Epälineaarisen yhtälön ratkaisemisesta

14.11.2007

$$x^2 + 3x - 7 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 28}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2} \approx \frac{3 \pm 6}{2}$$

Ratkaisukaava!

Yleisesti epälineaarisille yhtälöille ei voida antaa "ratkaisukaavaa" "suljetussa muodossa" – äärellisenä määränä "alkeislaskutoimituksia".

Meille riittää ratkaisumenetelmät jotka antavat halutun tarkkuuden äärellisellä määrällä operaatioita (yhteenlaskua ja kertolaskua).

NUMEERISET MENETELMÄT

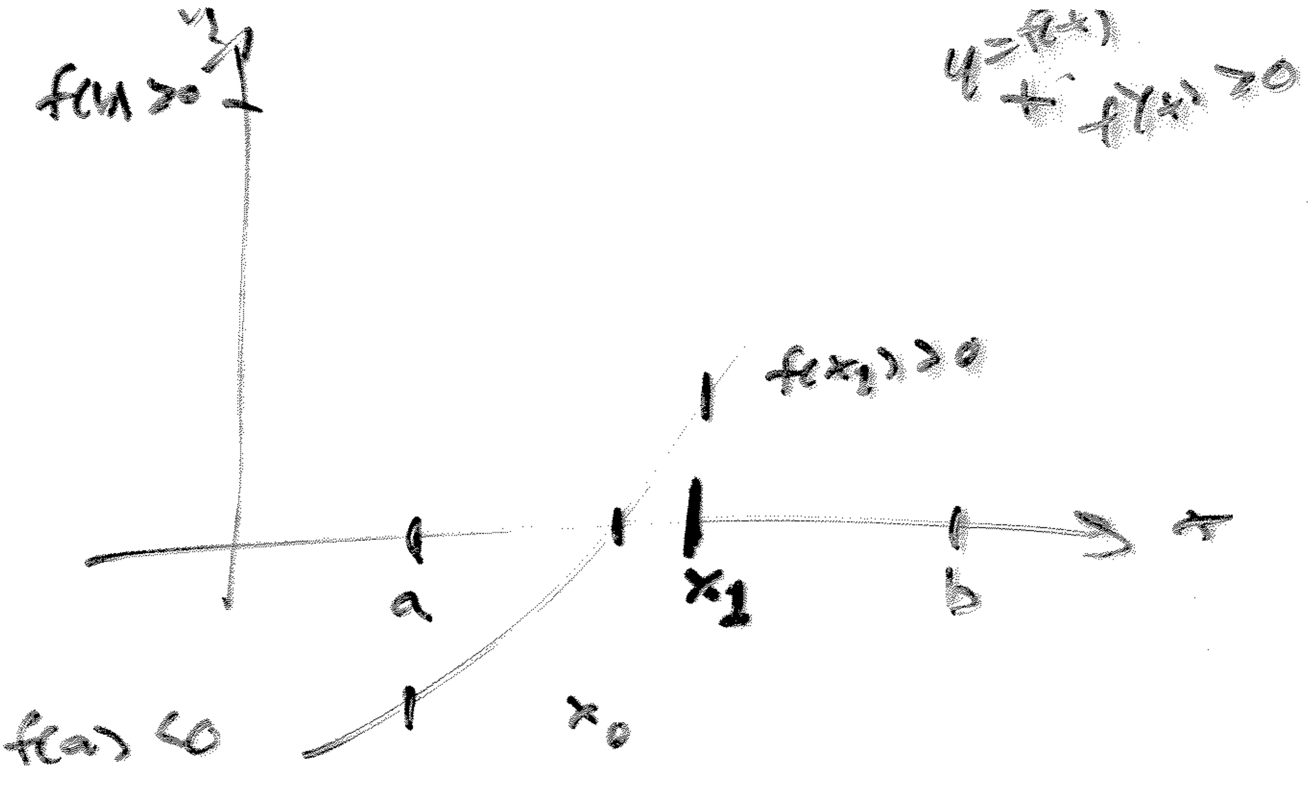
Ennen kuin ratkaisuun ryhdytään numeerisesti, tulee ensin varmistua ratkaisun olemassaolosta ja likimääräisestä paikasta. Ratkaisuja saattaa olla useita ja numeerinen algoritmi "konvergoi" mahdollisesti "väärään" ratkaisuun

Esim: Jos f on funktio, $f(a) = -1$ ja $f(b) = 1$ niin $\exists\, c \in (a,b) : f(c) = 0$ mikäli f on jatkuva (jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuus.)

