkaiseminen:

Jos sarakkeella k ei ole tukialkiota, niin tuntematon x_k voidaan valita vapaasti.

Jos elementti (j,k) on tukialkio, ja tuntematttomat $x_{k+1}, \ldots, x_n$ on laskettu, niin tuntematon x_k voidaan ratkaista yhtälöstä j.

Jos yhtälösysteemissä on yhtälö joka on muotoa

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_n = a \text{ missä } a \neq 0$$

niin yhtälösysteemillä ei ole ratkaisuja.

Rangi:

Matriisin rangi on sen porrasmuodossa olevien tukialkioiden lukumäärä

Käänteismatriisi

Käänteismatriisi

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Matriisilla } A \text{ on käänteismatriisi } A^{-1} \text{ jos} \\ AA^{-1} = A^{-1}A = I\end{array}}$$

A:lla käänteismatriisi $\Leftrightarrow$ A on säännöllinen $\Leftrightarrow$ A on kääntyvä

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Käänteismatriisi Gaussin algoritmilla

$$\boxed{\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \sim \ldots \text{rivioperaatioilla} \ldots \sim \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}}$$

$n \times n$-matriisi A on säännöllinen eli kääntyvä $\Leftrightarrow$

A:n rangi on n $\Leftrightarrow$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$

A:n vaakarivivektorit ovat lineaarisesti riippumattomia $\Leftrightarrow$

A:n pystysarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia

Determinantit

$$\boxed{\begin{gathered}\det([a]) = a\\ \det\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\det(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}A(j,k)\det(\not{A}_{j,k}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}A(j,k)\det(\not{A}_{j,k})\\ \text{missä } \not{A}_{j,k} \text{ on matriisi } A \text{ josta on poistettu vaakarivi } j \text{ ja pystysarake } k\end{gathered}}$$

$$\boxed{\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)}$$

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

$$\boxed{n \times n\text{-matriisi } A \text{ on säännöllinen } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \ A\text{:n rangi on } = n.}$$

$$\boxed{\text{Ylä- tai alakolmiomatriisin determinantti on lävistäjäalkioiden tulo}}$$

Determinantti Gaussin algoritmilla:

$$\boxed{\begin{gathered}A \rightsquigarrow B \ \ \text{(Vaihdetaan kaksi riviä)} \Rightarrow \det(B) = -\det(A)\\ A \rightsquigarrow B \ \ \text{(Lisätään rivi kerrottuna vakiolla toiseen riviin)} \Rightarrow \det(B) = \det(A)\\ A \rightsquigarrow B \ \ \text{(Kerrotaan rivi nollasta poikkeavalla vakiolla } c) \Rightarrow \det(B) = c\det(A)\\ A(j,k) = 0 \quad j > k \Rightarrow \det(A) = A(1,1)\cdot A(2,2)\cdot \ldots A(n,n)\end{gathered}}$$

Cramerin sääntö

$$
\begin{array}{ccccc}
A(1,1)x_1 & +A(1,2)x_2 & \dots & +A(1,m)x_m & = & b(1) \\
A(2,1)x_1 & +A(2,2)x_2 & \dots & +A(2,m)x_m & = & b(2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
A(m,m)x_1 & +A(m,2)x_2 & \dots & +A(m,m)x_m & = & b(m)
\end{array}
$$

$$\Rightarrow$$

$$x_j = \frac{\det(C_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

missä C_j on "matriisi A, jossa j:s pystysarake

on korvattu pystyvektorilla $\begin{bmatrix} b(1) \\ \vdots \\ b(m) \end{bmatrix}$"

Vektoriavaruuden kanta

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ ovat **lineaarisesti riippumattomia** jos

$$\boxed{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0}$$

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ ovat **lineaarisesti riippuvia** jos
ne eivät ole lineaarisesti riippumattomia, eli
ainakin yksi vektoreista voidaan kirjoittaa toisten lineaarikombinaationa, eli

$$\mathbf{v}_j = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots \beta_{j-1} \mathbf{v}_{j-1} + \beta_{j+1} \mathbf{v}_{j+1} + \ldots + \beta_m \mathbf{v}_m$$

Vektoreiden $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ virittämä vektoriavaruus on

$$\{\, \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{w}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \,\}$$

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ muodostavat vektoriavaruuden W kannan
eli ne ovat kantavektoreita, jos
ne ovat lineaarisesti riippumattomia (W:n vektoreita) ja
jokainen W:n vektori $\mathbf{w}$ voidaan esittää (yksikäsitteisesti) muodosssa

$$\mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_m \mathbf{v}_m.$$

Vektoriavaruuden W dimensio on silloin m.

Jos B on matriisin A porrasmuoto, eli
B on saatu A:sta soveltamalla Gaussin algoritmin rivioperaatioita
niin

B:n nollasta poikkeavat vaakarivivektorit muodostavat
A:n vaakarivivektoreiden virittämän vektoriavaruuden kannan

ja

jos B:n tukialkiot ovat pystysarakkeilla $k_1, k_2, \ldots k_m$ niin
A:n pystysarakkeet $A(:, k_1), A(:, k_2), \ldots A(:, k_m)$ muodostavat
A:n pystysarakevektoreiden virittämän vektoriavaruuden kannan

Ominaisarvot

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Jos } AX = \lambda X, \quad X \neq \mathbf{0} \\ \text{niin } \lambda \text{ on } A\text{:n ominaisarvo ja } X \text{ on vastaava ominaisvektori}\end{array}}$$

$\det(A - \lambda I)$ on A:n karakteristinen polynomi

$$\boxed{\lambda \text{ on } A\text{:n ominaisarvo} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Jos matriisilla } A \text{ on ominaisarvoinaan } \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m \text{ ja } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ kun } i \neq j \\ \text{niin vastaavat ominaisvektorit } X_1, X_2, \dots X_m \text{ ovat lineaarisesti riippumattomia}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Symmetrisen (ja reaalisen) matriisin ominaisarvot ovat reaalisia} \\ \text{ja (eri ominaisarvoihin liittyvät) ominaisvektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan}\end{array}}$$

Jos A on $n \times n$ matriisi, jolla on ominaisarvot

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

ja ominaisvektorit

$X_1, X_2, \dots, X_n$

ja jos matriisi V jolle pätee $V(:, j) = X_j$ on kääntyvä

eli, ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, niin

$$\boxed{V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}}$$

Toisen asteen käyrät

$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

A:n ominaisarvot ovat λ_1 ja λ_2

ja vastaavat ominaisvektorit X_1 ja X_2 valitaan niin, että $|X_j| = 1$.

Jos $V(:, j) = X_j$ ja $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ niin

$$\boxed{\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + d'x' + e'y' + f = 0}$$

missä $\begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} V$