Perustelu: 13.11.2007

Riittää osoittaa että jos x_0 ei ole välin I päätepiste ($x \neq a$ ja $x \neq b$) eikä x_0 ole singulaarinen piste, niin tällöin $f'(x_0)$ $\exists$ ja $f'(x_0) = 0$

Siis oletetaan $x_0 \in (a,b)$ ja $f'(x_0)$ $\exists$. Koska x_0 on paikallinen maksimi (minimi käsitellään "mutatis mutandis"), niin

$\exists\, h > 0$ siten että

$$(1) \qquad \frac{\overbrace{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}^{<0}}{\Delta_{>0}} < 0$$

kaikilla Δ: $h > \Delta > 0$

ja samoin

$$(2) \qquad \frac{\overbrace{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}^{<0}}{\Delta_{<0}} > 0$$

kaikilla $0 > \Delta > -h$.

Koska raja-arvon ottaminen säilyttää epäyhtälöt, niin

$$(1^\circ) \Rightarrow \lim_{\Delta \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} \leq 0$$

ja

$$(2^\circ) \Rightarrow \lim_{\Delta \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} \geq 0 .$$

Koska x_0 ei ole singulaarinen piste, täytyy raja-arvon

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

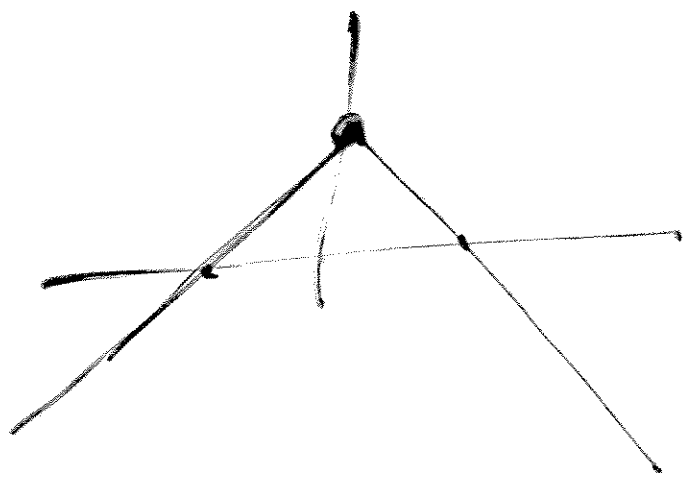
olla olemassa; erityisesti vasemman ja oikean raja-arvon pisteessä x_0 tulee olla yhtäsuuria kuin $f'(x_0)$.

Siis: $f'(x_0) \leq 0$ ja $f'(x_0) \geq 0$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$. ∎

Esim: Ääriarvo singulaaripisteessä pisteessä $x_0 = 0$:

$$y = 1 - |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$



Esim: Funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ei ole lainkaan säännöllisiä ts. ei-singulaarisia pisteitä. f on jatkuva pisteessä $x = 0$, mutta ei derivoituva.

Huom: Edellistä lausetta käytetään hyvinkin siten, että viedään fiksua pois (tavallisesti suuri) joukko pisteitä, joissa ääriarvo ei ole (ts. $f'(x) \exists$, $f'(x) \neq 0$).

Lause: Oletetaan että funktio $f(x)$ on

(i) jatkuva pisteessä $x_0 \in D(f)$

(ii) x_0 ei ole $D(f)$:n reunapiste (on sisäpiste!)

