22.11.2007

Riemann-integraalin laskusäännöt

(i) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(ii) $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(iii) Lineaarisuus:

f, g ovat Riemann-integroituvia, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

(iv) jos ~~tällöin~~ $a < c < b$ niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(v) Epäyhtälöt säilyvät:

$$f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

niin
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(vi) Kolmioepäyhtälö
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(Jos f on Riemann-integroituva niin tällöin $|f|$ on myös Riemann-integroituva.)

__Perustelu:__ $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $a < b$, $\Delta x_i > 0$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(c_i)\underbrace{\Delta x_i}_{>0}|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f(c_i)|\,\Delta x_i$$

TS:
$$|R(f, P, c)| \leq R(|f|, P, c)$$

$$0 \xleftarrow{\|P\|} \qquad \|P\| \to 0$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad \square$$

(vii) Jos f on parillinen eli $f(x) = f(-x)$, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

(viii) Jos f on pariton eli $f(-x) = -f(x)$, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 .$$

Perustellaan käymällä Riemann-summissa ja ottamalla sitten raja partitiota tihentämällä — rajankäynti säilyttää epäyhtälöt epäyhtälöinä ja yhtälöt yhtälöinä.

Integraalilaskennan väliarvolause

Lause: Olkoon f jatkuva välillä $[a,b]$. Tällöin on olemassa $c \in [a,b]$ siten että

$$(*) \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

Huom: On tarkoitettava, että funktion f keskiarvo välillä [a, b]

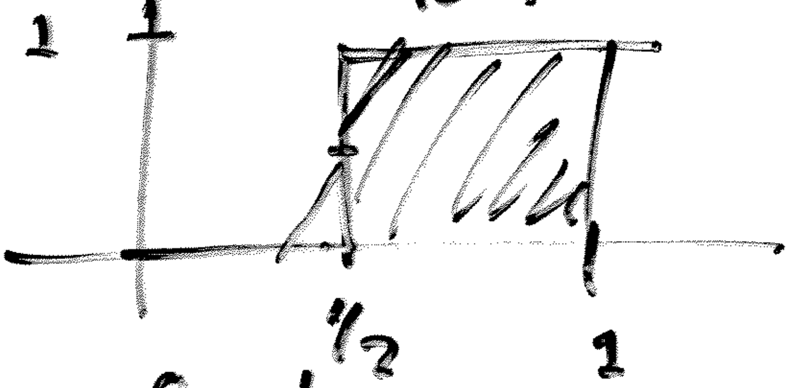
$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

saavutetaan eräässä pisteessä c

$$f(c) = \bar{f}.$$

Esim:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \tfrac{1}{2}) \\ 1, & x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$$\bar{f} = \frac{1}{1-0}\int_{1/2}^{1} 1 \cdot dx = 1/2$$

mutta ei ole $c \in [0,1]$ jossa $f(c) = \frac{1}{2}$.

Perustelu: Olkoon f $\int$-va välillä [a, b]. Tällöin on olemassa $m, M \in \mathbb{R}$, $l, u \in [a,b]$, siten että

$$m = f(l) \le f(x) \le f(u) = M$$

kaikilla $x \in [a,b]$.

Tarkastellaan partitiota
$$P = \{a = x_0, x_1 = b\}.$$
Tällöin
$$L(f, P) = f(l)(b-a) = m(b-a)$$
ja
$$U(f, P) = f(u)(b-a) = M(b-a)$$
Koska f on jatkuvana Riemann-integroituva, niin
$$\begin{array}{ccccc} L(f,P) & \leq & \int_a^b f(x)\,dx & \leq & U(f,P) \\ \| & & & & \| \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(l) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(u)$$
Koska f on jatkuva, se saavuttaa kaikki arvonsa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä (jatkuvan funktion väliarvo-

ominaisuus): Erityisesti

$\exists c \in [a,b]$ s.e. $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ∎

Paloittain jatkuvat funktiot

(Piecewise continuous)

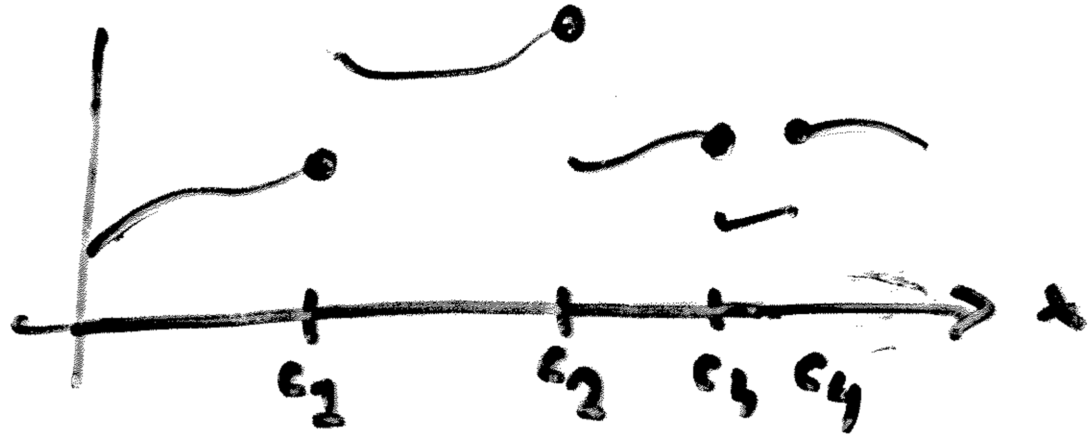
__Määr:__ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ on __paloittain jatkuva__ jos on olemassa pisteet $c_1, \dots, c_n$ siten että