Huomio 1: Jos ei ole jatkuvuutta, niin meillä ei ole mitään keinoa tehdä kohjänkään epätarkkaan likiarvon yhtälön ratkaisua.

Huomio: luku $c \in (a,b)$ ei välttämättä ole yksikäsitteinen. Toisaalta jos f olisi derivoituva ja $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, niin tällöin c olisi yksikäsitteinen.

Yksinkertaisin mahdollinen numeerinen menetelmä on haarukointi:



$\Rightarrow \exists!\, c \in (a,b) : f(c) = 0.$

Määritellään

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

ja tarkastellaan onko $f(x_1) \geq 0$ vai $f(x_1) < 0$.

Huomataan, että $x_0 \in (a, x_1)$.

Määritellään

$$x_2 = \frac{a+x_1}{2}.$$

Tällä tavoin joka askeleella virhe puolittuu, eli saadaan yksi bitti lisää tarkkaan c binääriesitykseen.

Hyvät puolet:

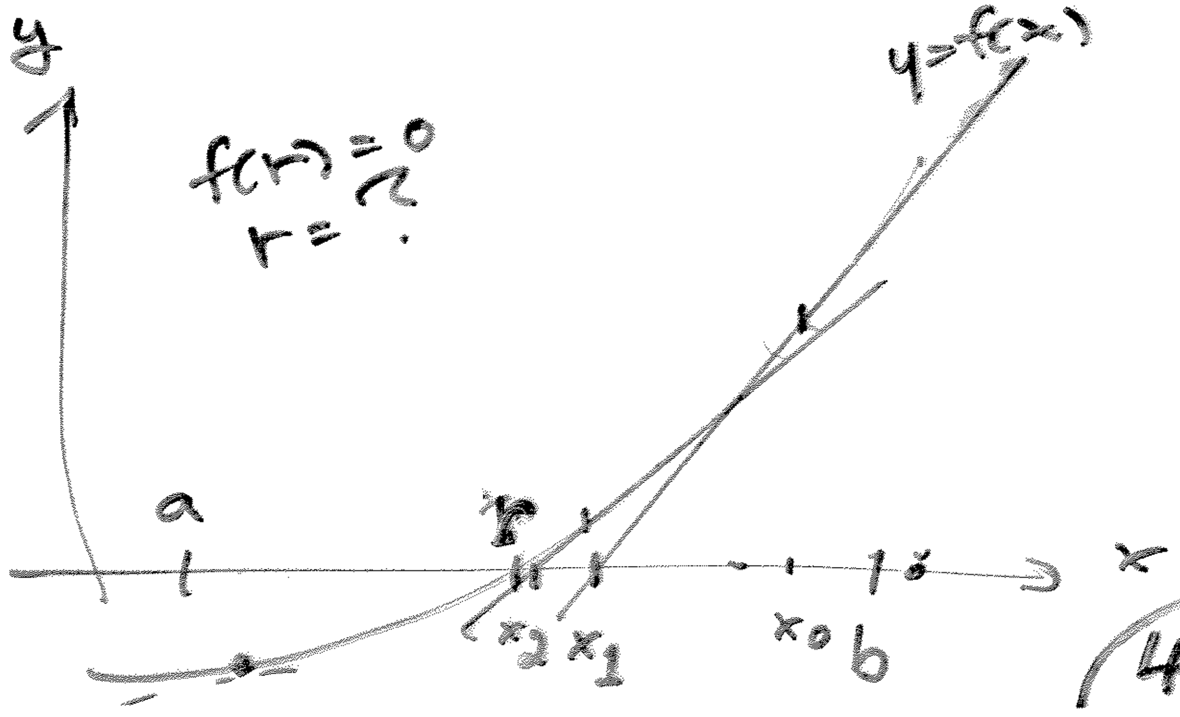
1. Triviaali; Simpanssikin osaa.
2. Toimii kaikille jatkuville funktioille

Huonot puolet

1. Toimii kaikille jatkuville funktioille — ei voi soveltaa parempaa tietoa funktiosta f kuten derivoituvuutta
2. Siksi algoritmi on hidas.

