27.11.2007

Integroimiskaavoja, jotka nähdään "välittömästi" derivoinnin perusteella

(i) $$\underbrace{\int x^n\,dx}_{} = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

"määräämätön" integraali joka on jokin funktio! Parempi notaatio olisi ehkä

$$\int x^n\,dx = \left\{\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C : C \in \mathbb{R}\right\}$$

(ii) $$\int x^{\frac{1}{p}}\,dx = \frac{1}{1+\frac{1}{p}}x^{1+\frac{1}{p}} + C$$

jos $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq -1$.

(iii) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Jos $x \neq 0$. Huom: Funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on integroituva (jatkuva) vain välillä I, jolla $0 \notin I$.

(iv) $\int \sin ax \, dx$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax + C.$$

(v) $\int \cos ax \, dx$

$$= \frac{1}{a}\sin ax + C.$$

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \overline{\arcsin}\, x + C.$

(katso $\overline{\arcsin}$-funktion derivointi aiemmilla luennoilla.)

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \overline{\arctan}\, x + C.$

(viii) $\int e^{ax} dx$

$$= \frac{1}{a}e^{ax} + C.$$

Esim:

$$\int \frac{(x+1)^3}{x}\,dx$$

$$= \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}\,dx$$

$$= \int \left(x^2+3x+3+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+\ln|x|+C$$

kun $x \neq 0$.

Esim:

$$\int (4\cos 5x - 5\sin 3x)\,dx$$

$$= \frac{4}{5}\sin 5x + \frac{5}{3}\cos 3x + C.$$

Muuttujan vaihto- eli sijoitusmenetelmä

Derivoinnin ketjusäännön tarkoituksenmukaista käyttöä "takaperin".

Olkoon f ja g derivoituvia siten $f(g(t))$ on jatkuva ja voidaan käyttää ketjusääntöä

$$\frac{d\, f(g(t))}{dt} = f'(g(t))\, g'(t)$$

Integroimalla (analyysin peruslause)

$$f(g(x)) - f(g(a))$$

$$= \int_a^x \frac{d\, f(g(t))}{dt}\, dt$$

$$= \int_a^x f'(g(t))\, \overbrace{g'(t)\,dt}^{\text{"du"}} .$$

Esim: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = ?$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} u = x^2+1 \\ \dfrac{du}{dx} = 2x \\ \frac{1}{2}du = x\,dx \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C .$$

Esim: $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx = ?$

Sijoitus:

$$\begin{cases} u = 1+e^x \\ (u = u(x)) \\ \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow du = e^x dx \end{cases}$$

$$\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx = \int \underbrace{\sqrt{1+e^x}}_{\sqrt{u}} \cdot \underbrace{e^x dx}_{du}$$

$$= \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C.$$

Lause: (Muuttujanvaihto)

Olkoon g derivoituva välillä $[a,b]$.
Olkoon f jatkuva joukossa $g([a,b])$.
Merkitään $g(a) = A$ ja $g(b) = B$.
Tällöin

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_A^B f(u)\, du.$$

(Eli sijoitus: $\begin{cases} u = g(x) \\ \frac{du}{dx} = g'(x), \quad du = g'(x)dx \end{cases}$)

Esim:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

(Sijoitus: $u = x+2$, $du = dx$)

$$= \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C$$

$$= \arctan(x+2) + C.$$

Trigonometristen funktioiden antiderivaatat

Helppoja:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Esim:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx.$$

Tämä integraali on muotoa

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

joten

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Esim:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{=1}\,(1+x^2)^{1/2} + C.$$

Esim:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = ?$$

$$F(x) = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right|$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x} + \tan x}$$

$$\cdot\left(\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\sin x) + 1+\tan^2 x\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos x} + \tan x}\left(\frac{\sin x + \overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x}\right)$$

$$= \frac{\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}.$$

Siis $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C.$

Integraalit muotoa

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

jossa $m, n \in \mathbb{Z}_+$

Jos joko m tai n on pariton niin voidaan laskea seuraavasti:

Esim:

$$\int \sin^3 x \cos^8 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos^8 x \cdot \overbrace{\sin x \, dx}^{du}$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^8 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^8 x \cdot \sin x \, dx - \int \cos^{10} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= -\frac{1}{9}\cos^9 x + \frac{1}{11}\cos^{11} x .$$

Vaikea tilanne on siis se, jolloin <u>sekä</u> n <u>että</u> m ovat <u>parillisia</u>.