(iii) x_0 on joko kriittinen piste tai singulaarinen piste

Tällöin

(i) jos on olemassa avoin väli $x_0 \in (a,b) \subset D(f)$ siten että

(1) $f'(x) > 0$ kun $x \in (a, x_0)$

ja

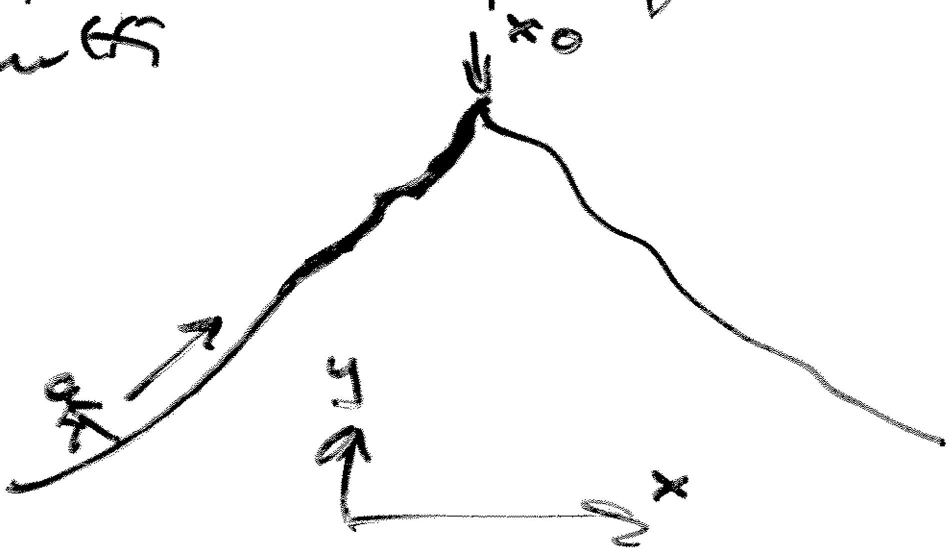
(2) $f'(x) < 0$ kun $x \in (x_0, b)$

niin ~~tällöin~~ f:llä on paikallinen maksimi pisteessä x_0.

(ii) Sama asia paikalliselle minimille kun epäyhtälöt "käännetään".

Huom: Ei ole todettu että $f'(x_0)$ olisi olemassa epäyhtälöissä (1) ja (2). Vielä vähemmän on todettu että derivaatta funktio $x \longmapsto f'(x)$ olisi jatkuva pisteen x_0 ympäristössä.

Perustelu: Vuorikiipeilijän argumentti



Ääriarvo on kohdassa, jossa ylämäki muuttuu alamäeksi. Onko joku käynyt "viilaamassa" huipun pyöreäksi kynsiviilalla ei ole ~~tämän~~ asian kannalta olennaista.

Lause: Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, $a < b$.

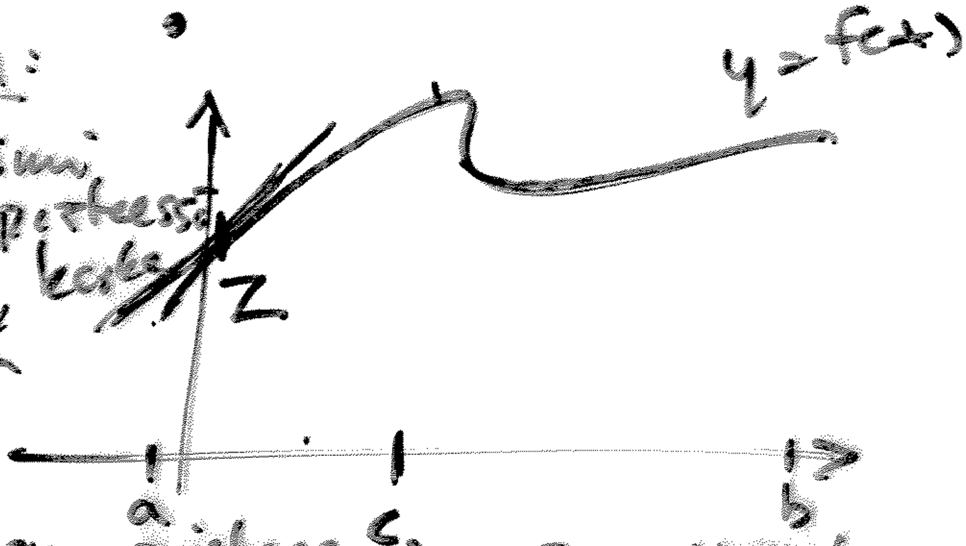
(siis $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ ja

$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$.)

(i) Jos $f'(x) > 0$ jollain avoimella välillä (a, c) eräällä $c \in (a, b)$, niin tällöin f:llä on paikallinen minimi pisteessä a.

(ii) Jos $f'(x) > 0$ jollain avoimella välillä (c, b) eräällä $c \in (a, b)$, niin tällöin f:llä on paikallinen maksimi pisteessä b.

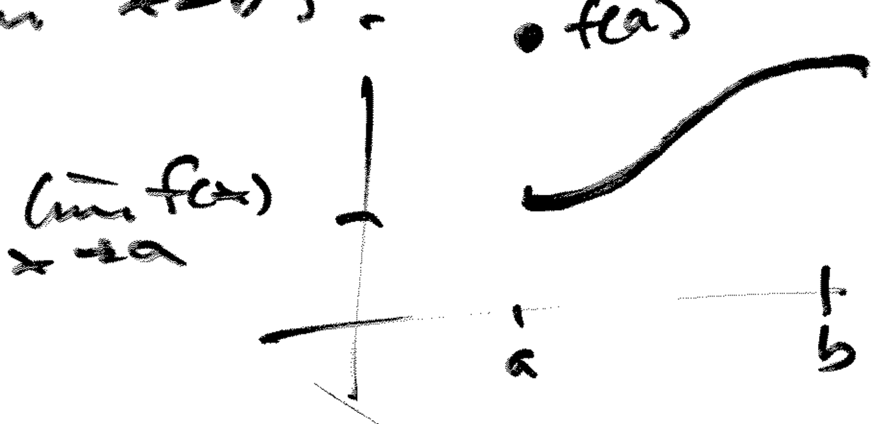
Perustelu:



selvästi minimi ei voi olla pisteessä $z > a$, $z < c$, koska vasemmalta löytyy vielä pienempi.