Newtonin iteraatio

Tutkitaan konveksia funktiota f välillä (a,b) (määritelmä sisältää että f on derivoituva).



Korvataan funktio f pisteeseen x_0 piirretyllä tangentillaan ja toivotaan parasta.

Jos f on konveksi pisteen r ympäristössä, niin saatu jono "iteraatteja" alkaen $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ pysyy aina juuren r oikealla puolella, koska tangentit sijaitsevat käyrän $y = f(x)$ alapuolella.

Kuinka kaavoitella?

Tangentin yhtälö pisteessä x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tämä leikkaa x-akselin kun $y = 0$, eli $x = x_1$ antaa

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$\Leftrightarrow$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(oletetaan, että $f'(x_0) \neq 0$ eli tangentti leikkaa x-akselin).

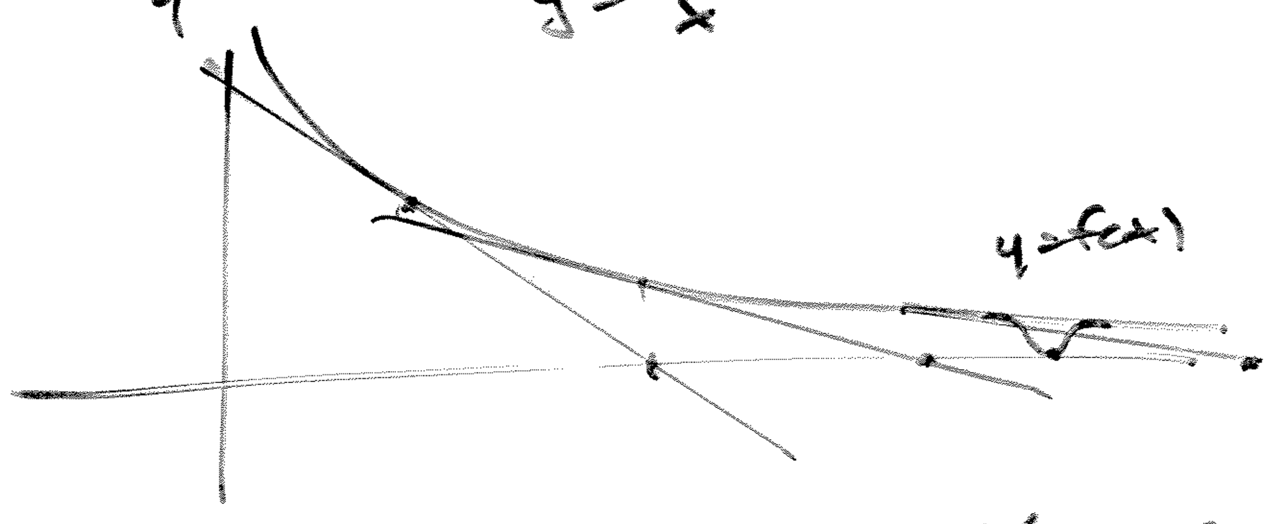
Newtonin iteraatio

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 \text{ on alkuarvaus} \end{cases}$$

Alkuarvauksen valinta määrää sen puuren joka [täydellisesti] tai eltä iteraatio ei suppene mihinkään kun $k \to \infty$.

Newtonin iteraatio edellyttää, eltä $f'(r) \neq 0$. Ajattele tilannetta

$y = \frac{1}{x} = f(x)$



Kysymys: Jos Newtonin iteraatio antaa lukujonon

$x_0, x_1 \ldots \quad x_k, \ldots \in (a,b)$

jolle

$$\lim_{k\to\infty} x_k = r \in (a,b)$$

niin seuraako että $f(r) = 0$?

Kyllä: Oletetaan että funktio

$$x \mapsto \frac{f(x)}{f'(x)}$$

on jatkuva välillä (a,b).

