20.11.2007

# Iso-$\mathcal{O}$-notaatio

**Määr:** Olkoon $f$ ja $u$ funktioita, määritelty $x \approx a$ ympäristössä. Kirjoitetaan

$$f(x) = \mathcal{O}(u(x))$$

kun $\begin{cases} x \to a \\ x \approx a \end{cases}$ mikäli

on olemassa $a$:n sisältävä avoin väli $I \ni a$ sekä eräs jollekin vakiolle $K < \infty$ pätee

että $|f(x)| \leq K\,|u(x)| \quad \forall x \in I$

<u>Esim:</u> $f(x) = \sin x$, $u(x) = x$

niin $\sin x = \mathcal{O}(x)$

kun $x \approx 0$.

Totta koska

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Tarkoittaa ts. sitä, että kaikille $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$ siten että

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

kun $|x| < \delta_\varepsilon$

Siis, jos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ja määritellään

$$I_\varepsilon = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$$

niin tällöin $\forall x \in I_\varepsilon$:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{3}{2} \equiv K.$$

Esim.:

$$\cos x = \mathcal{O}(1)$$

kun $x \to +\infty$. Tarkoittaa vain, että $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\cos x}{1}\right| = |\cos x| \leq 1$$

erityisesti, jos $x \to +\infty$.

Toisin sanoen, funktio $\cos x$ on rajoitettu tosin "ympäristössä".

## Laskusääntöjä

(i) jos $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ kun $x \to a$, niin tällöin

$$c f(x) = \mathcal{O}(u(x))$$

(ii) jos $f(x)$ ja $g(x)$ toteuttavat

$$\begin{cases} f(x) = \mathcal{O}(u(x)) \\ g(x) = \mathcal{O}(u(x)) \end{cases}$$

niin $f(x) + g(x) = \mathcal{O}(u(x))$.

Totta, koska $(x \in I = (a-\delta, a+\delta))$

$$\left|\frac{f(x)+g(x)}{u(x)}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{f(x)}{u(x)}\right|}_{\substack{\leq K_1 < \infty \\ \text{koska} \\ f(x) = \mathcal{O}(u)}} + \underbrace{\left|\frac{g(x)}{u(x)}\right|}_{\substack{\leq K_2 < \infty \\ \text{koska} \\ g(x) = \mathcal{O}(u(x))}}$$

$$\leq K_1 + K_2 < \infty.$$

(iii) "$\mathcal{O}(u(x)) = \mathcal{O}(c\,u(x))$"
$c \neq 0$

Siis: Jos

$$f(x) = \mathcal{O}(u(x))$$

niin pätee eltä

$$f(x) = \mathcal{O}(c\,u(x)).$$

Esim: Eksponenttifunktion Taylorin polynomi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

kun $x \approx 0$. Totta koska

4.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + E_4(x)$$

jossa

$$E_4(x) = \frac{e^{\bar{X}}}{4!}\, x^4 .$$

jos $x \in I = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$,

niin $\bar{X} \in (0, x) \subset I$,

joten $x < \delta$

$$|E_4(x)| < \frac{e^{\delta}}{24}\, x^4$$

Jos $\delta = 1$, niin tällöin

$|E_4(x)| < \frac{x^4}{8}$ kun

$x \in (-1, 1)$. Siis

$E_4(x) = O(x^4)$ kun $x \to 0$.

## Raja-arvojen määrittäminen l'Hôpitalin säännöllä

Kirjoitetaan myös "l'Hospitalin sääntö" — "sairaalasääntö"

Idea on tutkia derivaatan avulla raja-arvoja, jotka ovat joko muotoa $\frac{0}{0}$ tai $\frac{\infty}{\infty}$ tai ovat tällaiseen muotoon saatettavissa.

## Valmistava esimerkki

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{\underbrace{2e^{x} - 2 - 2x - x^{2}}_{O(x^3)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[2\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right) - \left(2x - \frac{8x^3}{3!} + O(x^5)\right)\right]}{\left[2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right) - 2 - 2x - x^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{2}{6}+\frac{8}{6}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \mathcal{O}(x^5)}{\left(\frac{x^3}{3}\right) + \mathcal{O}(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \underbrace{\frac{\mathcal{O}(x^5)}{x^3}}_{=\mathcal{O}(x^2)}}{\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{\mathcal{O}(x^4)}{x^3}}_{\mathcal{O}(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x)}$$

$$= \frac{1 + \lim_{x\to 0} \mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{3} + \lim_{x\to 0} \mathcal{O}(x)} = 3.$$

koska $\lim_{x\to 0} \mathcal{O}(x^2) = \lim_{x\to 0} \mathcal{O}(x) = 0.$

(Kuristusperiaate!)

