$$e^{Dt} = e^{\begin{bmatrix} -2+i & 0 \\ 0 & -2-i \end{bmatrix} t}$$

8.11.2007

$$= \begin{bmatrix} e^{(-2+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-2-i)t} \end{bmatrix}$$

Jossa käytetään kaavaa

$$e^{D} = I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} d_1^3 & 0 \\ 0 & d_2^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + d_1 + \frac{1}{2!} d_1^2 + \frac{1}{3!} d_1^3 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + d_2 + \frac{d_2^2}{2!} + \frac{d_2^3}{3!} \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 \\ 0 & e^{d_2} \end{bmatrix}.$$

1

Matlabissa funktio exp( ) ~~tekee~~

$$\exp\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{a_1} & e^{a_2} \\ e^{a_3} & e^{a_4} \end{bmatrix}$$

mutta funktio expm( ) antaa oikean matriisi-eksponentin.

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}^{-1} = \frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -2-i & 1 \\ -2+i & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-2+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-2-i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2-i & 1 \\ -2+i & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2-i & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -2-i & 1 \\ -2+i & 1 \end{bmatrix}$$

Jos halutaan laskea

$$e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

niin voidaan ~~edellä~~

$$= \frac{i}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2-i & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -2-i & 1 \\ -2+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2-i & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -2-i \\ -2+i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2-i & -2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2-i) e^{it} \\ (-2+i) e^{-it} \end{bmatrix}.$$

1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemien stabiilisuudesta ja resonanssista

Tutkitaan homogeenisiä DY-systeemiä

(1) $\bar{x}'(t) = \underset{n \times n}{A} \bar{x}(t)$

Halutaan ymmärtää, kuinka matriisin A ominaisuudet vaikuttavat yhtälön ratkaisun $\bar{x}(t)$ komponenttien kasvuun kun $t \to \infty$.

Oletetaan että $\underset{n \times n}{A}$ on diagonalisoituva: n kpl lineaarisesti vapaita ominaisvektoreita, jotka virittävät avaruuden $\mathbb{C}^n$

Tällöin alkuarvotehtävän

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) & t \geq 0 \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

jokainen mahdollinen alkuehto voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$\bar{x}_0 = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \cdots + c_n\bar{x}_n$$

jossa

$$A\bar{x}_j = \lambda_j \bar{x}_j,$$

kun $j = 1, \ldots, n$. Tällöin yhtälö (1) ratkeaa

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0$$

$$(3)\quad \begin{aligned} &= e^{At}(c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \cdots + c_n\bar{x}_n) \\ &= c_1 \cdot e^{At}\bar{x}_1 + c_2 \cdot e^{At}\bar{x}_2 + \\ &\quad \cdots + c_n e^{At}\bar{x}_n. \end{aligned}$$

Siis tulee laskea funktiot

$$e^{At}\bar{x}_j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Wyt

$$e^{At}\bar{x}_j = \left(I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\right)\bar{x}_j$$

$$= \left(I + t\cdot A + \frac{t^2}{2!}\cdot A^2 + \frac{t^3}{3!}\cdot A^3 + \cdots\right)\bar{x}_j$$

$A\bar{x}_j = \lambda_j \bar{x}_j$

$$= \bar{x}_j + t\cdot \lambda_j \bar{x}_j + \frac{t^2}{2!}\cdot \lambda_j^2 \bar{x}_j + \frac{t^3}{3!}\cdot \lambda_j^3 \bar{x}_j + \frac{t^4}{4!}\lambda_j^4 \cdot \bar{x}_j$$

(koska

$$A^k \bar{x}_j = A^{k-1}(A\bar{x}_j)$$

$$= A^{k-1}\cdot \lambda \bar{x}_j = \lambda \cdot A^{k-1}\bar{x}_j$$

$$= \lambda \cdot A^{k-2}(\underbrace{A\bar{x}_j}_{\lambda \bar{x}_j}) = \lambda^2 A^{k-2}\bar{x}_j$$

$$\cdots = \lambda^k \bar{x}_j.$$
)

Jotan

$$= \left(1 + t\lambda_j + \frac{(t\lambda_j)^2}{2!} + \frac{(t\lambda_j)^3}{3!} + \cdots\right)\bar{x}_j$$

$$= e^{t\lambda_j}\bar{x}_j$$

Yhdistämällä kaavaan (3) saadaan ratkaisu

$$\bar{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \bar{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \bar{x}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \bar{x}_n .$$

Nyt $\bar{x}(t)$ voi kasvaa rajoittamattomasti (kun $t \to \infty$) vain jos eräällä termillä

$$c_j e^{\lambda_j t} \bar{x}_j$$

pätee:

(i) $c_j \neq 0$

(ii) $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$

Tämä on totta niin että

$$\lambda_j = x_j + y_j i$$

niin

$$e^{(x_j + y_j i)t} = \underbrace{e^{x_j t}}_{\to \infty \text{ jos } x_j > 0 \,!} \cdot \left(\cos y_j t + i \sin y_j t \right)$$

Tämä on säätö- ja automaatiotekniikan stabiilisuustarkastelujen lähtökohta:

Matriisin A ominaisarvot pidetään "stabiilissa" eli vasemmassa puolitasossa

$$\mathbb{C}_- := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0 \}.$$

Käytännön laskuissa usein edellä mainittu tehdään diagonalisoimalla matriisi A

$$A = \bar{X} D \bar{X}^{-1}$$

jossa

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

jolloin yhtälö

$$\bar{x}'(t) = A \bar{x}(t)$$

$$= \bar{X} D \underbrace{\bar{X}^{-1} \bar{x}(t)}_{\bar{y}(t)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\bar{\underline{X}}^{-1}\dot{\bar{x}}(t) = D\cdot\bar{\underline{X}}^{-1}\bar{x}(t)$$

$\Leftrightarrow$

$$\bar{y}'(t) = D\,\bar{y}(t)$$

jossa $\bar{y}(t) = \bar{\underline{X}}^{-1}\bar{x}(t)$.