Ääriarvo on pisteessä a vain, koska f on jatkuva pisteessä a.

Huom: Väite ei pitäisi yleisesti paikkaansa, mikäli f ei olisi jatkuva pisteessä x = a (tai x = b).



Funktiot, joiden määrittelyjoukko ei ole suljettu rajoitettu väli

Oletetaan että $D(f) = (a, b)$; $a < b$, $-\infty \leq a$, $b \leq \infty$.

Lause: Jos f on jatkuva välillä (a, b) ja lisäksi

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

ja

$$\lim_{x \to b-} f(x) = R$$

ovat olemassa.

Jos on olemassa $u \in (a,b)$ siten että

$$f(u) \geq L, \quad f(u) \geq R$$

niin tällöin f saavuttaa maksimin jossain $x_0 \in (a,b)$.

<u>Perustelu:</u> (Oletetaan että $a > -\infty$ ja $b < \infty$).

<u>Laajennetaan</u> f:n määrittelyjoukkoa rakentamalla uusi funktio

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} L & x = a \\ f(x) & x \in (a,b) \\ R & x = b \end{cases}$$

Jolloin $D(\tilde{f}) = [a,b]$ ja $\tilde{f}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan, joka on suljettu, rajoitettu väli.

Tällaisella funktiolla $\tilde{f}$ on absoluuttinen minimi ja maksimi välillä $[a,b]$. Olkoon eräs abs. maksimi pisteessä $x_0 \in [a,b]$.

Nyt

$$\tilde f(x_0) \geq \tilde f(u) > \begin{cases} L = f(a) \\ R = \tilde f(b) \end{cases}$$

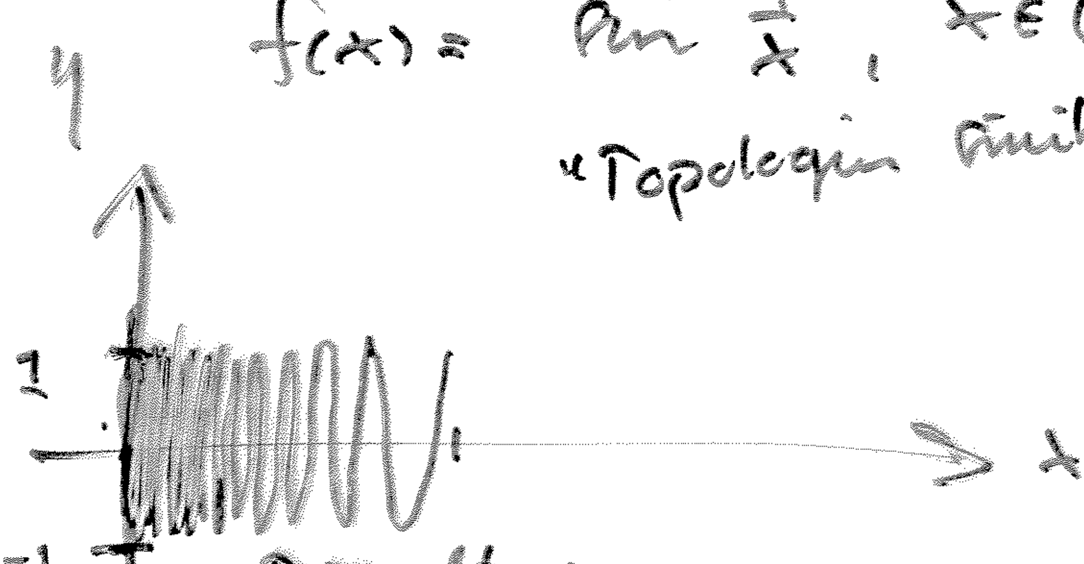
x_0 abs. max   oletus näistä

Joten $x_0 \neq a$ ja $x_0 \neq b$.
Siis abs. maksimi $x_0 \in (a,b)$
jossa $f(x_0) = \tilde f(x_0)$.
Siis x_0 on f:n abs. maksimi. ■

Huom: Joillekin funktioille f
(avoimella välillä) voidaan
~~tehdä~~ laajennus, jatkuvaksi
funktioksi $\hat f$: joillekin ei.

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$, jatkuva $x \in (0,1)$

"Topologin siniköyrä"



Toisaalta:
$f_2(x) = x \sin \frac{1}{x}$

kurssin perusteella: $\lim_{x \to 0} f_2(x) = 0$

Konveksit ja konkaavit funktiot

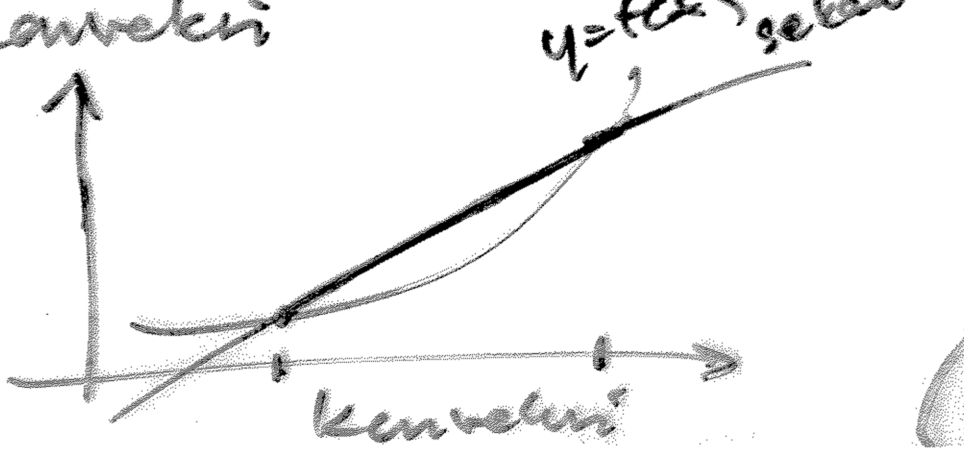
Sanasto on horjuvaa varsinkin suomen kielellä.

convex ≙ konveksi
≙ convex up (Adams)

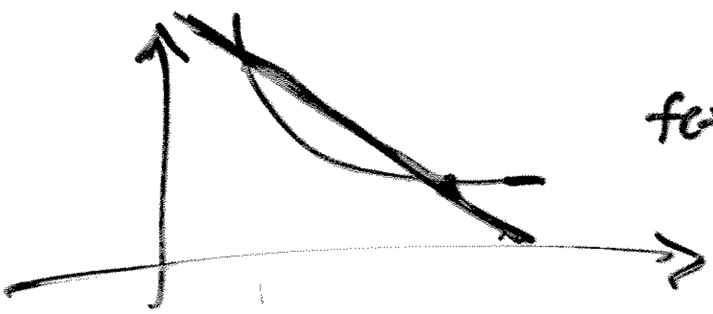
concave ≙ konkaavi
≙ concave down (Adams)

Määr: Funktio f avoimella välillä (a, b) on konveksi, jos
(i) f on derivoituva välillä (a, b)
(ii) f' on kasvava (aidosti) välillä (a, b).

Funktio f on konkaavi jos −f on konveksi



Huom: Myös laskeva funktio voi olla konveksi.



Lause: Olkoon f kaksi kertaa derivoituva välillä (a,b).

Tällöin:

(i) Jos $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$ niin f on konveksi.

(ii) Jos $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$ niin f on konkaavi.

Perustelu: Tutkimalla f':n etumerkkiä väliarvolauseella saadaan f':lle ehto milloin nouseva / laskeva.

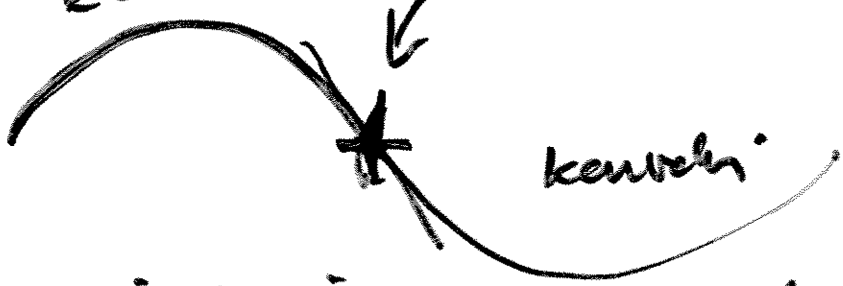
Määr: Olkoon f $\begin{cases} \text{jatkuva} \\ \text{määritelty} \end{cases}$ välillä (a,b), derivoituva välillä (a,b) ja f' derivoituva väleillä (a,x_0) ja (x_0,b) eräällä $x_0 \in (a,b)$.

