6.11.2007

<u>Lause:</u> Epähomogeenisen, lineaarisen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$x'(t) = a\,x(t) + f(t) \qquad t \geq 0$$

ratkaisu tulee "vakionvarioinnin kaavasta"

$$x(t) = e^{ta}\,x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Huomaa, että integraali kaavassa (1) on "painotettu muisti" kuormafunktiosta $f = f(\tau)$.

<u>n. kertaluvun</u> <u>epähomogeenisen</u> <u>vakiokertoimisen</u>, <u>lineaarisen</u> <u>DY:n</u> <u>yleinen</u> <u>ratkaisu</u>

1.

Epähomog. yhtälön

$$(1)\quad x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + p_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \cdots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = f(t) \qquad t \geq 0$$

vastaa homog. yhtälö

$$(2)\quad x^{(n)}(t) + p_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = 0 \qquad t \geq 0.$$

<u>Lause:</u> DY (1):n yleinen ratkaisu

$x_Y(c_1, c_2 \ldots c_n; t)$ saadaan

DY (2):n yleisen ratkaisun

$x_{h,Y}(c_1 \ldots c_n; t)$ lausekkeeseen

lisäämällä eräs DY (1):n yksityis-ratkaisu:

$$x_Y(c_1, c_2 \ldots c_n; t) = x_{h,Y}(c_1, c_2 \ldots c_n; t) + x_p(t).$$

Perustelu (Tapaus $n=2$).

Määritellään derivointioperaattori

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b$$

jota vastaa 2. kl:n yhtälö

(3) $$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0.$$

Tarkoittaa

$$L x = \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b\right) x$$

$$:= \frac{d^2 x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + b x$$

$$= x'' + a x' + b x$$

Joten yhtälö (3) tulee muotoon

$$Lx = 0$$

ja vastaava epähomogeeninen yhtälö

(4) $$Lx = f.$$

L on lineaarinen kuvaus funktioiden muodostamassa vektoriavaruudessa:

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2)$$
$$= \alpha L x_1 + \beta L x_2$$

Seuraa derivoinnin ominaisuuksista.

Olkoon $x_p(t)$ eräs yksittäisratkaisu yhtälölle (H): $L x_p = f$.

Jos määritellään
$$x_{y,i}(c_1, c_2; t) = x_p(t) + \underbrace{\left(c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t)\right)}_{=: x_{y,h}(c_1, c_2; t)}$$

niin

$$L x_{y,i}(c_1, c_2; \cdot)$$
$$= \underbrace{L x_p}_{= f} + \underbrace{L\left(c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2\right)}_{= 0} = f \qquad (40$$

siis kaikilla parametreilla c_1, c_2 $x_y(c_1, c_2; t)$ on epähomog. yht. ratk.

Käänteisesti: Olkoon $x = x(t)$ eräs mielivaltainen epähomog. yhtälön (4) jokin ratkaisu. Määritellään

$$x_h = x - x_p .$$

Tällöin

$$L x_h = \underbrace{L x}_{f} - \underbrace{L x_p}_{f} = 0$$

joten x_h on homog. yht. ratkaisu. siis

$$x_h(t) = x_{h,y}(c_1, c_2; t)$$

<u>eräillä</u> arvoilla c_1, c_2. siis

$$x = x_h + x_p = \underbrace{x_p + x_{h,y}(c_1, c_2; \cdot)}_{=: x_y(c_1, c_2; \cdot)}$$

eräillä c_1, c_2

Siis osaamme hakea kaikki epähomogeenisen yhtälön (1) ratkaisut **jos** osaamme löytää yhden yksittäisratkaisun $x_p(t)$ samalle yhtälölle.