Tässä tapauksessa tulee käyttää kaavoja

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Örnek: $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Örnek: $\int \sin^4 x\,dx$

$= \int (\sin^2 x)^2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx$

$\int \cos^2 2x\,dx$

$u = 2x$
$du = 2dx$
$dx = \frac{1}{2}du$

$= \frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du$

yukarıdaki örnek

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right) + C$

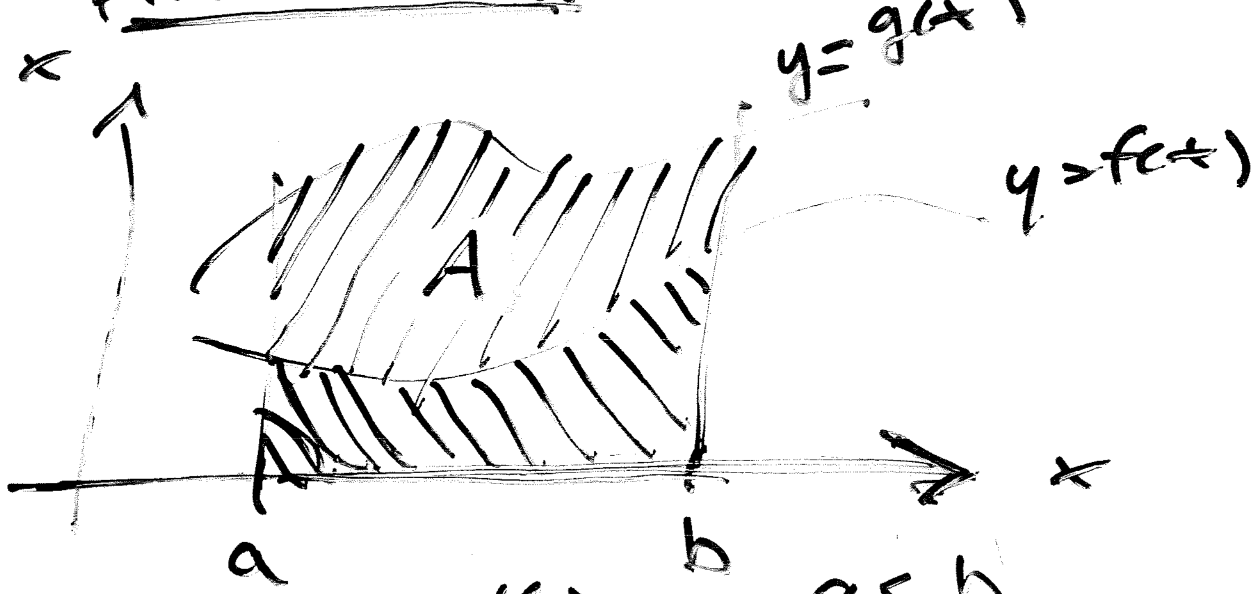
$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 4x + C.$

Soru:

$\int \sin^4 x\,dx = ax + b\sin 2x + c\sin 4x$

ise, a, b, c [illegible]

Käyrien väliin jäävät pinta-alat



Oletetaan että $a < b$ ja $g(x) \geq f(x)$. Tällöin

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

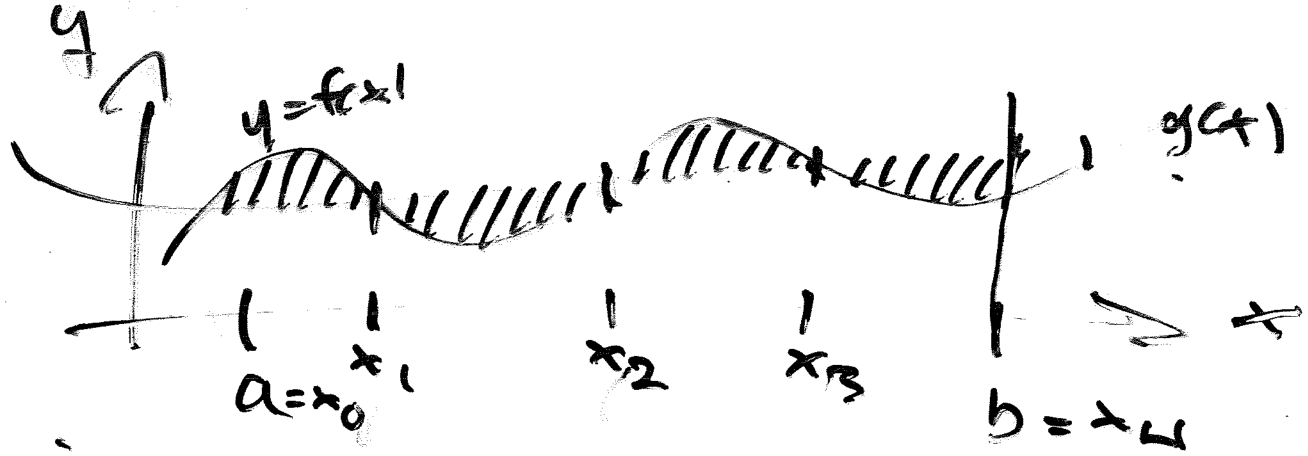
Jos $g(x) - f(x)$ ei ole samaa etumerkkiä kaikilla $x \in [a, b]$, niin tällöin