Huomaa että

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{\underline{X}}^{-1}\bar{x}(t)\right) = \bar{\underline{X}}^{-1}\frac{d\bar{x}}{dt}(t)$$

koska $\bar{\underline{X}}^{-1}$ ei riipu t:stä eli on vakio.

<u>Esim:</u> Tutki DY-systeemin $\bar{x}' = A\bar{x}$ stabiilisuutta, jossa

$$A = \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix}.$$

Voiko alkuehdon $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ valita siten, että vastaava trajektori on stabiili.

Diagonalisoidaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Ei ole stabiili koska $\operatorname{Re} 2 > 0$.

$$\overline{0} \overset{ut}{=} \bar{x}'(t) - A\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{y}'(t)$$

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} -19 & 7 \\ -42 & 16 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{y}(t)}_{= \bar{x}(t)}$$

niin myös

$$\overline{0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{y}'(t)$$

$$- \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \bar{y}(t).$$

jonka ratkaisu alkuehdolla

$\bar{y}(0) = \bar{y}_0$ on

$$\bar{y}(t) = e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} t} \bar{y}_0$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}_{\bar{y}_0}$$

$$= e^{2t} u + e^{-5t} v.$$

Stabiili trajektori saadaan jos

$$\bar{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Nyt

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{y}(t) \quad \forall t \geq 0$$

erityisesti $t = 0$

ja myös

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bar{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} v, \quad v \in \mathbb{R} \text{ mielivaltainen}$$

Näin tehtävä on ratkaistu. ∎

__Derivaattojen käyttö ääriarvojen määrittämisessä__

__Määr:__ Funktiolla f on pisteessä $x_0 \in D(f)$

(i) __absoluuttinen__ maksimi ← luku!
jos
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D(f)$$

(ii) __absoluuttinen__ minimi
jos
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D(f)$$

__Huom:__ Ei edellytetä määritelmässä, että f olisi edes jatkuva.

__Huom:__ Absoluuttista maksimia tai minimiä ei välttämättä saavuteta yksikäsitt. pisteessä!

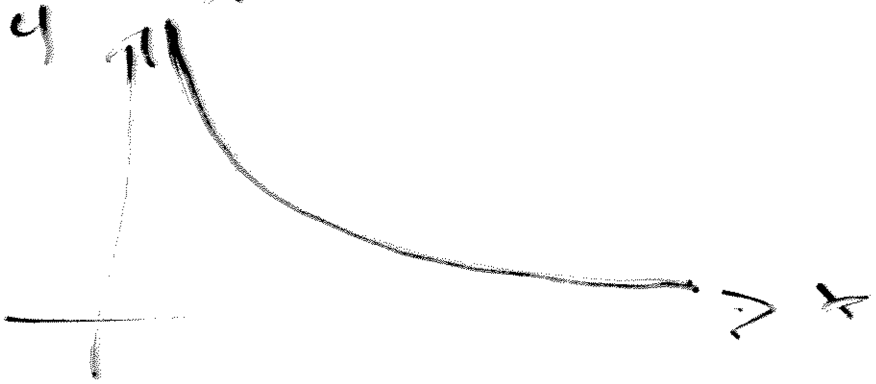
$$f(x) = \sin x$$

Abs. max on 1 ja se saavutetaan pisteissä $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, Kertauksena aiemmasta:

Lause: Olkoon f jatkuva funktio suljetulla ja rajoitetulla (ts. kompaktilla) välillä $[a,b]$. Tällöin f:llä on abs. maksimi ja minimi.

Huom: suljettuus ja rajoitettuus ovat välttämättömiä jotta Lause pitäisi paikkaansa.

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in (0, \infty)$$



- Ei rajoitettu kun $x \to 0+$
  $\Rightarrow$ ei abs. maksimia
- $f(x) \to 0$ kun $x \to \infty$ ja minimin tulisi olla nolla
  $\Rightarrow$ ei abs. minimiä.

Määr: Olkoon $I(f)$ yhdiste äärellisestä määrästä avoimia, puoliavoimia ja suljettuja välejä.

(i) f:llä on paikallinen maksimi pisteessä $x_0 \in I(f)$ jos olemassa $h > 0$ siten että

$$f(x_0) \geq f(x)$$

kaikilla $x \in D(f) : |x - x_0| < h$.

(ii) f:llä on paikallinen minimi pisteessä $x_0 \in D(f)$ mikäli funktiolla $-f$ on paikallinen maksimi pisteessä x_0.

Lause: Olkoon f funktio jonka määrittelyjoukko on jokin väleistä $I = (a,b)$; $[a,b)$; $(a,b]$ tai $[a,b]$. Jos f:llä on ääriarvo (paikallinen) pisteessä $x_0 \in I$, niin pätee jokin seuraavista ehdoista:

(i) f:llä on <u>kriittinen piste</u> pisteessä x_0: ts.

$$f'(x_0) \;\exists \text{ ja } f'(x_0) = 0.$$

(ii) x_0 on välin I päätepiste. (Jos I avoin, niin ei mahdollista)

(iii) x_0 on f:n <u>singulaarinen</u> piste: ts. $f'(x_0) \nexists$.

<u>Perustelu ensi luennolla.</u>