Differentiaaliyhtälöiden Peruskäsitteitä

Differentiaaliyhtälö on yhtälö, joka sitoo toisiinsa funktion $x(t)$ ja eräitä sen derivaattoja:

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + p_{n-1} x^{(n-1)}(t) + p_{n-2} x^{(n-2)}(t) + \dots + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = f(t)$$

Funktio $x(\cdot)$ joka toteuttaa yhtälön (1) on ratkaisu tai yksittäisratkaisu (engl. particular solution.)

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen on yleisesti ottaen mahdotonta "analyyttisin menetelmin".

Ratkeavan ratkaisu voidaan käytännössä aina löytää numeerisin menetelmin: korvaamalla derivaatat erotusosamäärillä joissa $\Delta t \approx 0$.

Differentiaaliyhtälön kertaluku on korkeimman yhtälössä esiintyvän derivaatan kertaluku.

Yleinen n. kertaluvun DY on muotoa

$$(2) \quad F(t, x, x', \dots x^{(n)}) = 0$$

jossa $f(\cdot, \dots, \cdot)$ on "kuorma":

Yhtälö (2) on <u>lineaarinen</u>, jos se on (palautettavissa) muotoa (1).

Jos kertoimet $p_0, p_1, \dots p_{n-1}$ <u>eivät</u> riipu ajasta, niin DY (1) on <u>vakiokertoiminen</u>.

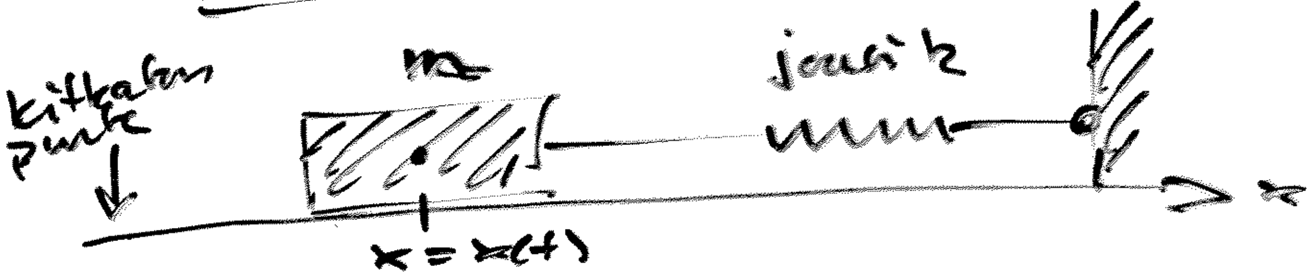
Yhtälö (1) on <u>epähomogeeninen</u> mikäli <u>kuormafunktio</u> $f(\cdot)$ ei ole identtisesti nolla. Jos $f(t) \equiv 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+$, niin tällöin DY (1) on <u>homogeeninen</u>.

<u>Alkuehdot</u> yhtälölle (1) ovat muotoa (hetkellä $t=0$; alkuhetki)

$$(3) \quad \underset{=x_0}{x(0)}, \ \underset{=x_1}{x'(0)}, \ \underset{=x_2}{x''(0)}, \ \dots \ \underset{=x_{n-1}}{x^{(n-1)}(0)}.$$

Yhtälö (1) yhdessä alkuehtojen (3) kanssa muodostaa <u>alkuarvotehtävän</u>.

<u>Massa jousi systeemi</u>



Olkoon $x = x(t)$ punnuksen paikka hetkellä $t \geq 0$; $x = 0$ vastaa venymättömän jousen paikkaa.

Newtonin mekaniikka: Punnukseen vaikuttavien voimien resultantti

$$F = \sum_i F_i$$

Saattaa m-massaisen kappaleen kiihtyvään liikkeeseen; kiihtyvyys

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\sum_i F_i}{m}. \quad a(t) = v'(t) = x''(t)$$

$$m x''(t) = F(t)$$
$$= F_{jousi}(t) = -k\, x(t)$$

$\Leftrightarrow$

$$m x''(t) + k x(t) = 0.$$

2. kertaluvun vakiokertoiminen DY.

Alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} m x''(t) + k x(t) = 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0. \end{cases}$$

$$F_{kitka}(t) = -\mu\, x'(t).$$

Nyt: $F(t) = F_{kitka}(t) + F_{jousi}(t)$

Bo

Saadaan yhtälö

$$m x''(t) = -k x(t) - \mu x'(t)$$

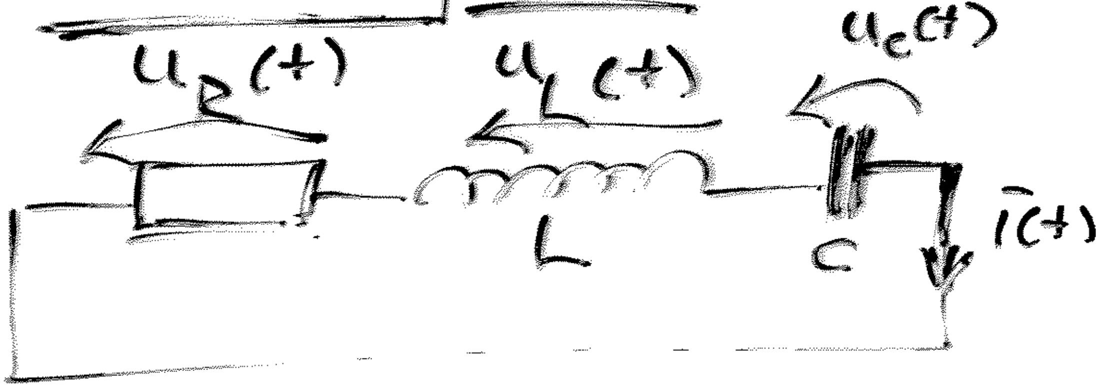
t.s.

$$m x''(t) + \underbrace{\mu x'(t)}_{\text{kitkatermi}} + \underbrace{k x(t)}_{\text{"reaktiotermi"}} = 0$$

Fysiikka sanoo: $m > 0$, $\mu > 0$, $k >$

Tämä yhteys siihen, että jousimassa-systeemi ei luo itse tyhjästä uutta energiaa.

RLC - Piiri



Fysiikasta.

$$\begin{cases} u_R(t) = R\, i(t) & \text{Ohmin laki} \\ u_L(t) = L \dfrac{di}{dt}(t) & \text{(Henry-Faradayn laki)} \\ u_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(t)\, dt + u_C(0) \end{cases}$$

$$u_C'(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

Newtonin lakia vastaa Kirchhoffin jännitelaki:

$$u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = 0$$

$$\Rightarrow u'_R(t) + u'_C(t) + u'_L(t) = 0$$

$$\Rightarrow R i'(t) + \frac{1}{C} i(t) + L i''(t) = 0$$

Eli:

$$L i''(t) + R i'(t) + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

Huomaa että taas $L > 0$, $R \geq 0$, $\frac{1}{C} > 0$.

Differentiaaliyhtälöitä kannattaa tarkastella "kvalitatiivisesti", ilman laskuja.

Lineaarisen, homogeenisen, vakiokertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$(1) \quad x^{(n)}(t) + p_{n-1} x^{(n-1)}(t) + p_{n-2} x^{(n-2)}(t) + \dots + p_1 \dot{x}(t) + p_0 x(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Eksponenttifunktiolla on avaimena funktiona se ominaisuus, että

$$\frac{d^n}{dt^n} e^t = e^t$$

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \lambda \frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t};$$

<u>Ansatz:</u> sijoitetaan $x(t) = \overset{\neq 0}{C} e^{\lambda t}$ yhtälöön (1):

$$\overset{\forall t \geq 0}{0 \equiv} C\lambda^n e^{\lambda t} + p_{n-1} \cdot C\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + p_{n-2} C \lambda^{n-2} e^{\lambda t} + p_1 \cdot C\lambda e^{\lambda t} + p_0 \cdot C e^{\lambda t}$$

$$\overset{(\Rightarrow)}{\underset{\forall t \geq 0}{0 \equiv}} C \overset{\neq 0}{e^{\lambda t}} \left(\lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + p_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots \; p_1 \lambda + p_0 \right).$$

<u>Määr:</u> DY (1) <u>karakteristinen polynomi</u> on

$$P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-2} p_j \lambda^j.$$

Jos λ on karakteristisen polynomin $P(\lambda)$ nollakohta $P(\lambda)=0$, niin tällöin (ja vain tällöin)

$$x(t) = c\,e^{\lambda t}$$

on DY:n (1) ratkaisu.

