7.11.2007

$\Leftrightarrow$
$$\begin{bmatrix} R & R \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1' \\ \bar{i}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}\bar{i}_1 \\ R\bar{i}_1 + R\bar{i}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -e \end{bmatrix}$$

Huomataan
$$\begin{bmatrix} R & R \\ 0 & -L \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & L^{-1} \\ 0 & -L^{-1} \end{bmatrix}$$

ja saadaan
$$\overbrace{\begin{bmatrix} \bar{i}_1' \\ \bar{i}_2' \end{bmatrix}}^{\bar{I}'} = \begin{bmatrix} R^{-1} & L^{-1} \\ 0 & -L^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{C}\bar{i}_1 \\ R\bar{i}_1 + R\bar{i}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -e \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC}\bar{i}_1 + \frac{R}{L}\bar{i}_1 + \frac{R}{L}\bar{i}_2 - \frac{e}{L} \\ -\frac{R}{L}\bar{i}_1 - \frac{R}{L}\bar{i}_2 + \frac{e}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} & \frac{R}{L} \\ -\frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}}_{=:\bar{I}} + \underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix} -e \\ e \end{bmatrix}}_{\bar{F}(t)}$$

eli
$$\frac{d\bar{I}}{dt} = A\bar{I} + \bar{F}$$

1d

Komponenttaittain kirjoitettuna tämä on muotoa

$$\begin{cases} x_1' = \overbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1} \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2 \end{cases}$$

eli kaksi toisiinsa kytkettyä <u>lineaarista</u>, vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

jolloin saadaan

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{F}.$$

<u>Korkeamman kertaluvun vakiokertoimisen yhtälön palauttaminen 1. kertaluvun vektoridifferentiaaliyhtälöksi</u>

Tarkastellaan DY:ä

$$(1) \quad x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + p_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + p_1 x' + p_0 x = f$$

$+ \geq 0$

Määritellään vektorifunktio

$$\bar{x}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \Bigg\} \text{ n kpl komponentteja.}$$

Saadaan

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

$$(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & & -p_{n-1} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}}^{\bar{x}(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

koska $x^{(n)} = -p_0 x - p_1 x' - p_2 x'' - \cdots - p_{n-1} x^{(n-1)} + f$

30

Matriisejä muotoa

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

kutsutaan kumppani-matriiseiksi.

On tähän mennessä osoitettu, että jos $x(t)$ toteuttaa skalaariyhtälön (1), niin vektorifunktio

$$\bar{x}(t) = [x^{1}(t) \; x^{2}(t) \cdots x^{(n-1)}(t)]^T$$

toteuttaa yhtälön (2) joka on muotoa

$$(4) \qquad \bar{x}' = A\bar{x} + \bar{F}.$$

Käänteisesti jos A on kumppanimatriisi (3) ja

$$\bar{F}(t) = [0 \text{ —— } 0 \; f(t)]^T$$

jollain funktiolla f, niin

Jokainen vektoridifferentiaaliyhtälön (4) ratkaisu

$$\bar{x}(t) := [x_1(t), x_2(t) \cdots \cdots x_n(t)]^T$$

antaa yhtälön (1) ratkaisun 1. komponentissaan: $x(t) = x_1(t)$.

Kuinka on alkuarvo tehtävän laita?

Vektoridifferentiaaliyhtälö on 1. kertalukua, se edellyttää yksikäsitteistä ratkaisua varten yhden alkuehdon

$$\begin{cases} \bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{F}(t) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

mutta: alkuehto on n-vektori joka vastaa n. kpl skalaari alkuehtoja (kuten vaadittiin yhtälön (1) alkuarvotehtävässä)

Huom:

$$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}.$$

5₀

Fakta: $n \times n$-kumppanimatriisin A [kaavassa (3)] karakteristinen polynomi

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$$

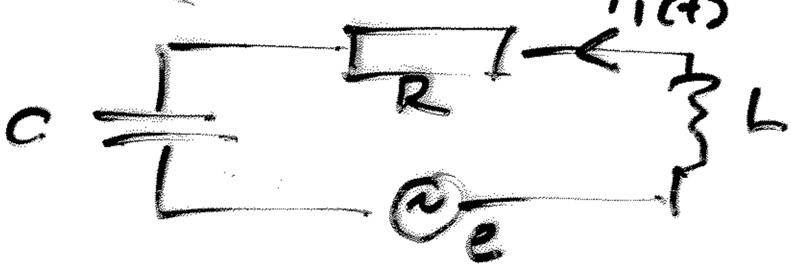
on itse asiassa

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 .$$

Erityisesti seuraa, että A:n ominaisarvot ovat skalaariyhtälön "resonansseja" $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ differentiaaliyhtälölle (1).

! Tämä on se syy, miksi ominaisarvotehtävät liittyvät DY:n resonanssitehtäviin.

Esim: Vaimennettu värähtelijä. Edellä johdetun perusteella saatiin RLC-piirille



60

Ja siinä kummallekin osalle $i(t)$ lauseke, jonka perusteella

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i'(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i'(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i''(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i'(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e'(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

siis $\quad I(t) := \begin{bmatrix} i'(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{E}(t) := \begin{bmatrix} e'(t) \\ 0 \end{bmatrix},$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

jolloin DY tulee muotoon

$$\frac{dI}{dt}(t) = A\,I(t) + \bar{E}(t).$$

<u>Huom:</u> Kelan fysiikka sanoo

$$u_L(t) = L\,i_L'(t) = L\,i'(t)$$

eli $\quad i_L'(t) = \frac{1}{L}u_L(t) \ldots$ siis

$$I(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}u_L(t) \\ i(t) \end{bmatrix}.$$

Toisaalta $\quad u_R(t) = R\,i(t)$

ja $\quad I(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}u_L(t) \\ \frac{1}{R}u_R(t) \end{bmatrix}.$

RLC-piiriä kuvaavan mallin tilamuuttujat voidaan siis valita usealla eri tavalla, jolloin DY-systeemi muotoa

(*) $\bar{x}' = \underset{n\times n}{A}\bar{x} + \bar{F}$

olisi eri näköinen — mallinkin kuitenkin samaa fysiikkaa.

