Perustelu:

15.11.2007

$$h(x) := [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)].$$

Tällöin $h(a) = 0$ ja myös $h(b) = 0$. Koska f' ja g' $\exists$, niin on myös h'. Voidaan soveltaa Rollen lauetta l. tavallista väliarvolausetta ehdolla $h(a) = h(b)$. $\exists\, c \in (a, b)$ s.e. $h'(c) = 0$.

Nyt

$$h'(c) = [f(b) - f(a)]\, g'(c) - [g(b) - g(a)]\, f'(c) = 0$$

Ratkaisemalla tästä saadaan väite.

10

Yleistetty väliarvolause sisältää erikoistapauksena tavallisen väliarvolauseen: kun $g(x) = x$, niin tällöin saadaan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}.$$

Lineaarisen approksimaation virhekaava:

Lause: Jos $f''(t)$ $\exists$ kaikille $t \in (a, x)$, niin tällöin $\exists\, X \in (a, x)$ siten että lineaarisen approksimaation

$$f(x) \approx L(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

virhe

$$E(x) := f(x) - L(x)$$

toteuttaa

20

$$E(x) = \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x-a)^2.$$

Huom: Jos tiedetään että

$$|f''(t)| \le M < \infty$$

kaikilla $t \in (a, x)$ niin saadaan epäyhtälö

$$|E(x)| \le \frac{M|x-a|^2}{2}.$$

Perustelu lauseelle: Yleisyyttä menettämättä oletetaan että $x > a$, jolloin

$$E(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$$

ja

$$\frac{dE(t)}{dt} = E'(t) = f'(t) - f'(a).$$

Sovelletaan yleistettyä väliarvolauseetta funktioihin

Bw

$E(t)$ ja $(t-a)^2$

Siis

$$\frac{E(t)}{(t-a)^2} = \frac{E(t)-\overset{0}{\cancel{E(a)}}}{(t-a)^2-(a-a)^2}$$

Y.V.A.L

$$\Rightarrow = \frac{E'(c)}{2(c-a)} \quad \text{eräällä } c \in (a,t).$$

(*) $$= \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(c)-f'(a)}{(c-a)}.$$

Tavallinen väliarvolause sanoo, että

(**) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{f'(c)-f'(a)}{c-a} = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

jossa $\xi \in (a,c) \subset (a,t)$.

Yhdistämällä (*) ja (**) saadaan

$$\frac{E(t)}{(t-a)^2} = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

mikä todisti väitteen. ▮

40

Esim: Saatiin lin. appr.

$\sqrt{26} = 5.1$. $E(26) = ?$

$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)$

$= -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

joten

$$E(26) \leq \frac{1}{2} \underbrace{\max_{\xi \in [25,26]} |f''(\xi)|}_{f''(25) = \frac{1}{500}} \cdot \underbrace{|26-25|^2}_{=1}$$

$= 0{,}0001$.

Siis saadaan

$\sqrt{26} = 5.1 \pm 0{,}0001$.

Koska $\sqrt{x} = f(x)$ konkaavi funktio, niin sen tangentti kulkee "käyrän yläpuolella

Siis $\sqrt{26} \in [5{,}0999, 5.1]$. (Si

Taylorin polynomit

Oletaan että funktio f on n. kertaa derivoituva pisteen a ympäristössä, ja $f^{(n)}$ on jatkuva.

Taylorin polynomit

$$P_2(x),\ P_2(x),\ \dots\ P_n(x)$$

määritellään kaavalla

$$(1)\quad P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

jossa $k = 1, \dots, n$.

Suoraan derivoimalla (1) molemmin puolin huomataan että

$$\left.\frac{d^j P_k(x)}{dx^j}\right|_{x=a} = f^{(j)}(a)$$

kun $1 \le j \le k \le n$.

Taylorin polynomilla P_k
on niis samat k derivaattaa
kehityskeskipisteessä a
kuin itse funktiolla f.

Määr: Jos $a=0$, niin Taylorin polynomia kutsutaan Maclaurinin polynomiksi.

On syytä odottaa, että kun $x \approx a$, n on iso ja f on "sileä", niin tehty virhe

$$E_n(x) := f(x) - P_n(x)$$

on pieni: $E_n(x) \approx 0$.
Eräs kaava virheelle $E_n(x)$ on nk. Lagrangen jäännöstermi:

Lause: Jos f on $n+1$ kertaa derivoituva, ja olkoon P_n f:n n. asteen Taylorin polynomi kehityskeskipisteessä a.
Tällöin

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

jossa

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^n$$

ja ~~tiedetään~~ $X \in (a, x)$.

Perustelu: $\boxed{n=0}$

$$P_0(x) = f(a) \quad (\text{vakio})$$

Joten

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{P_0(x)} + f'(c)(x-a)$$

jossa $c \in (a, x)$. Tämä on tavallinen väliarvolause.