Koska $P(\lambda)$ on astetta n., niillä on tasan n kpl juuria (yhtälön $P(\lambda)=0$ ratkaisuja) kompleksitasossa; valitettavasti erisuuria juuria voi olla vähemmän. (moninkertaiset nollakohdat.)

Huom! Jos DY:n (2) kertoimet ovat reaalilukuja niin tällöin karakteristisen polynomin kompleksiset nollakohdat esiintyvät kompleksikonjugaattipareittain:

$$\begin{cases} \lambda_1 = x_1 + y_1 i \\ \lambda_2 = x_1 - y_1 i \end{cases}$$

Ratkaisuja ovat

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(x+yi)t} = e^{xt} \cdot e^{yti} = e^{xt}(\cos yt + i \sin yt)$$

(To

ja samoin
$$e^{\lambda_2 t} = e^{x t}(\cos y t - i \sin y t).$$

Erisuurten juurten tapaus.

Jos
$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \cdots \lambda_n$$
n kpl erisuuria juuria, n-karakteristisen yhtälön takana.
Tällöin funktiot
$$\phi_j(t) := e^{\lambda_j t}$$
ovat ratkaisuja DY:lle (1).

Tällöin
$$\underline{\phi}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \phi_j(t)$$
on niinikään DY:n (1) ratkaisu. Tarkista itse jos et usko.

Määr: Sanotaan että funktiot ϕ_j, $j=1, \dots n$ ovat lineaarisesti vapaita mikäli yhtälö

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(t) \equiv 0 \quad \forall t$$

toteutuu vain jos

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Muussa ~~tapauksessa~~ funktiot $\{\phi_j\}$ ovat lin. riippuvia.

<u>Lause!</u> Jos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \dots \neq \lambda_n$ (erisuuria), niin tällöin funktiot

$$\phi_j(t) = e^{\lambda_j t}$$

ovat lin. vapaa joukko.

<u>Esim:</u> $\phi_1 = e^{\lambda_1 t}$, $\phi_2 = e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Nämä ovat lin. vapaita.

Tarkistus

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) \qquad c_1 \neq 0$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{\neq 0}\underbrace{\left(1 + \frac{c_2}{c_1} e^{\lambda_2 t}\right)}_{} = 0 \quad \forall t$$

ts $\quad 1 + \frac{c_2}{c_1} e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \forall t$

(20)

siis $e^{\lambda_2 t} = -\frac{c_1}{c_2}$ $\forall t \geq 0$

joka on päätöntä.

Siis ovat lin. vapaita. $\boxed{}$

Moninkertaisten juurten tapaus

Motiivi: tulee keksiä ylimääräisiä ratkaisuja, joista saadaan n kpl. lin. vapaita ratkaisuja.

Tarkastellaan erikoistapausta $n=2$,

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$
$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Kaksinkertainen juuri, jos $\lambda_1 = \lambda_2$.

"Polkaisemalla" polynomia saadaan ajautumaan λ_1 ja λ_2 erilleen toisistaan, siten, että saataisiin ratkaisut

$$e^{\lambda_1 t} \qquad e^{(\lambda_1+\Delta)t} \qquad (100$$

jossa $\Delta \neq 0$. Ovat lin. vapaita, $\Delta \neq 0$.

Määritellään

$$\phi_\Delta(t) = \frac{e^{(\lambda_1+\Delta)t} - e^{\lambda_1 t}}{\Delta}$$

Tämä on Δ:llä häiritytyn DY:n ratkaisu.

Jos $\Delta \to 0$, niin tapahtuu, että $\phi(t) = \lim_{\Delta \to 0} \phi_\Delta(t)$ on samaan ratkaisu alkuperäiselle "häiritsemättömälle" yhtälölle.

Nyt

$$\lim_{\Delta \to 0} \phi_\Delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{e^{(\lambda_1+\Delta)t} - e^{\lambda_1 t}}{\Delta} = \frac{d e^{\lambda_1 t}}{d\lambda_1} = t e^{\lambda_1 t}.$$

Siis nyt meillä on kaksi <u>lin. vapaata</u> funktiota

$$e^{\lambda_1 t}, \quad t e^{\lambda_1 t}$$

Jatkuu seuraavalla luennolla..