$$a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$$

ja jatkuvat funktiot F_j, $j = 0, \dots, n$, $F_j : [c_{j-1}, c_j] \to \mathbb{R}$ siten että

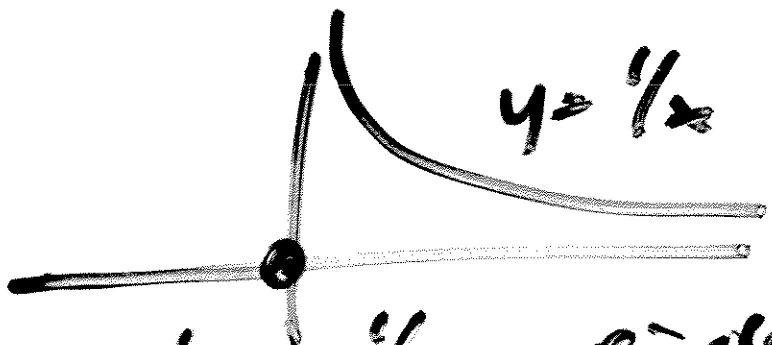
$$f(x) = F_j(x) \quad x \in (c_{j-1}, c_j).$$

Esim: Paloittain jatkuva



funktio $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

ei ole paloittain jatkuva



koska $\lim_{x \to 0+} 1/x$ ei ole luku.

Lause: Paloittain jatkuvat funktiot ovat Riemann-integroituvia. Jos f on paloittain jatkuva ja sen "hyppypisteet" ovat $c_1, \ldots, c_n$ niin

$$\int_a f(x)\,dx = \sum_{i=1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx.$$

Analyysin peruslause

" Riemann-integraali on eräässä mielessä derivoinnin kanssa käänteinen operaatio "

Lause: Olkoon f jatkuva välillä I, ja $a \in I$

(i) Määritellään funktio

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \quad \forall t \in I.$$

Tällöin F on derivoituva välillä I, ja lisäksi

$$F'(t) = f(t).$$

(ii) Jos $G(t)$ on jokin funktio, joka toteuttaa

$$G'(t) = f(t)$$

niin voidaan laskea Riemann-integraalin arvo $(a, b \in I)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \equiv \Big/_a^b G(t)$$

8.

Huom: Funktiota G kutsutaan usein funktion f antiderivaataksi tai primitiivifunktioksi.

Perustelu:

(ii) $t \in I$.

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^{t} f(x)\,dx \right]$$

$t+h \in I$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{t} f(x)\,dx + \int_t^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^{t} f(x)\,dx \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

Integr. lask. väliarvolause

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h f(c)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(c)$$

~~eräällä~~ $c = c(h)$ joka

toteuttaa $t \leq c(h) \leq t+h$
tai $t+h \leq c(h) \leq t$ ($h>0$ tai $h<0$.)
Kun $h \to 0$, niin $c(h) \to t$.
Siis

$$\lim_{h \to 0} f(c(h)) = f(t)$$

koska f on jatkuva.

(ii) Olkoon $G = G(t)$ sellainen funktio, että $G'(t) = f(t)$ $\forall t \in I$. Lauseen kohta (i) sanoi että myös funktio

$$F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$$

toteuttaa

$$F'(t) = f(t) \quad \forall t \in I.$$

Siis

$$\frac{d}{dt}\left(G(t) - F(t)\right) =$$

$$G'(t) - F'(t) = f(t) - f(t) = 0$$

kaikilla $t \in I$.

Väliarvolause sanoo, että funktio $h(t)$ jolla $h'(t) = 0 \ \forall t$ on pelkkä vakio: $c \in [a,b]$

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c) = 0$$

$\Rightarrow h(b) = h(a) \Rightarrow h(t)$ on vakio.