$\boxed{n = 1}$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{= P_1(x) = L(x)}$$

$$+ \underbrace{\frac{f''(\bar{X})}{2!}(x-a)^2}_{=: E_1(x)}$$

jossa $\bar{X} \in (a, x)$.

Siis lineaarinen approksimaation virhekaava.

Tutkitaan $E_k'(c)$.

$$E_k'(c) = \frac{d}{dt}\left(f(t) - P_k(t)\right)\Big|_{t=c}$$

$$= f'(c) - \frac{d}{dt}\Big(f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\Big)\Big|_{t=c}$$

$$= f'(c) - \Big[f'(a) + f''(a)(c-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(c-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(c-a)^{k-1}$$

$= f'(c) - \tilde{P}_{k-1}(c) = \tilde{E}_{k-1}(c)$

jossa $\tilde{P}_{k-1}$ on funktion f' asteen $k-1$ oleva Taylorin polynomi pisteessä a; ja $\tilde{E}_{k-1}(c)$ on vastaava virhetermi: siis

$$(\dagger) \quad E_k'(c) = \tilde{E}_{k-1}(c).$$

"Induktiohypoteesi"

oletetaan että f:n virhetermin lausekkeen muoto olisi jo tarkastettu kaikille funktioille $f, g, h \ldots$ mutta vain indekseille

$n = 0, 1, \ldots, k-1$.

Seuraavaksi päätellään, että sama pätee myös kun $n = k$.

10.

Tarkastellaan tapausta $n=k$. Sovelletaan yleistettyä väliarvolausetta funktioihin

$E_k(t)$ ja $(t-a)^{k+1}$

jossa $t \in (a,x)$.

$$\frac{E_k(t)}{(t-a)^{k+1}} = \frac{E_k(t) - \overbrace{E_k(a)}^{=0}}{(t-a)^{k+1} - (a-a)^{k+1}}$$

$$\overset{\text{y.v.al}}{=} \frac{E_k'(c)}{(k+1)(c-a)^k} \quad \text{jossa } c \in (a,t).$$

$$\overset{(\dagger)}{=} \frac{\tilde{E}_{k-1}(c)}{(k+1)(c-a)^k}$$

$$\overset{\substack{\text{induktio-}\\\text{hypoteesi}}}{=} \frac{\left(\dfrac{(f')^{(k)}(\bar{\bar{x}})}{k!}(c-a)^k\right)}{(k+1)(c-a)^k}$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(\xi_{\cdot})}{(k+1)!}$$

josta päätä ja häntä vertaamalla

$$E_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\xi_{\cdot})}{(k+1)!}(t-a)^{k+1} \quad \blacksquare$$

Esim: Laske 2. asteen Taylorin polynomilla approksimaatio luvulle $\sqrt{26}$. Arvioi virhettä Lagrangen virhetermillä $E_2(26)$.

$$f(x) = x^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \quad f'''(x)$$

$$= \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

$$\sqrt{26} = f(26)$$

$$= \underbrace{f(25)}_{=5} + \overset{=\frac{1}{10}}{f'(25)}\underbrace{(26-25)}_{=1}$$

$$+ \underbrace{\frac{f''(25)}{2!}}_{-\frac{1}{1000}}\underbrace{(26-25)^2}_{=1}$$

$$+ E_2(26) = 5{,}099 + E_2(26)$$

[illegible]

$$\left|E_2(26)\right| = \left|\frac{3}{8} \cdot \frac{\bar{x}^{-\frac{5}{2}}}{3!}\underbrace{(26-25)^3}_{=1}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{16}\,\frac{\bar{x}^{-5/2}}{1}\right| \quad \bar{x} \in (25, 26)$$

$$\leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(25)^{5/2}} =$$

$$0{,}00002.$$

ስለዚህ $\sqrt{26} = 5{,}099 \pm 0{,}00002.$

<u>Esim:</u> Lasketaan $e = e^1$ arvo McLaurinin polynomeilla

$$f(x) = e^x$$

$$= \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}}_{P_k(x)} + E_{k+1}(x)$$

jossa

$$E_{k+1}(x) = \frac{e^{\bar{X}}}{(k+1)!} x^{k+1}$$

jossa $\bar{X} \in (0, x)$.

Nyt pisteessä $x = 1$ saadaan virhetermille yläraja

$$|E_{k+1}(x)| \leq \frac{e}{(k+1)!} \leq \frac{3}{(k+1)!}$$

jos tiedetään muilla keinoin että $e \leq 3$.

Jotta saataisiin 3 oikeaa desimaalia, tulee olla

$$E_{k+1}(1) < 0{,}0001 \qquad \boxed{?}$$

joka varmasti toteutuu jos

$$\frac{3}{(k+1)!} < 0{,}0001$$

Tämä toteutuu kun $k \geq 7$ mutta ei toteudu kun $k = 6$.
Otetaan 6 termiä mukaan.

Iso-O-notaatio

Määr: Olkoon f, u funktioita. Kirjoitetaan

$$f(x) = O(u(x))$$

kun $x \to a$ mikäli...