Integraalilaskenta

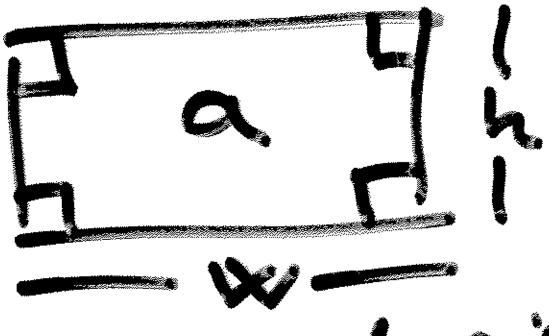
21.11.20

Pinta-ala-aksioomat:

Lähdemme siitä, että meille tuttu pinta-alan käsite $\mathbb{R}^2$:ssa toteuttaa tiettyjä ilmeisiä ehtoja:

1. Alueen $A \subset \mathbb{R}^2$ pinta-ala (jos on olemassa) on ei-negatiivinen reaaliluku.

2. Suorakaiteen pinta-ala $a = wh$, jossa



3. Yhtenevien alueiden pinta-alat ovat samoja. (Ts. pinta-ala on kiertojen ja yhdensuuntaissiirtojen alla invariantti.)

(4.) Jos alue $A \subset B$ (osajoukko) niin sen pinta-ala on korkeintaan yhtä suuri kuin B:n pinta-ala.

(5.) Jos alue A on "pistevieras" unioni alueista $A_1, A_2 \dots A_n$:

$$A = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j \quad !$$

niin ~~tällöin~~

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

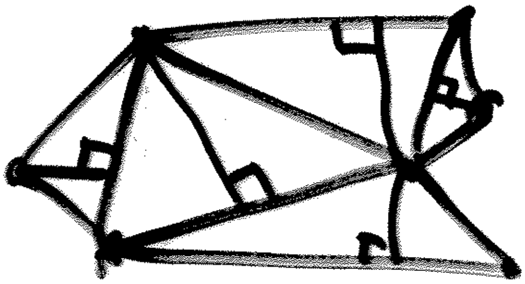
jossa a on A:n pinta-ala ja a_j on A_j:n pinta-ala.

(Joukot $A_1 \dots A_n$ ovat <u>pistevieraita</u> mikäli

$$A_j \cap A_k = \emptyset \text{ kun } j \neq k.$$
)

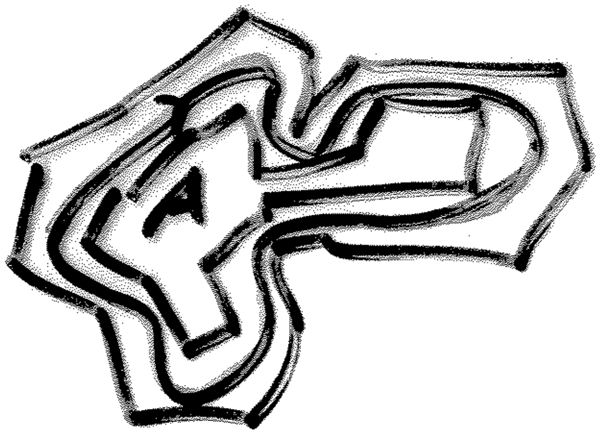
2.6

Edellä olevat aksioomat kattavat kaikkien monikulmioiden pinta-alat. Tämä siksi, että



- Monikulmio voidaan kolmioida
- kolmiot voidaan jakaa suorakulmaisiksi kolmioiksi
- Suorakulmaiset kolmiot ovat suorakaiteiden puolikkaita (yhteneviä kolmioita, joiden p.a. puolikas suorakaiteesta.
- Suorakaiteen p.a.:lle on kaava $a = wh$.

"Pinta-alallisten" joukkojen määrää voidaan lisätä sellaisilla joukoilla, joita voidaan mielivaltaisen tarkasti lähestyä sisältä ja alkoa monikulmioilla.

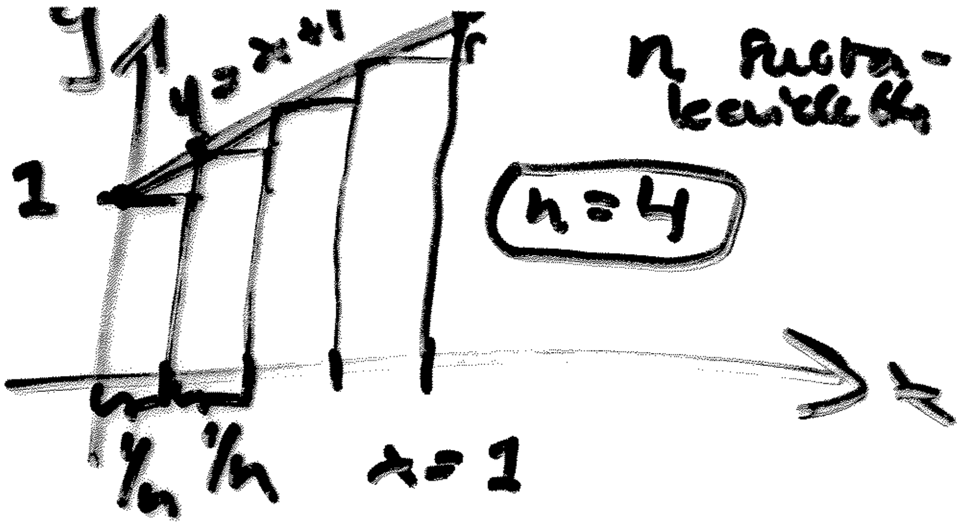


Kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}^2$ pinta-alaa ei voida näin määritellä:

A = Mandelbrotin joukko.

Tällöin pinta-alan määrittäminen epäonnistuu siten, että sisälle ja ulos piirrettyjen monikulmioiden väliin jää nollaa suurempi "tilkku", riippumatta siitä kuinka paljon tihennetään kulmia käytetyissä monikulmioissa.

Esim: Laske se pinta-ala, joka jää käyrän $y = x+1$, x-akselin, y-akselin ja suoran $x = 1$ väliin.



n suorakaiteita

$\boxed{n=4}$

jolloin suorakaiteiden yhteinen pinta-ala on

$$A_n = 1\cdot\frac{1}{n} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\frac{j}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} 1}_{=n} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} j}_{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}\right)$$

$$= 1 + \frac{n-1}{2n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Kun $n \to \infty$ niin $A_n \to \frac{3}{2}$ joka on kysytyn joukon [illegible] laskettu pinta-ala.

Luku A_n on käytetyn funktion $y = x+1$ Riemannin alasumma välillä $[0,1]$ käyttäen tasavälistä jakoa.

Huom: Edellä olevalla tavalla voidaan laskea jokaisen polynomin $y = p(x)$, ja akseleiden välin jäävät pinta-alat – kunhan osataan ensin laskea summa

$$\sum_{k=0}^{n-1} p(k).$$

Esim: Laske raja-arvo

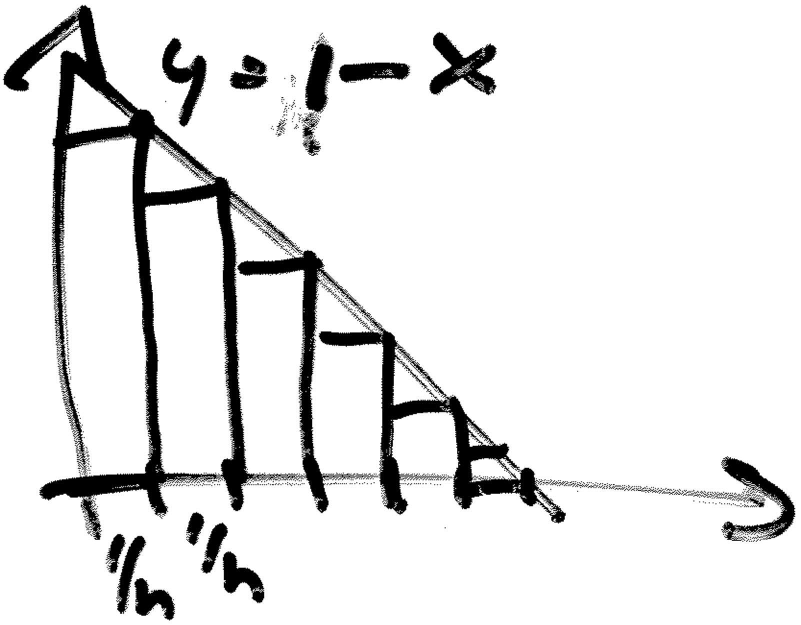
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n^2}.$$

Nyt

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

jos $y = 1 - x$, niin

Kysymys on Riemannin summasta



joten on uskottavaa että $A_n \to \frac{1}{2}$.

<u>Määrätyt (Riemann)-integraalit</u>

Olkoon väli $I = [a, b]$, $a < b$.
Välin I <u>ositus</u> eli <u>partitio</u> on mielivaltainen joukko I:n pisteitä

$$P = \{x_0, \ldots x_n\}$$

jossa
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Ei oleteta, että välien pituus

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

olisi vakio.

Partition P normi määrit.

$$\|P\| := \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$$

Oletetaan jatkossa että funktio f on jatkuva välillä $I = [a, b]$.

Tällöin f on erityisesti jatkuva osaväleillä $[x_{i-1}, x_i]$, joten on olemassa pisteet

$$l_i, u_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

siten että

$$f(l_i) \leq f(x) \leq f(u_i)$$

kaikilla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $i = 1, \ldots n$.

Määr: Riemannin alasumma funktiolle f välillä $I = [a,b]$ partitiolle $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ on luku

$$L(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x_i .$$

Riemannin yläsumma on puolestaan

$$U(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x_i .$$

Huom: Jos funktion f välillä I ja x-akselin väliin jää jäljellä pinta-ala A niin

$$L(f,P) \le A \le U(f,P)$$

kaikilla partitiolle P.

Määr: Funktio f (ei välttämättä jatkuva) on Riemann-integroituva, mikäli

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} U(f,P).$$

Huom: Raja-arvon "lim" tulkinta em. määritelmässä tarkoittaa oikeastaan seuraavaa:

$$\sup_P \{L(f,P)\} = \inf_P \{U(f,P)\}$$

jossa P käy yli kaikkien välin $I=[a,b]$ partitioiden:

sup tarkoittaa joukon pienintä ylärajaa ; inf suurinta alarajaa.

Esim: Kaikki funktiot eivät ole Riemann-integroituvia

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1],\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Olkoon $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ välin $[0,1]$ Partitio.

Tällöin jokaisella osavälillä $[x_{i-1}, x_i]$ sijaitsee rationaaliluku u_i ja irrationaaliluku l_i.

$$0 = \chi(l_i) \leq \chi(x) \leq \chi(u_i) = 1$$

$\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $i = 1, \dots, n$.

$$L(\chi, P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\chi(l_i)}_{=0} \Delta x_i = 0$$

$$U(\chi, P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\chi(u_i)}_{=1} \Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

Siis

$$\sup_P \{L(\chi, P)\} = 0$$

ja

$$\inf_P \{U(\chi, P)\} = 1.$$

Koska $1 > 0$, χ ei ole Riemann integroituva.

Lause: Jokainen kasvava tai ei-laskeva funktio on Riemann-integroituva. Jokainen jatkuva funktio on Riemann-integroituva.

Tarkka perustelu ohitetaan.

Jos f on jatkuva välillä $I = [a, b]$, niin

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(u_i) - f(l_i) \right] \Delta x_i$$

jos $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$.

Kun alamme pienentämään partition P normia $\|P\| \to 0$ niin pisteet

$$u_i, l_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

lähestyvät toisiaan, jolloin jatkuvuuden takia

$$f(u_i) - f(l_i) \to 0.$$

Yleistetyt Riemann-summat

Partitio

$$P = \{a = x_0, \dots \dots x_n = b\}$$

välille $[a, b] = I$. Valitaan jokaiselta osaväliltä

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n$$

näytteenottopiste l. "tag"

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Näiden avulla määritellään Riemann-summa

$$R(f, P, \{c_i\} \equiv c)$$

$$:= \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

Selvästi nähdään, että mille tahansa näytteenottopisteiden valinnalle $c = \{c_i\}$

Pätee

$$L(f,P) \leq R(f,P,c) \leq U(f,P)$$

olipa f Riemann-integroituva ~~tai~~ ei. Jos f on Riemann-integroituva, niin tällöin kuristusperiaatteella

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f,P,c)$$

$$= \lim_{\|P\| \to 0} U(f,P,c) \qquad (*)$$

$$= \lim_{\|P\| \to 0} L(f,P,c) =: I$$

Määr.: Jos f on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$ niin tällöin I:n Riemann integraali

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

jossa I on annettu kaavassa (*)