Siis $G(t) = F(t) + C \ \forall t \in I$

ja myös

$$(*6) \quad G(t) = \int_a^t f(x)\,dx + C.$$

Sijoittamalla $t = a$ saadaan $G(a) = C$ joten $(*6)$ antaa

$$G(t) - G(a) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

Evaluaatio eli sijoitussymboli

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/_a^b G(t)$$

jos $G'(t) = f(t) \ \forall t \in [a,b]$

Esim:

$$\int_{-1}^{2} (x^2-3x+2)\,dx$$

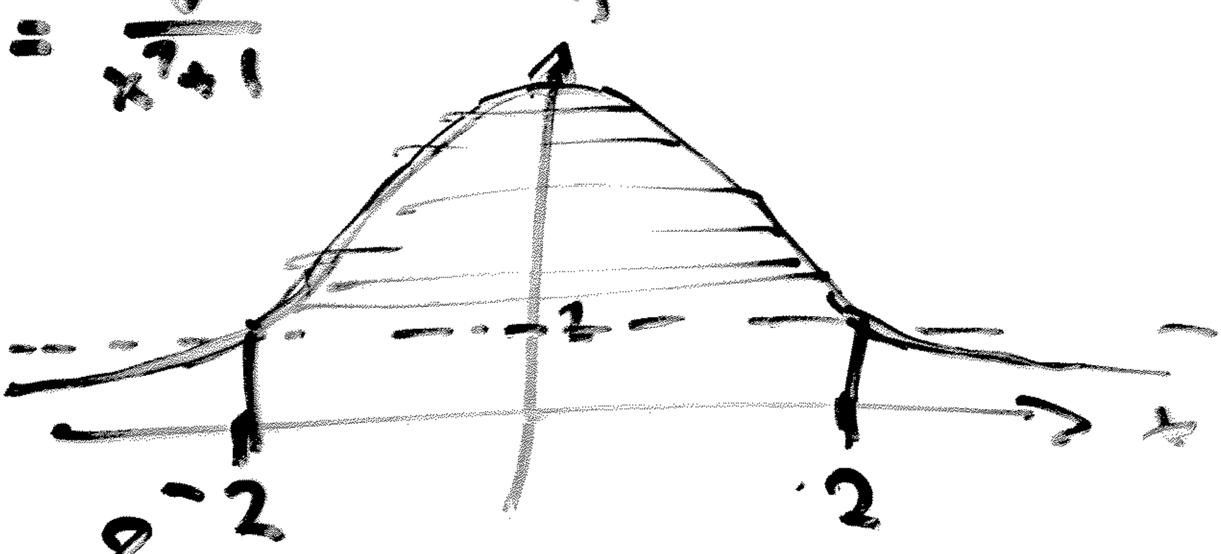
$$= \Big|_{-1}^{2} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2$$

$$= \frac{9}{2}.$$

Esim: Pinta-ala, jota rajaavat suora $y = 1$ ja käyrä

$$y = \frac{5}{x^2+1}$$



$$A = \int_{-2}^{2} \left(\frac{5}{x^2+1} - 1\right) dx$$

$$= 2\int_{0}^{2} \left(\frac{5}{x^2+1} - 1\right) dx$$

$$= 2\int_0^2 \frac{5\,dx}{x^2+1} - 2\Big|_0^2 x$$

$$\underbrace{}_{4}$$

Pitäisi keksiä funktio $F(t)$ jolle $F'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

$$\frac{d\tan t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)$$

$$= \frac{\cos t \cdot \cos t - (-\sin t)\sin t}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}$$

$$= 1 + \tan^2 t.$$

Jos $\quad y = \tan x$

$\quad\quad x = \arctan y.$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Siis $\quad F(t) = \arctan t \; (+C)$

$$\int_0^2 \frac{5\,dx}{x^2+1} = 5\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 5 \Big/_0^2 \arctan x = 5 \arctan 2.$$

Siis kysytty ala on

$$A = 10 \arctan 2 - 4. \blacksquare$$

<u>Esim:</u> $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^t \frac{dx}{x} = \ln t$$

Tämä on luonnollisen logaritmin määritelmä!

$x > 0$
$a, b > 0.$

$$g(x) = \frac{1}{ax+b}$$

Antiderivaatta $= G(t)$

$$\frac{d}{dt}\ln(at+b) = \frac{1}{at+b}$$

$$\cdot \frac{d}{dt}(at+b) = \frac{a}{at+b}$$

Siis $G(t) = \frac{1}{a}\ln(at+b)$!

<u>Esim:</u> $\displaystyle\int_0^t x e^{x^2}\,dx = ?$

$G'(t) = t e^{t^2}$; kelpaa G.

$$\frac{d\, e^{t^2}}{dt} = e^{t^2} \cdot 2t = 2t e^{t^2}$$

Siis valitaan $G(t) = \frac{1}{2} e^{t^2}$.

<u>Esim:</u>

$$G(x) = x^5 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt$$

Laske $\dfrac{dG}{dx}$. Jos $F(x) = \displaystyle\int_{-4}^{x} e^{-t^2}\,dt$

niin ~~t~~ tällöin $G(x) = x^5 F(5x)$

Siis

$$\frac{dG}{dx} = 5x^4 F(5x) + 5x^5 F'(5x)$$

Analyysin peruslause sanoo

$$F'(x) = e^{-x^2}.$$

Saadaan

$$G'(x) = 5x^4 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt + 5x^5 e^{-(5x)^2}$$