(Iso "Jos")

<u>Esim:</u>

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t.$$

Homog. yhtälön karakteristinen polynomi:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

juuret $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$;

joten

$$x_{h,Y}(c_1, c_2; t)$$

$$= e^{-2t}\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t\right).$$

Nyt $\quad x_{\bar{I}}(c_1, c_2; t) = x_p(t) + x_{h,y}(c_1, c_2; t)$

jossa

$$x_p''(t) + 4x_p'(t) + 5x_p(t) = \sin t, \quad t \geq 0.$$

Ansatz:

$$x_p(t) = D_1 \sin t + D_2 \cos t$$

(koska $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$)

$$x_p'(t) = D_1 \cos t - D_2 \sin t$$

$$x_p''(t) = -D_1 \sin t - D_2 \cos t$$

joten

$$x_p''(t) + 4x_p'(t) + 5x_p(t)$$

$$= (-D_1 - 4D_2 + 5D_1) \sin t$$

$$+ (-D_2 + 4D_1 + 5D_2) \cos t$$

7.

$$= \overbrace{(4D_1 - 4D_2)}^{=1} \sin t + \underbrace{(4D_1 + 4D_2)}_{=0} \cos t = \sin t$$

$$\begin{cases} 4D_1 - 4D_2 = 1 \\ 4D_1 + 4D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{1}{8} \\ D_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}.$$

Siis

$$x_p(t) = \frac{1}{8}(\sin t - \cos t)$$

ja

$$x_y(c_1, c_2) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{1}{8}(\sin t - \cos t).$$

Esim.:

$$x''(t) - 6x'(t) - 16x(t) = t^3 \qquad t \geq 0$$

Homog. yht. karakteristinen polynomi

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -2$$

Joten

$$x_{h,y}(C_1, C_2; t) = C_1 e^{8t} + C_2 e^{-2t}$$

Etsi yksittäisratkaisu

$$x_p''(t) - 6x_p'(t) - 16x_p(t) = t^3$$

Selvästi $x_p(t)$ tulee olla polynomi astetta 3!

$$x_p(t) = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3$$

$x'_p(t) = D_1 + 2D_2 t + 3D_3 t^2$

$x''_p(t) = 2D_2 + 6D_3 t$

joten

$$x''_p - 6x'_p - 16x_p$$
$$= (2D_2 - 6D_1 - 16D_0)$$
$$+ (6D_3 - 12D_2 - 16D_1)t$$
$$+ (-18D_3 - 16D_2)t^2 - 16D_3 t^3$$
$$= t^3 \quad \forall t \geq 0.$$

joten

$$\begin{cases} D_3 = -\frac{1}{16} \\ D_2 = \frac{18}{256} = \frac{9}{128} \\ D_1 = -\frac{77}{1024} \\ D_0 = \frac{303}{8192} \end{cases}$$

(toivottavasti oikein.)

10

Saadaan yleinen ratkaisu

$$x_{\mathrm{I}}(c_1, c_2; t)$$
$$= c_1 e^{8t} + c_2 e^{-2t}$$
$$+ D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3$$

jossa $D_0 \dots D_3$ kuten edellä.

<u>Kuormitetun harmonisen värähtelijän alkuarvotehtävä:</u>

$$\begin{cases} x''(t) + a x'(t) + b x(t) = f(t) \\ x'(0) = v_0, \quad x(0) = x_0 \end{cases}$$

<u>Esim:</u>

$$\begin{cases} x''(t) + 4 x'(t) + 5 x(t) = \sin t. \\ x'(0) = 0, \quad x(0) = 1 \end{cases}$$

Kuten edellä

$$x_{\psi}(c_1, c_2; t)$$

$$= e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

$$+ \frac{1}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t$$

joten

$$x_{\psi}'(c_1, c_2; t) =$$

$$= -2e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

$$+ e^{-2t}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

$$+ \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t.$$

$$x_{\psi}'(c_1, c_2; 0) = 0$$

$$\Rightarrow -2c_1 + c_2 + \frac{1}{5} = 0$$

$$x_{\psi}(c_1, c_2 : 0) = 1$$

$$\Rightarrow c_1 - \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{7}{5}$$

$$c_2 = \frac{17}{5}.$$

Saadaan siis alkuarvotehtävälle

$$x(t) = \frac{1}{8}\left(\sin t - \cos t + e^{-2t}(9\cos t + 17\sin t)\right).$$

1. kertaluvun DY-systeemit eli kytketyt differentiaaliyhtälöt

Olkoon $s(t)$ muikkupopulaation koko Kitkalla ja $p(t)$ haukipopulaation koko.