**Lause:** (l'Hospitalin I. sääntö)
Olkoon funktiot $f$ ja $g$ derivoituvia välillä $(a,b)$ $(a<b)$. Oletetaan että $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ ja että

(i) $$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0.$$

(ii) $$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

(jossa $L \in \mathbb{R}$ tai $\pm\infty$)

Tällöin

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \exists$$

ja yhtäsuuri kuin $L$.

**Perustelu:** Jatketaan funktiot $f$ ja $g$ raja-arvojensa avulla jatkuviksi koko välille $[a,b)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ f(x) & x \in (a,b) \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ g(x) & x \in (a,b). \end{cases}$$

Tällöin voidaan käyttää yleistettyä väliarvolausetta funktioihin $F$ ja $G$:

Jos $x \in (a,b)$

$$\frac{F(x)}{G(x)} \left( = \frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

$$= \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)}$$

Y.V.A.L

$$= \frac{F'(c)}{G'(c)}$$ eräällä $c \in (a, x)$.

Eli $c = c(x)$!

Kun annetaan $x \to a+$ niin koska $c \in (a, x)$ niin myös $c \to a+$.

Siis

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$= \lim_{c \to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L. \blacksquare$$

<u>Esim:</u>

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$\sim \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

l'Hôpitalin "mato" joka korvautuu = -merkillä vasta, kun sen oikealle puolelle oleva raja-arvo on todettu olemassa olevaksi.

Esim.:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$$

$$\overset{\sim}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x}$$

$$\overset{\sim}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2}$$

$$\overset{\sim}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x}$$

$$= \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

"Madot" korvautuvat =-merkillä lopusta alkuun päin edeten, koska viimeinen raja-arvo saatettiin laskea ilman l'Hôpitalin sääntöä.

Esim.:

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

on muotoa $\infty-\infty$ pisteessä $x=0$. Ristiinkertomalla

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

(muotoa $0/0$)

$$\overset{\sim}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}$$

$$\overset{\sim}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{\cos + \cos x - x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}$$

$$=\frac{0}{2}=0.$$

Lause: (l'Hôpitalin 2. sääntö) Olkoon $f$ ja $g$ derivoituvia välillä $(a,b)$ ja $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. $(a<b)$

Jos pätee

(i)
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \infty$$

(ii)
$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

jollakin $L \in \mathbb{R}$ (tai $L = \pm\infty$)

niin seuraa että

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} \ \exists \ \text{ja} = L.$$

<u>Perustelu:</u> ohitetaan. Adamsin kirjassa harjoitustehtävänä.

<u>Esim:</u> $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$

l'Hospitalin sääntö 2 x

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x}$$

$= 0$, kuten odotettiinkin.

Toinen tapa: $\dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{e^{-x}}{(1/x^2)}$

on muotoa $\frac{0}{0}$ kun $x \to \infty$.

l'Hôspitalin 1. säännöllä:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)} \sim \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-2x^{-3}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-3}} \sim \frac{1}{2}\lim \frac{-e^{-x}}{-3x^{-4}}$$

$$= \frac{1}{6}\lim \frac{e^{-x}}{x^{-4}}$$

joka on edelleen muotoa $\frac{0}{0}$. Tämä jatkuisi äärettömän kauan, ja normaaliälyinen tajuaa ettei tämä tapa ole voittajien ratkaisu.

## Eräiden summalausekkeiden raja-arvoja

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n.$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$
$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ kpl}}$$

$$= n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

~~Entä~~ summa

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$$

Ansatz:

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} q(i)$$

jossa $q$ on polynomi astetta $k$, niin $P(n)$ on polynomi astetta $k+1$.

Nyt $q(i) = i^2$ ja

$P(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$

jossa $a, b, c, d$ tulee määrätä siten että

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tutkitaan lauseketta

$$P(n+1) - P(n) = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Toisaalta

$P(n+1) - P(n) =$

$a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d$

$-(an^3 + bn^2 + cn + d)$

$= a(3n^2 + 3n + 1)$

$+ b(2n+1) + c$

$= 3an^2 + (3a + 2b)n$
$+ (a + b + c).$

16

Saadaan siis yhtälö

$$3an^2 + (3a+2b)n + (a+b+c) = n^2 + 2n + 1 \quad \forall n.$$

Joka toteutuu identtisesti vain jos

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 2 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \qquad (d = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Joten

$$P(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Tässä laskettiin polynomifunktioiden "diskreetti integraali".