Lasketaan

$$r = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}_{=r} - \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

joten

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = 0$$

josta (mikäli $|f'(x)| \geq m > 0$ $\forall x \in (a,b)$) saadaan

$$0 = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_{n-1})}{\lim_{n\to\infty} f'(x_{n-1})} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = 0$$

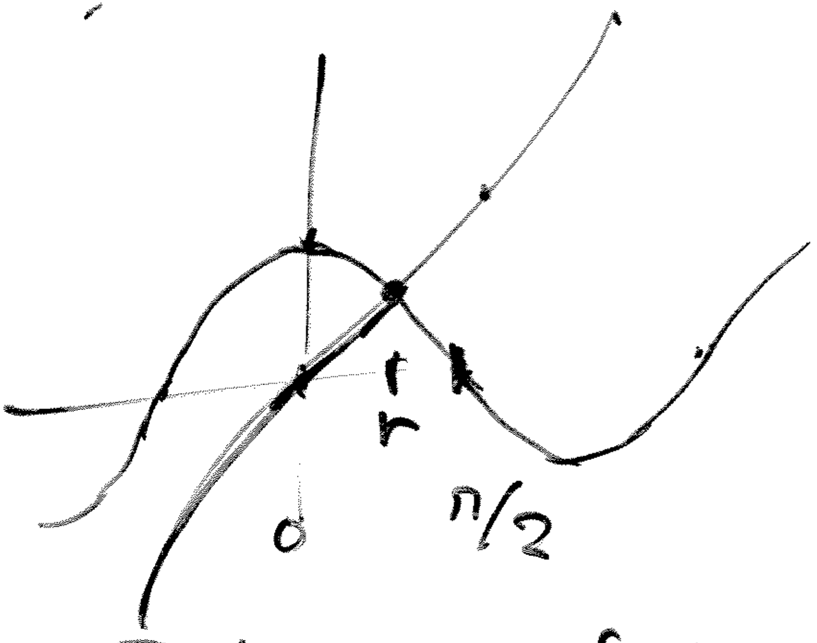
7. ja iteroinnataan z.m

Koska f on jatkuva, saadaan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(r)$$

joten $f(r) = c$. ∎

<u>Esim.</u>: $x^3 = \cos x$.



Juuri näyttäisi sijaitsevan nollan ja $\frac{\pi}{2}$:n välissä. Tutkitaan funktiota

$$f(x) = x^3 - \cos x$$

Saadaan

$$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\geq 0} + \underbrace{\sin x}_{\geq 0 \text{ kun } x \in (0,\pi)}$$

joten f on kasvava välillä $(0, \pi)$. Tällä välillä juuri (jos sellainen olisi) on yksikäsitt..