Jos haukia ei ole:

$$s'(t) = a\,s(t)$$

jossa $a>0$. (siis $e^{at}s(0) = s(t)$)

Onneksi haukia on: saadaan

$$s'(t) = a\,s(t) - b\,s(t)p(t)$$

jossa $b>0$

Toisaalta, haukat "hajoaisivat" jos muikkuja ei olisi:

$$p'(t) = -c\,p(t) + d\,p(t)s(t)$$

eräille $c > 0$, $d > 0$

Saatiin

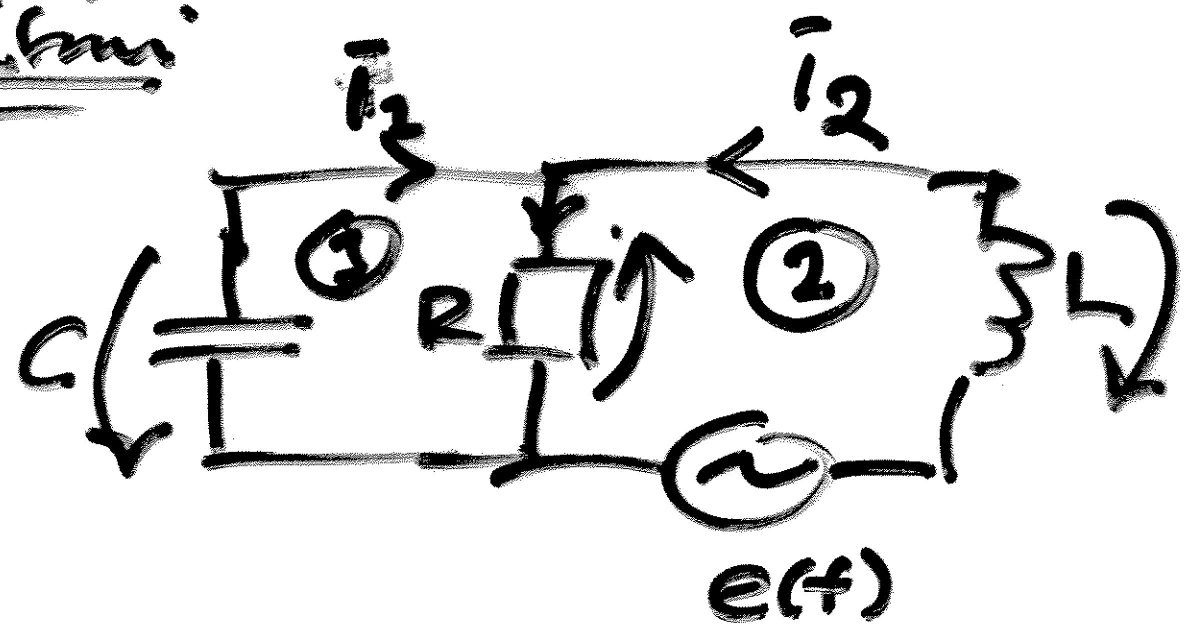
$$\begin{cases} s'(t) = a\,s(t) - b\,s(t)p(t) \\ p'(t) = -c\,p(t) + d\,s(t)p(t) \end{cases}$$

epälineaarinen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemi.

Vito Volterran populaatiomalli. Paljon rustaampia malleja olemassa!

Kaaos! Populaatioiden koko käyttäytyy (simuloitaessa) hyvin epäsäännöllisesti.

Esim.



Silmukka 1

$$R(\bar{i}_1(t)+\bar{i}_2(t)) + \frac{1}{C}\int_0^t \bar{i}_1(v)\,dv$$

$$= u_C(0)$$

Silmukka 2

$$-L\bar{i}_2'(t) - R(\bar{i}_1(t)+\bar{i}_2(t))$$

$$+ e(t) = 0$$

Saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} R\bar{i}_1' + R\bar{i}_2' + \frac{1}{C}\bar{i}_1 = 0 \\ L\bar{i}_2' + R\bar{i}_1 + R\bar{i}_2 = e(t) \end{cases}$$