Jos f on konveksi välillä (a,x_0) ja konkaavi välillä (x_0,b)

(tai konkaavi välillä (a,x_0) ja

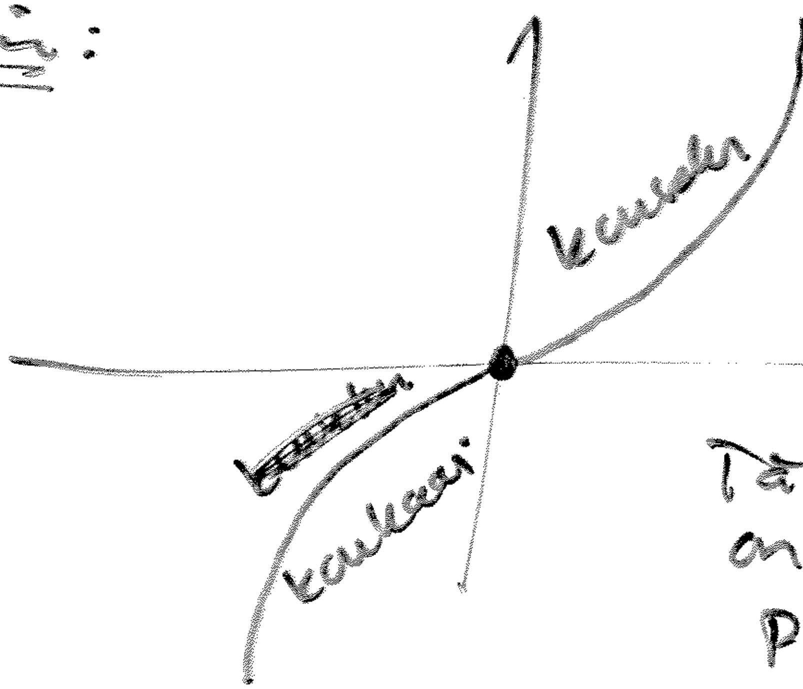
konveksi välillä (x_0, b)), niin tällöin x_0 on f:n <u>käännepiste</u>

<u>Esim:</u>



$f''(x_0)$ voi kuitenkin olla olematta.

<u>Esim:</u>



$y = x^3$

$y' = 3x^2 \geq 0$ kasvava

$y'' = 6x$

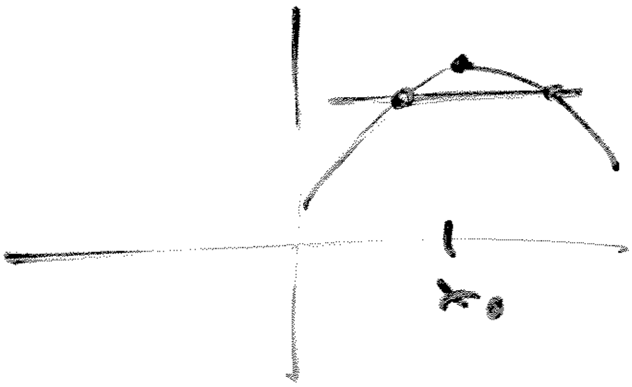
Tällöin $y''(x)$ on jopa jatkuva pisteessä $x=0$.

<u>Lause:</u> Jos f:llä on käänne-piste $x_0 \in (a,b)$, $(a,b) = D(f)$, ja <u>lisäksi</u> $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ ovat olemassa, niin tällöin $f''(x_0) = 0$.

<u>Toisen derivaatan käyttö ääriarvopisteiden luokittelussa</u>

Ei ole ilmaista lounasta: tämä vaatii sen yleisyyttä rajoittavan oletuksen, että kohdefunktio f on <u>kahdesti</u> derivoituva..

<u>Lause:</u> Jos $f'(x_0) = 0$ (kriittinen piste, $x_0 \in D(f)$ sisäpiste) ja $f''(x_0)$ $\exists$ eka $f''(x_0) < 0$, niin tällöin x_0 on f:n paikallinen maksimi



13

<u>Käänteisesti:</u> Jos $f''(x_0) > 0$, niin paikallinen minimi.

<u>Perustelu:</u> Jos $f''(x_0) < 0$, niin f' aidosti x_0:n pienessä ympäristössä

Kanhaan: Piirrä λ-akselin
funktioiden kokanttifille pitkin
x_0 ympäristössä ja ryhdy
nostamaan sitä ylöspäin. Irtoamis-
hetkellä saadaan kiinni makrimi.

14c