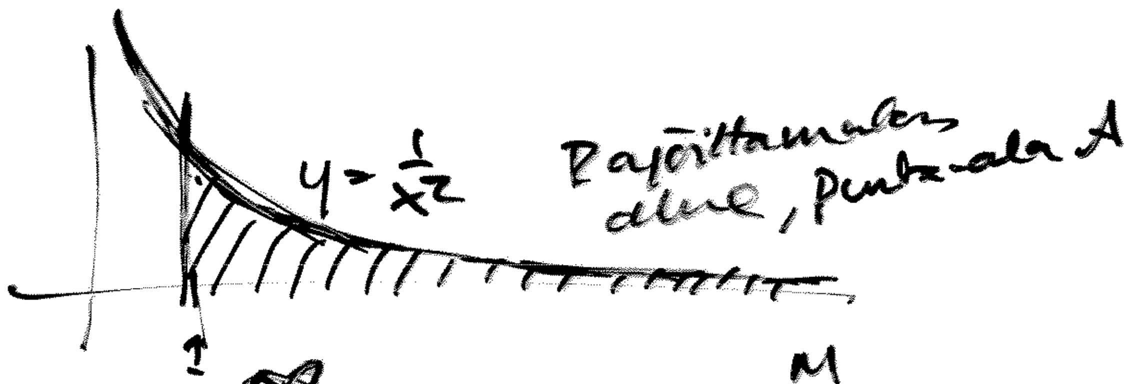
Ekskursio epäoleellisiin integraaleihin rajoittamattoman välin yli

(inessential integrals)

Esim. Tarkastellaan pinta-alaa, joka jää käyrän $y=\frac{1}{x^2}$, x-akselin ja suoran $x=1$ väliin.



$$A =: \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} := \lim_{M\to\infty} \underbrace{\int_1^{M} \frac{dx}{x^2}}_{\text{Riemann integraali}}$$

Tällaisissa "integraaleissa" ylä- tai alarajassa esiintyvä $\pm\infty$ tulee tulkita raja-arvon ottona.

$$A = \lim_{m\to\infty} \int_1^{m} \frac{dx}{x^2} = \lim_{m\to\infty} \left(\Big/_{1}^{m} -\frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(-\frac{1}{m} + 1\right) = 1.$$

Esim: Ala, joka jää käyrän $y = \frac{1}{x}$, x-akselin ja suoran $x = 1$ väliin.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left(\Big/_1^M \ln x \right) = \lim_{M\to\infty} \ln M = \infty.$$

Kysytty pinta-ala ei ole äärellinen. Sanotaan, että tämä epäoleellinen integraali hajaantuu l. divergoi kohti ääretöntä.

Huom: Riemann-integroituvan funktion integraali rajoitetun välin yli on määritelmänsä perusteella jokin äärellinen luku.

Esim:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} := \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{M\to-\infty} \int_M^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 2 \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{M\to\infty} \Big/_0^M \arctan x$$

$$= 2 \lim_{M\to\infty} \arctan M = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Laplace-muunnokset:

Määr: Funktio $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ on Laplace-muunnettava mikäli

(i) f on paloittain jatkuva

(ii) on olemassa vakio $s > 0$ jolle pätee

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$$

Lukuen (joukon suurin alaraja.)

$$M_f = \inf\{ s \geq 0 : \lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0 \}$$

kutsutaan funktion f kasvuvakioksi.

Esim: $f(t) = t^k \quad t \geq 0$.

On jatkuva $\Rightarrow$ paloittain jatkuva ok

Jos $s > 0$, niin

$$e^{-st} t^k = \frac{t^k}{e^{st}} \to 0 \quad \text{kun } t \to +\infty$$

(tarkista l'Hôpitalin 2. säännöllä)

ja siten $M_f = 0$. Silti

$$e^{-0 \cdot t} \cdot t^k = t^k \not\to 0 \quad t \to \infty.$$

Huom: Määritelmän ehtoa (i) voitaisiin lieventää huomattavasti, mutta se edellyttäisi vaikeampaa integraaliteoriaa jatkossa.

Määr: Olkoon $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Laplace-muuntuva. Tällöin

(i) f:n Laplace-muunnos on funktio $\hat{f}: (M_f, \infty) \to \mathbb{C}$ joka saadaan epäoleellisesta integraalista

$$(*) \quad \hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt, \quad s > M_f.$$

(ii) Laplace-muunnosoperaattori on kuvaus $\mathcal{L}: f \mapsto \hat{f}$ jossa f ja $\hat{f}$ suhteutuvat toisiinsa kuten kaavassa (*).

! Tulemme havaitsemaan, että $\mathcal{L}$ on lineaarinen kuvaus.

Huom! Siis f:n Laplace-muunnosta merkitään joko $\hat{f}$ tai $\mathcal{L}[f]$. Laplace-muunnoksen arvo pisteessä $s > M_f$ merkitään joko $\hat{f}(s)$ tai $\mathcal{L}[f](s)$. Muuttujaa t funktiolle f kutsutaan aikatason muuttujaksi, ja muuttujaa s funktiolle $\hat{f}$ kutsutaan taajuustason muuttujaksi.

Lemma: Olkoon $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Laplace-muunnettava. Tällöin epäoleellinen integraali (*) suppenee kun $s > M_f$.

Perustelu: Perustuu ns. Cauchyn konvergenssikriteeriin. Tällä tavoin voidaan tutkia vajo-arvoja tietämättä kuinka "arvoja" ne ovat.

Cauchy:

$\lim_{M \to \infty} I_M$ on olemassa jos ja vain jos

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$ s.e.

$M_1, M_2 > N(\varepsilon) \Rightarrow |I_{M_1} - I_{M_2}| < \varepsilon.$

Sovelletaan tätä siten että

$$I_M = \int_0^M e^{-st} f(t)\,dt$$

ja sovitaan, että $M_1 < M_2$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $s_0 \in (M_f, \infty)$. Saadaan

$$|I_{M_2} - I_{M_1}| = \Big| \int_0^{M_2} e^{-st} f(t)\,dt - \int_0^{M_1} e^{-st} f(t)\,dt \Big| =$$

$$= \left| \int_{M_1}^{M_2} e^{-st} f(t)\,dt \right| \le \int_{M_1}^{M_2} |e^{-st}| \cdot |f(t)|\,dt$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t} \cdot \underbrace{e^{-s_0 t} \cdot |f(t)|}_{\le C}\,dt \quad (*)$$

Koska f:n Laplace-muunnos ja $s_0 > M_f$, niin tällöin

$$e^{-s_0 t} f(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

Koska $f(t)$ on paloittain jatkuva niin seuraa, että tämä funktio on rajoitettu:

$$|e^{-s_0 t} f(t)| \le C$$

kaikilla $t \ge 0$. Voidaan jatkaa laskua kohdasta (*)

$$\le C \int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t}\,dt$$

6

$$= C \Big/_{M_1}^{M_2} \frac{1}{s_0 - s} e^{-(s-s_0)t}$$

$$= \frac{C}{s_0 - s} e^{-\underbrace{(s-s_0)}_{>} M_1} \Big[1 - \underbrace{e^{-(s-s_0)\underbrace{(M_2 - M_1)}_{>0}}}_{\le 1} \Big]$$

$$< \frac{2C e^{-\frac{(s-s_0)M_1}{2C}}}{\frac{s-s_0}{2C}} \quad (<\varepsilon)$$

Nyt kun M_1 kerrotaan riittävästi ja $s > s_0 > M_f$, saadaan tämä viimeinen pienemmäksi kuin ε. ∎

<u>Huom:</u> Usein funktion f kasvurajan M_f määrittäminen on hyvin vaikeaa — toisaalta f:n näkeminen Laplace-muunnoksen on usein helppoa. Siksi usein laskuissa lasketaan "riittävän suurilla $s \gg 0$" eikä lukuarvoa $M_f < \infty$ pidetä tarkkaa lukua.

<u>Huom!</u> Ehto $s > M_f$ voitaisiin korvata ehdolla $\mathrm{Re}\, s > M_f$, jolloin voitaisiin sallia <u>kompleksiarvoiset</u> $s \in \mathbb{C}$.

<u>Laplace-muunnoksia konkreettisille funktioille</u>

<u>Esim:</u> $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

Triviaalisti Laplace-muunnos.

$\int \bar{a}\, r$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}\, dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} \Big/_0^M \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}$$

$s > a$

$$= \frac{1}{a-s} \lim_{M \to \infty} \left(e^{\underbrace{(a-s)}_{<0} M} - 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \quad \text{kun } s > a.$$

Rationaalifunktio!

Esim: $f(t) = \sin t, \quad t \geq 0.$

$$\mathcal{L}[\sin t](s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin t\, dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-st} \sin t\, dt$$

Eulerin kaava!

$$= \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-st} \left[\frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) \right] dt$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{(i-s)t}\, dt - \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{(-i-s)t}\, dt \right.$$

(8)

$$= \frac{1}{2i} \lim_{M\to\infty} \left[\Big|_0^M \frac{1}{i-s} e^{(i-s)t} - \Big|_0^M \frac{1}{-i-s} e^{-(i+s)t} \right]$$

jos $s > 0$ ($\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, i$) niin seuraa

$$\lim_{M\to\infty} e^{(\pm i - s)t} = 0$$

ja haluttu raja-arvo on

$$\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{i-s} - \frac{1}{i+s} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} .$$

koska

$$\left| e^{-(s\pm i)M} \right| = e^{\mathrm{Re}[-(s\pm i)M]}$$

$$= e^{-sM} \xrightarrow{M\to\infty} 0 \quad \text{koska } s>0.$$

Taas saatiin rationaalifunktio!

Esim: Kuten edellä, tai käyttämällä $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$ ja tekemällä muuttujanvaihto $v = \frac{\pi}{2} - t$, $dv = -dt$. Tulos

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad s>0.$$

Laplace-muunnoksen laskulakeja

Lause: • Laplace-muunnos on lineaarinen kuvaus Laplace-muuntuvilla funktioilla:

$$\mathcal{L}[\alpha f+\beta g] = \alpha\,\mathcal{L}[f]+\beta\,\mathcal{L}[g]$$

kaikilla $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, f,g Laplace-muuntuvia.

• Jos f on jatkuva ja $\mathcal{L}[f](s)=0$ kaikilla $s>a$ eräällä $a\geq 0$, niin silloin $f(t)\equiv 0$ $\forall t$. (Ts. $\mathcal{L}$-operaattori on injektiivinen).

Perustelu: 1. väite seuraa suoraan laskemalla. 2. väite on vaikea, mutta erittäin oleellinen, jotta edes jatkuville funktioilla "käänteis-Laplace-muuntaminen" onnistuisi.

Lause: Olkoon f Laplace-muuntuva ja $a>0$. Määrit. $f_a(t)=f(at)$. Tällöin $\mathcal{L}[f_a](s)=\frac{1}{a}\mathcal{L}[f](\frac{s}{a})$.