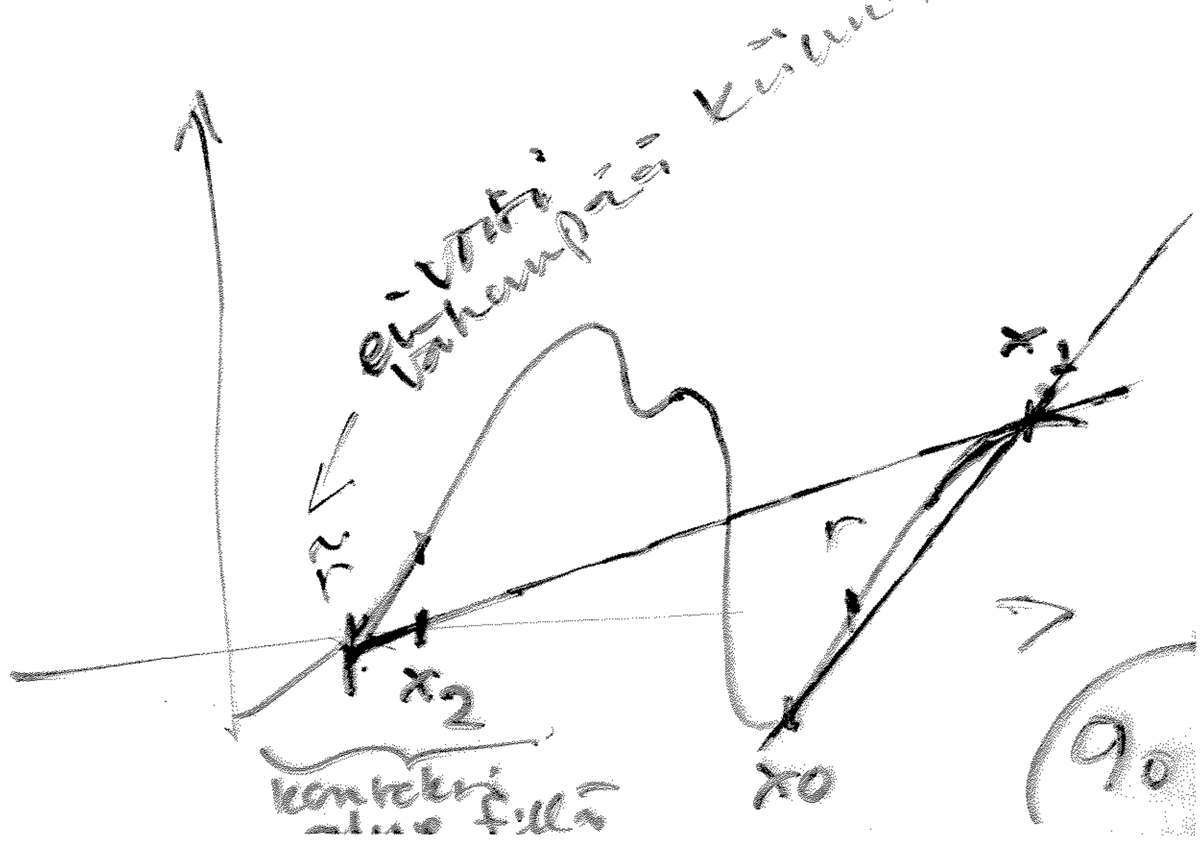
8

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - \cos x_k}{3x_k^2 + \sin x_k}$$

Koska $f''(x) \geq 0$ kun $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ niin funktio on konveksi; alkuarvaus taikka $\frac{\pi}{2} - 0{,}1 = x_0$ näyttäisi hyvältä.

Kauhuskenaario

Newtonin iteraatio voi supeta vaikealla f:llä väärään nollakohtaan, vaikka alkuarvaus x_0 olisi hyvinkin lähellä haluttua juurta r.



Iteraatio suppenee, mutta juureen jota ei haluttu.

Tätä tilannetta hallitaan seuraavalla lauseella

<u>Lause:</u> Olkoon f ja f' jatkuvia suljetulla välillä I, jossa lisäksi kaikki Newton "iteraatit"

$$x_0, x_1, \dots x_n \in I$$

sijaitsevat. Oletetaan, että yhtälöllä

$$f(x)=0$$

on yksikäsitt. ratkaisu $r \in I$.
Oletetaan että f toteuttaa

(i) $$|f''(x)| \leq K \quad \forall x \in I$$

(ii) $$|f'(x)| \geq L \quad \forall x \in I$$

Tällöin pätee virhearvio

(1) $$|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2$$

ja myös

(2) $$|x_{n+1} - r| \leq \frac{K}{2L} |x_n - r|^2$$

<u>Perustelu ohitetaan.</u>

Newtonin iteraation konvergenssinopeus on <u>kvadraattinen</u>:

Jos yksinkertaisuuden vuoksi $\frac{K}{2L} \le 1$, niin estimaatti

$$|x_{n+1} - r| \le |x_n - r|^2$$

kertoo että oikeiden desimaalien lukumäärä kaksinkertaistuu.

Lineaariset approksimaatiot ja niiden virhekaava

<u>Määr:</u> Jos f' on jatkuva niin fcn <u>lineaarinen approksimaatio</u> pisteessä a on

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

<u>Esim:</u> Laske $\sqrt{26}$ likiarvo lin. approksimaatiolla ($\sqrt{25} = 5$)

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$L(x) = \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(x-25)$$

$$= 5 + \frac{x-25}{10}$$

Josta $L(26) = 5 + \frac{1}{10} = 5.1$

Paljonko lineaarisessa approksimaatiossa tehdään virhettä, edellyttää ns. yleistettyä väliarvolausetta.

Yleistetty väliarvolause:

Olkoon f ja g jatkuvia välillä $[a,b]$ sekä derivoituvia välillä (a,b). Oletetaan, että

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Tällöin on olemassa $c \in (a,b)$ siten että

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Huomautus: "Tavallinen" väliarvolause antaisi $c_1, c_2 \in (a,b)$ siten että

$$\begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1) \\ \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_2) \end{cases}$$

Josta nuoraan

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

mutta saattaisi olla $c_1 \neq c_2$.

Perustelu paremmalla lauseella: