Rationaalifunktioiden osamurtolukukehitelmät ja integraalit

29.11.2007

(osamurrot; engl. partial fractions)

Rationaalifunktio on kahden (reaalikertoimisen) polynomin osamäärä

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

jossa polynomeilla $P(x)$ ja $Q(x)$ ei ole yhteisiä nollakohtia; ts. ovat keskenään jaottomia (engl. coprime).

Aina voidaan olettaa, että

$$\deg P(x) < \deg Q(x)$$

koska jos $\deg P \geq \deg Q$ niin

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$$

jossa $S(x)$ olisi polynomi ja

$$\deg \tilde{P} < \deg Q .$$

Esim:
$$R(x) = \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}$$
$$= \frac{x(x^2+1)-x+3x^2}{x^2+1}$$
$$= x + \frac{3x^2-x}{x^2+1}$$
$$= x + \frac{3(x^2+1)-3-x}{x^2+1}$$
$$= x+3 - \frac{x+3}{x^2+1}$$
Integroitaessa
$$\int R(x)dx = \frac{1}{2}x^2+3x - \int \frac{x+3}{x^2+1}dx$$
jossa
$$\int \frac{x+3}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 3\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 3\arctan x + C.$$
Tapaus deg $Q = 1$:
$$\int \frac{c\,dx}{ax+b} = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + C$$
Tapaus deg $Q=2$:

Integraalit tyyppiä
$$\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c}dx$$
vihain kohde!

Neliöksi täydentämällä

$$au^2+bu+c$$

$$= a\left(u^2+\frac{b}{a}u+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(u+\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{:=a^2}\right]$$

Ja tekemällä muuttujan vaihto

$$\begin{cases} x = u+\frac{b}{2a} \\ du = dx \end{cases}$$

Päädytään integraaleihin, jotka ovat muotoa

1. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$!

Tapaus 1:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

Tapaus 2:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Muuttujan vaihto $\begin{cases} u = \frac{x}{a} \\ du = \frac{dx}{a} \end{cases}$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\arctan u + C$$

$$= \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C.$$

Tapaus 3:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(|x-a|\cdot|x+a|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-a| + \frac{1}{2}\ln|x+a| + C$$

kun $x \neq \pm a$.

Jos $a > 0$, niin funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|x-a| + \frac{1}{2}\ln|x+a| + C_1, & x < -a \\ \frac{1}{2}\ln|x-a| + \frac{1}{2}\ln|x+a| + C_2, & -a < x < a \\ \frac{1}{2}\ln|x-a| + \frac{1}{2}\ln|x+a| + C_3, & x > a \end{cases}$$

toteuttaa $f'(x) = \dfrac{x}{x^2-a^2}$, $x \neq \pm a$, olivatpa vakiot $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ mitä tahansa.

Tapaus 4:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = ?$$

$$(*) \quad \frac{1}{x^2-a^2} \overset{\forall x}{=} \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

Voidaanko löytää tällaiset vakiot A ja B? Kyllä voidaan!

$$(*) \iff 1 \overset{\forall x}{=} A(x+a) + B(x-a)$$

$$\iff 1 \overset{\forall x}{=} (A+B)x + (A-B)a$$

$$\iff \begin{cases} A+B = 0 \\ (A-B)a = 1 \end{cases}$$

saadaan

$$\begin{cases} 2A = \frac{1}{a} \\ A = -B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2a}, \\ B = -\frac{1}{2a}. \end{cases}$$

Siis

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

<u>Osamurtolukukehitelmä, kun nimittäjän nollakohdat ovat reaalisia ja keskenään erisuuria</u>

$\deg Q = n$.

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

Jos $\deg P < n$, niin tehdään Ansatz ($P(a_j) \neq 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$.)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{x-a_3} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

Ristiinkertomalla ja laittamalla saadut asteen $n-1$ polynomit yhtäsuuriksi kaikilla x, saadaan n kpl yhtälöitä joissa on tuntemattomina

$$\underbrace{A_1, A_2, \ldots A_n}_{n \text{ kpl.}}$$

Esim.:

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx = ?$$

Ratkaistaan Ansatzin avulla:

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} \overset{\forall x}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

jossa $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$.

