1.11.2004

Differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

Lause: Oletetaan, että karakteristisella polynomiyhtälöllä

$$P(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0$$

on m kpl ($m \le n$) erisuuria nollakohtia

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m.$$

Merkitään juuren λ_j, $j = 1, \dots, m$, kertalukua luvulla n_j ($1 \le n_j \le n$).

Muodostetaan funktiot

$$\phi_{j,1}(t) = e^{\lambda_j t}, \quad \phi_{j,2}(t) = t e^{\lambda_j t}$$

$$\dots \quad \phi_{j,n_j}(t) = t^{n_j - 1} e^{\lambda_j t}$$

jossa $j = 1, \ldots, m$ indeksoi erisuuria juuria λ_j.

Tällöin

(i) funktioita $\phi_{j,k}$,

$$j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n_j$$

on yhteensä n kpl.

(ii) Jokainen funktioista $\phi_{j,k}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$x^{(n)} + p_{n-1} x^{(n-1)} + p_{n-2} x^{(n-2)} + \ldots + p_1 x' + p_0 x = 0 \qquad (1)$$

(iii) Jonkko $\{\phi_{j,k}\}_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n_j}}$ on lineaarisesti vapaa.

<u>Perustelu:</u> (i) on triviaali.

(ii) suora, joskin pitkä lasku.

(iii) selvä 2. funktion tapauksessa, analogisesti

Lause: Jokainen DY:n (1) ratkaisu $x(t)$ voidaan esittää

$$x(t) = x_y(c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{m,n_m}; t)$$

eräillä parametreillä $c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{m,n_m}$ arvoilla.

Perustelu ohitetaan.

Konjugaattiparin yhdistely trigonometrisiksi funktioiksi

Esim. $t \geq 0$

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0$$

jolla

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$
$$= \left(\lambda - (1 + i\sqrt{2})\right)\left(\lambda + (i - i\sqrt{2}\right)$$

eli

$$\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}.$$

Saadaan $\phi_1(t) = e^{(1+i\sqrt{2})t}$ ja

$\Phi_2(t) = e^{(1-i\sqrt{2})t}$.

Reaaliarvoiset ratkaisut?

<u>Euler:</u>

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \\ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \end{cases}$$

Yleinen ratkaisu

$$\begin{aligned} x_y(c_1, c_2; t) &= c_1 e^{(1+i\sqrt{2})t} + c_2 e^{(1-i\sqrt{2})t} \\ &= e^t\left(c_1 e^{i\sqrt{2}t} + c_2 e^{-i\sqrt{2}t}\right) \\ &= e^t\left(c_1^? \cos\sqrt{2}t + c_2^? \sin\sqrt{2}t\right) \end{aligned}$$

Jossa

$$\begin{cases} c_1' = c_1 + c_2 \\ c_2' = i(c_1 - c_2). \end{cases}$$

Siis yleinen ratkaisu voidaan lausua

$$x_I(c_1', c_2'; t) = e^{t}(c_1' \cos \sqrt{2}t + c_2' \sin \sqrt{2}t)$$

joka on reaaliarvoinen funktio jos ja vain jos $c_1', c_2' \in \mathbb{R}$.

<u>Huom:</u> jos $\lambda_j = a + bi$, $\lambda_{j'} = a - bi$, niin näitä yhdistämällä tulee yleiseen ratkaisuun termit

$$e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt)$$

$$= c_3 e^{at} \sin(bt + \varphi)$$

jossa $\varphi \in \mathbb{R}$ on vaihesiirto.

n. kertaluvun alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} x^{(n)} + p_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + p_1 x' + p_0 x = 0 & t \geq 0 \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad x^{(n-2)}(0) = x_{n-2} \\ \dots \quad x'(0) = x_1, \quad x(0) = x_0 \end{cases}$$

n kpl alkuehtoja määräävät n kpl parametreja $c_1, c_2 \dots$ yleisen ratkaisun lausekkeessa yksikäsitteisesti.

Esim:

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0 \\ x'(0) = 1, \quad x(0) = 2 \end{cases}$$

yleinen ratkaisu

$$x_{yr}(c_1, c_2; t) = e^{t}(c_1 \cos\sqrt{2}\,t + c_2 \sin\sqrt{2}\,t)$$

$$\frac{d}{dt} x_{yr}(c_1, c_2; t) =$$

$$= e^t(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t)$$
$$+ e^t(-\sqrt{2}c_1 \sin\sqrt{2}t$$
$$+ \sqrt{2}c_2 \cos\sqrt{2}t)$$

$$= e^t\left[(c_1 + \sqrt{2}c_2)\cos\sqrt{2}t\right.$$
$$\left.+ (-\sqrt{2}c_1 + c_2)\sin\sqrt{2}t\right]$$

<u>Alkuehdot</u>:

$$x_y(c_1, c_2; 0)$$
$$= c_1 = x_0$$
$$x_y'(c_1, c_2; 0) = c_1 + \sqrt{2}c_2 = x_1$$

eli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

<u>Sama idea</u> kertaluvun n. tapauksessa.

Vaimennettu massajousisysteemi

$$m x''(t) + \mu x'(t) + k x(t) = 0$$

jonka karakteristinen polynomi on

$$\lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

$$= \left(\lambda + \frac{\mu}{2m}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}\right)}_{=:D}$$

$$= 0$$

lukua

$$D := \frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}$$

kutsutaan diskriminantiksi.