Vaikka tilamuuttujat voivat vaihdella kirjoittajan mieltymysten mukaan, niiden lukumäärä on aina sama samalle systeemille (tässä tapauksessa 2).

Yhtälön (*) ratkaisu liikkuu n-ulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ (tai $\mathbb{C}^n$), jota kutsutaan tila-avaruudeksi, tai faasitasoksi (state space, phase plane...).

Funktiota $\bar{x}(t)$ kutsutaan trajektoriksi. Yhtälöä (*) kutsutaan lineaariseksi dynaamiseksi systeemiksi. Tila-avaruuden dimensio on systeemin tila-avaruuden dimensio.

Vektoriarvoisen 1. kertaluvun systeemi ratkaisu

Tarkastellaan ensin homogeenista tapausta, eli alkuarvotehtävää.

$$(\dagger) \quad \begin{cases} \bar{x}'(t) = \underset{n \times n}{A}\,\bar{x}(t) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

Skalaaritapauksessa ratkaisu oli $x(t) = e^{at} x_0$.

Neliö-matriisin B eksponenttifunktio määritellään Taylorin sarjalle

$$e^B = I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots \frac{B^k}{k!} + \dots$$

ja ~~tätä~~ käyttäen $B := tA$ kokeillaan, olisiko funktio

$$\bar{x}(t) := e^{At} \bar{x}_0$$

alkuarvotehtävän $(\dagger)$ ratkaisu.

Derivoidaan:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left(I x_0 + tA\bar{x}_0 + t^2 \frac{A^2\bar{x}_0}{2!} + t^3 \cdot \frac{A^3\bar{x}_0}{3!} + \cdots + t^k \frac{A^k\bar{x}_0}{k!} + \cdots \right)$$

$$= A\bar{x}_0 + 2t\,\frac{A^2\bar{x}_0}{2!} + 3t^2 \cdot \frac{A^3\bar{x}_0}{3!} + \cdots + k t^{k-1} \frac{A^k\bar{x}_0}{k!} + \cdots$$

$$= A\left[\bar{x}_0 + 2t\,\frac{A\bar{x}_0}{2!} + 3t^2 \frac{A^2\bar{x}_0}{3!} + \cdots + k t^{k-1} \frac{A^{k-1}\bar{x}_0}{k!} + \cdots \right]$$

$$= A\left[\bar{x}_0 + t \cdot A\bar{x}_0 + \frac{t^2 A^2 \bar{x}_0}{2!} + \cdots + \frac{t^{k-1}A^{k-1}\bar{x}_0}{(k-1)!} + \cdots \right]$$

$$= A e^{At}\bar{x}_0 = A\bar{x}(t).$$

Siis toteutuu $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$.

Entä epähomogeeninen yhtälö

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{F}(t) \;?$$

Aivan kuten skalaaritapauksessa (A on 1×1-matriisi a)

$$\bar{x}(t) = e^{tA}\bar{x}_0$$

$$(\dagger f) \qquad + \int_0^t e^{A(t-v)} \bar{F}(v)\, dv$$

Tässä $e^{A(t-v)}$ on määritelty matriisieksponenttina kuten e^{tA}.

Funktio

$$v \longmapsto \underbrace{e^{A(t-v)}}_{n\times n} \underbrace{\bar{F}(v)}_{n\times 1}$$

on vektoriarvoinen, n-komponenttinen

Koska derivoidaan vektoriarvoinen funktio komponentti-kerrallaan, niin luonnollisesti integroidaan samoin.

On totta, että jos $\bar{F}(v)$:n komponentit ovat "epämiellyttäviä", niin tarvittava integraali ei edes voitaisi laskea "tarkasti". Tarvitaan numeriikkaa.

Että kaava $(\dagger f)$ antaa yhtälön $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{F}(t)$ ratkaisun on demotehtävä

Esim: $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0, \quad t \geq 0.$

Muodosta kumppanimatriisi A laske matriisieksponentti e^{tA}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}. \quad e^{tA} = ?$$

Diagonalisoidaan A; lasketaan ominaisarvot

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 5 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda+4) + 5 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

josta

$$\lambda_1 = -2 + i, \quad \lambda_2 = -2 - i.$$

<u>ominaisarvot</u> $\bar{x}_1$

$$\begin{bmatrix} -2+i & -1 \\ 5 & -2+i+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$= (-2+i) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2+i \end{bmatrix} c, \quad c \in \mathbb{C}$ mielv (valitaan $c = 1$)

Ko

Samoin λ_2:sta vastaava ominaisvektori

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2-i \end{bmatrix}$$

Saadaan diagonalisointi

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix}}_{=:\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2+i & -2-i \end{bmatrix}}_{\underline{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} -2+i & 0 \\ 0 & -2-i \end{bmatrix}}_{D}.$$

josta

$$A = \underline{X} D \underline{X}^{-1} \quad \text{ja}$$

$$e^{At} = \underline{X} e^{Dt} \underline{X}^{-1}.$$

180