$$A = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$$

joka lasketaan helpoiten paloittain ratkaisemalla yhtälöstä

$$f(x) = g(x)$$

pisteet joissa merkki vaihtuu ja integroimalla näiden välissä:



jolloin
$$A = \sum_{i=0}^{3} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\text{säilyttää merkin kullakin osavälillä } [x_i,\, x_{i+1}].} dx$$

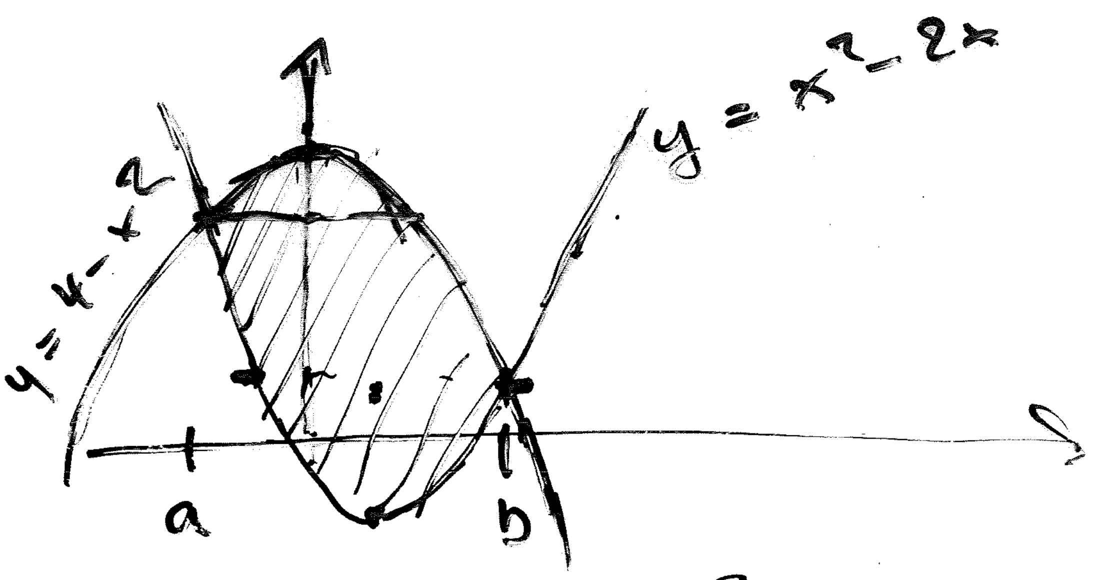
Pinta-alan sijasta usein lasketaan funktioille f ja g seuraavan tyyppisiä integraaleja:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$$

Tämä __ei__ ole pinta-alakäsite, vaan "energiatyyppinen" integraali.

__Esim:__ Etsi se rajoitetun pinta-ala, jota rajaavat käyrät $y = x^2 - 2x$ ja $y = 4 - x^2$.

$= (x-1)^2 - 1$.



$$x^2 - 2x = 4 - x^2$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \begin{cases} -1 = a \\ 2 = b \end{cases}$$

