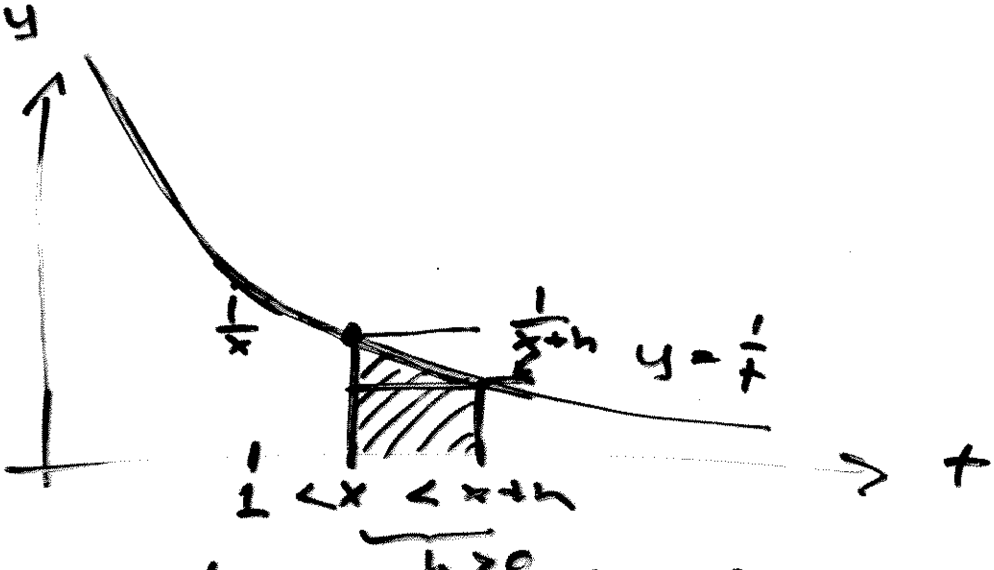
Tarkastellaan tapausta $h > 0$.




Viivoitetun alueen pinta-ala $A(h) := \ln(x+h) - \ln x$. Selvästi

$$\frac{h}{x+h} < A(h) < \frac{h}{x}$$

Jakamalla $h > 0$

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x}$$

joten $\frac{d}{dx}\ln(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$ mielivaltaiselle, mutta kiinteälle $x > 0$. $\blacksquare$

Lause: $x, y > 0$.

(i) $\ln xy = \ln x + \ln y$

(ii) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

(iii) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

(iv) $\ln x^r = r \ln x$, $\forall r \in \mathbb{Q}$

(myös reaaliluvuilla $r \in \mathbb{R}$).

Perustelu: Olkoon $y > 0$ mielivaltainen.
Määritellään $\phi : \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \ln(xy) - \ln x.$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{xy} \cdot \underbrace{\frac{d(xy)}{dx}}_{=y} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Siis $\phi$ on vakiofunktio: $\phi(x) = C$ $\forall x \in \mathbb{R}$?

(Miksi? Väliarvolause sanoo jos $a, b$ ovat mielivaltaisia $\mathbb{R}_+$:ssa, niin

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi'(c)(b-a)$$

eräällä $c \in (a,b)$. Mutta $\phi'(c) = 0$ jos $\phi' \equiv 0$, ja seuraa $\phi(b) = \phi(a)$.)

Koska $\phi(x) \equiv C$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, niin

$$\ln(xy) - \ln x = C \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Erityisesti, jos $x = 1$, niin

$$\ln(y) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = C$$

ja väite (i) seuraa. $\blacksquare$

Huom:

(i) $\ln 1 = 0$

(ii) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

(iii) $\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$.

(iv) $\ln x$ on monotonisesti kasvava joukossa $\{x > 0\}$ koska sen derivaatta $\frac{1}{x} > 0 \ \forall x > 0$.

(v) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ on injektio ja myös surjektio (surjektio siksi, että (ii) ja (iii) ovat tätä & jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuus).

## Eksponenttifunktio

Koska $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ on injektio & surjektio, sillä on käänteisfunktio

$$\exp(y) := \ln^{-1}(y)$$

siten että $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$:
$D(\exp) = \mathbb{R}$, $\text{Range}(\exp) = (0, \infty)$.

Eksponenttifunktion laskulait

(i) $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$

(ii) $\exp(x)^r = \exp(rx)$, $r \in \mathbb{Q}$

(iii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

(iv) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Nämä seuraavat välittömästi ln:n laskulaeista.

<u>Määr:</u> Neperin luku $e$ määritellään

$$e := \exp(1).$$

<u>Huom:</u> pätee myös

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \left(\begin{matrix}\text{korkea}\\\text{kurssi}\end{matrix}\right)$$

ja

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

(Taylorin sarjakehitelmä)

<u>Huom:</u> Ehto (ii) osoitetaan ensin $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Voidaan laajentaa koskemaan kaikkia reaalilukuja $r \in \mathbb{R}$, koska

(i) $\mathbb{Q}$ on tiheässä $\mathbb{R}$:ssä

(jokainen väli $(a,b) \subset \mathbb{R}$ sisältää $\mathbb{Q}$:n alkion)

(i) exp on jatkuva, koska ln on jatkuva (jopa derivoituva).

<u>Määr:</u> Jos $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, niin

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Jos $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, niin kyseessä on sama luku kuin

$$\sqrt[n]{a^m} = a^x.$$

## <u>Eksponenttifunktion derivaatta</u>

Huomataan, että

$$\exp(x) = \exp(1 \cdot x) \overset{(ii)}{=} \exp(1)^x = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Unohdetaan $\exp(x)$ – notaatio ja kirjoitetaan aina $y = e^x$.
$y > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$y = e^x \iff x = \ln y$$

Laske $\frac{dy}{dx}$! Derivoidaan

$$x = \ln y$$

molemmin puolin $x$:n suhteen

$$1 = \frac{dx}{dx} \overset{y=y(x)}{=} \frac{d}{dx}(\ln y)$$

ketjusääntö

$$= \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ratkaisemalla

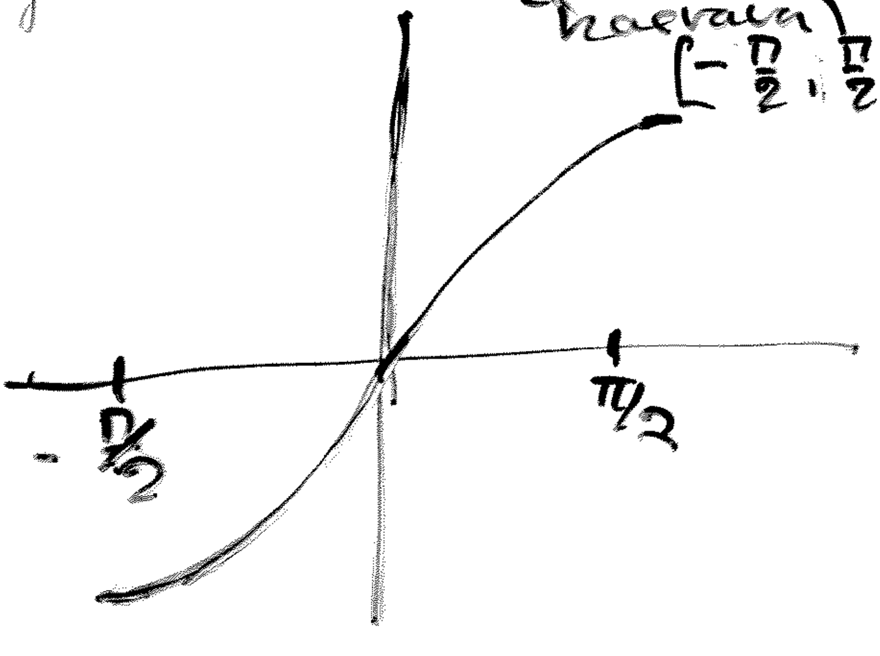
$$\frac{dy}{dx} = y = e^x.$$

Siis eksponenttifunktion derivaatta on eksponenttifunktio itse.

## Arcus-funktioiden derivaatat

Nämä ovat trig. funktioiden käänteisfunktioita (lat. arcus = kaari; sinus = jänne).

$y = \sin x$ on injektio (monotonisesti kasvava) välillä $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

on kääntyvä, ja sen käänteisfunktiota merkitään

$$\overline{\arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

jossa viiva muistuttaa että kyseessä on "pääarvo"; ts. että $D(\sin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{d}{dx} \overline{\arcsin}\, x = ?$$

$$x \in [-1, 1] \qquad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \sin y \iff y = \overline{\arcsin}\, x$$

derivoidaan molemmat puolet $x$:n suhteen

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx} \sin y$$

ketjusääntö

$$= \cos y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{eli}$$

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Muistetaan, että $x = \sin y$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