Jos $D > 0$ ratkaisulla on "värähtelyä, heilumista" kerta

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm i\sqrt{|D|}$$

antavat sin- ja cos-termejä yleisen ratkaisun lausekkeeseen

$$x_{hj}(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} \cdot \left(C_1 \cos\sqrt{|D|}\,t + C_2 \sin\sqrt{D}\,t \right)$$

Tämä on alivaimennetun tapaus!

Jos taas $D = 0$, niin

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\mu}{2m}$$

niin

$$x_{hj}(t) = C_1 e^{-\frac{\mu}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{\mu}{2m}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\mu}{2m}t}$$

Tämä on ns. kriittisesti vaimennetun tapaus.

Jos $D < 0$ ja

$$\lambda_1 = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{|D|}$$

ja siten

$$x_{\varsigma}(t) = c_1 e^{-\overbrace{\left(\frac{\mu}{2m} + \sqrt{|D|}\right)}^{>0} t} + c_2 e^{\underbrace{\left(-\frac{\mu}{2m} + \sqrt{|D|}\right)}_{<0} t} .$$

Vaimenevan, ~~eli hajoaa~~ eksponentiaalisesti "hajoava" ratkaisu kuten hajoamisen tapauksessa: Ylivaimennettu.

Huom: Riippuen D:n merkistä, yleisen ratkaisun lauseke on erilainen.
Vasta tutkittuamme yhtälöä osaamme sijoittaa alkuehdot oikeantyyppiseen lausekkeeseen.

Kuormitettu massajousisysteemi tai RLC-piiri

Newton:

$$F(t) = \sum_j F_j(t)$$

antaa liikeyhtälön

$$a(t) = x''(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Kuormitettu m-j-s:

$$F(t) = F_{jousi}(t) + F_{kitka}(t) + F_{kuorma}(t)$$

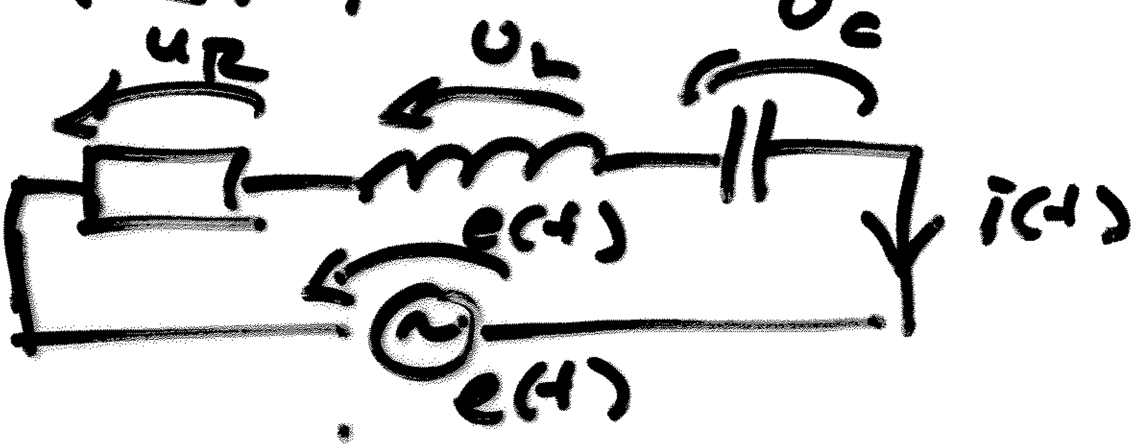
$$= -k\,x(t) - \mu x'(t) + F_{kuorma}(t).$$

Saadaan yhtälö

$$m\,x''(t) + \mu x'(t) + k\,x(t) = F_{kuorma}(t).$$

Samoin RLC-piirille Kirchhoffin jännitelaki

$$-u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) + e(t) = 0$$



Kuten aiemmin

$$L\,i''(t) + R\,i'(t) + \frac{1}{C}\,i(t) = e'(t).$$

Siis epähomogeenisiä yhtälöitä tulee osata ratkoa.

1. kertaluvun epähomog yhtälön yleinen ratkaisu

Alkuarvotehtävä:

$$\begin{cases} x'(t) - a\,x(t) = f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Jos $f(t) \equiv 0 \ \forall t$ niin ratkaisu olisi

$$x_h(t) = C_1 e^{at}.$$

Miten $f(t)$ "vaikuttaa" tähän ratkaisuun?

Voisi ajatella, että vakio C_1 korvautuu eräällä ajasta riippuvalla funktiolla $C = C(t)$.

Yrite l. Ansatz:

$$x(t) = C(t)\, e^{at}$$

ratkaistiin

$$x'(t) - a\,x(t) = f(t)$$

14c

$x'(t) = c'(t)e^{at} + a\,c(t)\,e^{at}$

Siis

$x'(t) - a\,x(t)$

$= c'(t)\,e^{at} = f(t)$

$\Leftrightarrow \quad c'(t) = e^{-at} f(t)$

joten

$$c(t) = c(0) + \int_0^t c'(v)\,dv$$

$$= c(0) + \int_0^t e^{-av} f(v)\,dv$$

Yleisesti ratkaisufunktio saadaan

$$x(t) = \left(c(0) + \int_0^t e^{-av} f(v)\,dv \right) \cdot e^{at}$$

$$= c(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-v)} f(v)\,dv$$

jossa $c(0)$ on yleisen ratkaisun parametri. Vakionvarioinkeino!

15