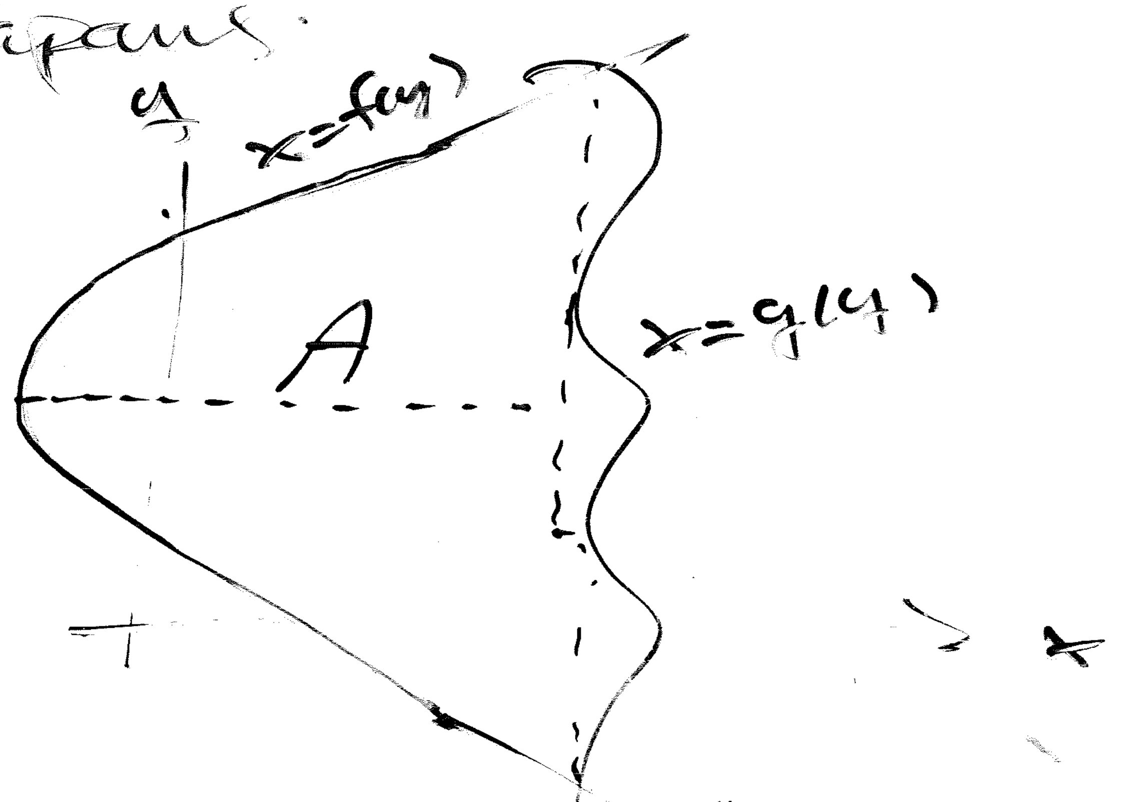
$$A = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - x^2 + 2x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx$$

$$= \Big|_{-1}^{2} \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right)$$

$$= 9.$$

Tapaus:



Jos laskettaisiin "suoraan", niin tarvittaisiin kaksi monta integraalia.

Tehtävä helpottuu jos sitä käännetään 90 astetta — oletetaan että rajaavat käyrät osataan lausua "ratkaistussa" muodossa

Osittaisintegrointi

"Tulon derivoimissäännön tarkoituksen mukaista käyttöä takaperin":

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Jos $U(x)$ ja $V(x)$ ovat derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dx}\left(U(x)\,V(x)\right)$$

$$= U(x)\,\frac{dV(x)}{dx} + \frac{dU(x)}{dx}\,V(x)$$

niin analyysin peruslause saa

$$U(x)\,V(x) =$$

$$\int U(x)\,\frac{dV(x)}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx}$$

$$+ \int \frac{dU(x)}{\cancel{dx}} \cdot V(x)\,\cancel{dx}$$

muodollisesti

$$= \int U(x)\,dV(x)$$

$$+ \int V(x)\,dU(x)$$

eli toisin sanoen

$$\int U(x)\,dV(x) = U(x)V(x)$$

$$- \int V(x)\,dU(x)\,.$$

Temppu kannattaa, jos oikealla puolella oleva integraali on helpompi laskea kuin vasemmalla.

Exm:

$$\int \underbrace{x e^{x}\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{x}\,dx; \\ \dfrac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow du = dx \\ \text{j=} \quad v = e^{x} \end{cases}$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{x}\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{x}}_{v} - \int \underbrace{e^{x}}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}$$

$$= x e^{x} - e^{x} + C. \qquad \blacksquare$$