$\iff$

$$x+4 \overset{\forall x}{=} A(x-3) + B(x-2)$$

$\iff$

$$x+4 \overset{\forall x}{=} (A+B)x - (3A+2B)$$

$\iff$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=-4 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} A=-6 \\ B=7 \end{cases}$$

Siis

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\,dx = -6\int\frac{dx}{x-2} + 7\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= -6\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + C.$$

$\blacksquare$

Esim. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = ?$

Ansatzina ei voi käyttää

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

koska vasen ja oikea puoli $\longrightarrow \infty$ eri vauhtia kun $x \to 1$

Parempi Ansatz:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

Johtaisi kolmeen yhtälöön kahdelle tuntemattomalle A, B.

Toimiva Ansatz:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \overset{\forall x}{=} A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \overset{\forall x}{=} A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \overset{\forall x}{=} (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C, \quad x \neq 0, 1.$$

Lause: Olkoon $P(x)$ ja $Q(x)$ (reaalikertoimisia) polynomeja joilla ei ole yhteisiä nollakohtia ja

$$\deg P(x) < \deg Q(x).$$

(I) Tällöin $Q(x)$ voidaan esittää muodossa

$$Q(x) = K(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2} \cdots (x-a_j)^{m_j} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{n_1} \cdot (x^2+b_2x+c_2)^{n_2} \cdots (x^2+b_kx+c_k)^{n_k}$$

jossa $a_1 \ldots a_j$ ovat $Q(x)$:n reaaliset nollakohdat kertaluvuilla $m_1 \ldots m_j$; polynomit

$$x^2 + b_j x + c_j, \quad j = 1, \ldots, k$$

ovat ilman reaalisia juuria.

(ii) Rationaalifunktio $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ voidaan esittää muodossa

$$R(x) = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{B_1}{(x-a_1)^2} + \dots \frac{Ö_1}{(x-a_1)^{m_1}}$$

$$+ \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{Ö_2}{(x-a_2)^{m_2}}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{A_j}{x-a_j} + \frac{B_j}{(x-a_j)^2} + \dots + \frac{Ö_j}{(x-a_j)^{m_j}}$$

$$+ \frac{\alpha_{11}x + \beta_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{\alpha_{12}x+\beta_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}$$

$$+ \dots + \frac{\alpha_{1n_j}x + \beta_{1n_j}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_j}}$$

$+ \dots$

(samoin muille polynomeille $x^2+b_jx+c_j$.).

Perustelu: todellakin oletetaan.

Esim: $\int \frac{dx}{1+x^3} = ?$ | Luennolla oli tässä paha mökmykierre!

$Q(x) = 1 + x^3 = 0$, $x = -1$ reaalinen nollakohta.

Jolloin
$$1 + x^3 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$
jossa $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + 1 \geq \frac{5}{4}$
jolla ei ole reaalisia nollakohtia.

Ansatz:

$$\frac{1}{x^3+1} \overset{\forall x}{=} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$\Leftrightarrow$
$$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \overset{\forall x}{=} 1$$

$\Leftrightarrow$ $(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C) \overset{\forall x}{=} 1$

$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -A+B+C = 0 \\ A+C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Saadaan integraalille:

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1}$$
$$- \frac{1}{3} \left(\int \frac{x-2}{x^2-x+1} \, dx \right).$$

Nyt $\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_1$ ja

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx}_{=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+C_2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

ja viimeinen integraali

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2}\right)^2+1}$$

$$\left\{ \text{Muuttujanvaihto: } \begin{cases} u = \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{5}/2} = \dfrac{2x-1}{\sqrt{5}} \\ du = \dfrac{2\,dx}{\sqrt{5}} \end{cases} \right\}$$

$$= \frac{4}{5}\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\,du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan u + C_3$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C_3.$$

saadaan siis

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$