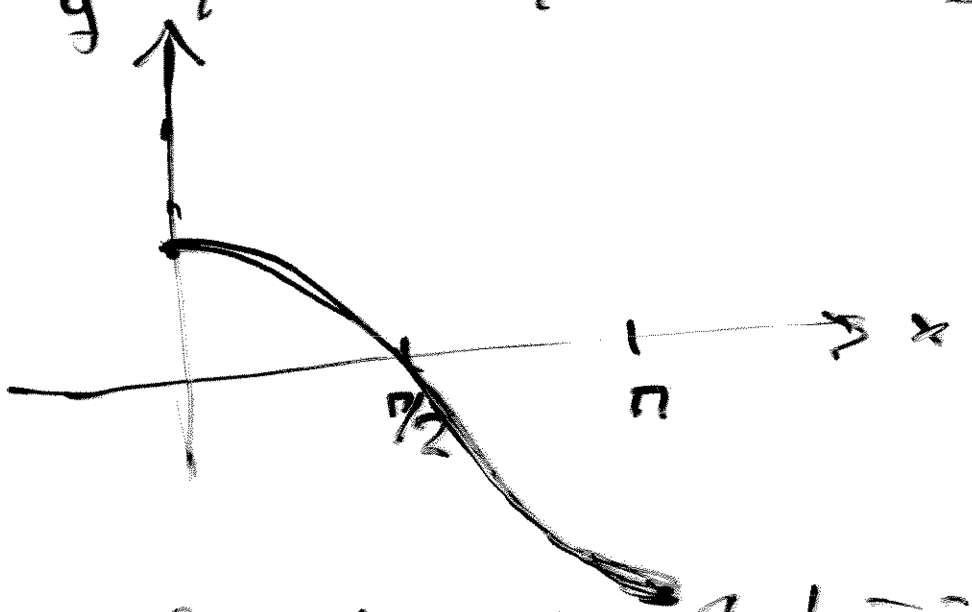
Sijoittamalla kaavaan (*) saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Huomaa, ettei esiinny trig. funktioita!

---

Sama argumentti voidaan tehdä $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$




laskeva funktio ⇒ ∃ käänteisfunktio:

$$\overline{\arc}\cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

jos $y = \cos x$, $x = \overline{\arc}\cos y$

niin kulmakerroin on

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\,\overline{\arc}\cos y}{dy}$$

Vastaaviin hoitaa kuten arcsin, mutta on oikotie:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

jos $x = \arccos y$, niin

$$\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin y$$

jolloin

$$\frac{d \arccos y}{dy} = - \frac{d \arcsin y}{dy}$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

## Differentiaali-yhtälöt

Notaatiota:

- $\mathbb{R}$ reaaliakseli,

  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty)$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n \quad n \in \mathbb{N}$

sen derivaattoja merkitään 9.

$$\frac{d^n f}{dt^n}(t) = f^{(n)}(t)$$

$n = 1, 2, 3$, niin $f'$; $f''$; $f'''$.

- $C^n(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joilla $f', f'', \ldots f^{(n)}$ ovat olemassa ja lisäksi $f^{(n)}$ on jatkuva $\}$

## Hajoamislain yhtälö

Näytteessä hetkellä $t \geq 0$ hajoamattomien ytimien lukumäärä

$$n(t) \in \mathbb{N}$$

Maalaisjärkeä:

Jos hajoamiset ovat toisistaan riippumattomia, niin aikavälillä $[t, t+\Delta t]$ tapahtuvien hajoamisten lukumäärä on suoraan verrannollinen

a) välin pituuteen $\Delta t$

b) hetkellä $t$ hajoamattomien ytimien lukumäärään

siis

$$n(t+\Delta t) - n(t) = \lambda \, n(t) \Delta t$$

eli

$$\frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = \lambda \, n(t)$$

kun $\Delta t \neq 0$.

Laskitaan että $n(t)$ olisi derivoituva funktio $t \in \mathbb{R}_+$.

Ottamalla raja kun $\Delta t \to 0$

$$n'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t}$$
$$= \lambda n(t)$$

Differentiaaliyhtälö

ulkoinen paketti ($f(t)$) $n(t)^2$ (kuuttaminen?)

(1) $\frac{dn}{dt} - \lambda n = 0$

Alkuarvotehtävä

(2) $\begin{cases} \frac{dn}{dt} = \lambda n \\ n(0) = n_0 \end{cases}$

Tarvitaan alkuehto, koska muutoin yhtälö (1) ei voisi olla yksikäsitteisesti ratkeava

Esim:

$$n(t) = C e^{\lambda t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ratkaisee yhtälön (1)

Todellakin $\frac{dn}{dt} = \underbrace{C \cdot e^{\lambda t}}_{n(t)} \cdot \lambda = \lambda n(t)$.

Käyttämällä alkuehtoa $n(0) = n_0$ saadaan

$$n(0) = c e^{\lambda 0} = c$$

joten yksittäisratkaisu alkuarvotehtävälle (2) on

$$n(t) = n(0) e^{\lambda t}.$$

Puoliintumisaika:

$$n(T_{1/2}) = \frac{1}{2} n(0)$$

$\Leftrightarrow$

$$n(0) e^{\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} n(0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda \cdot T_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$\Leftrightarrow$

$$T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Hajoamislain johto oli tässä.