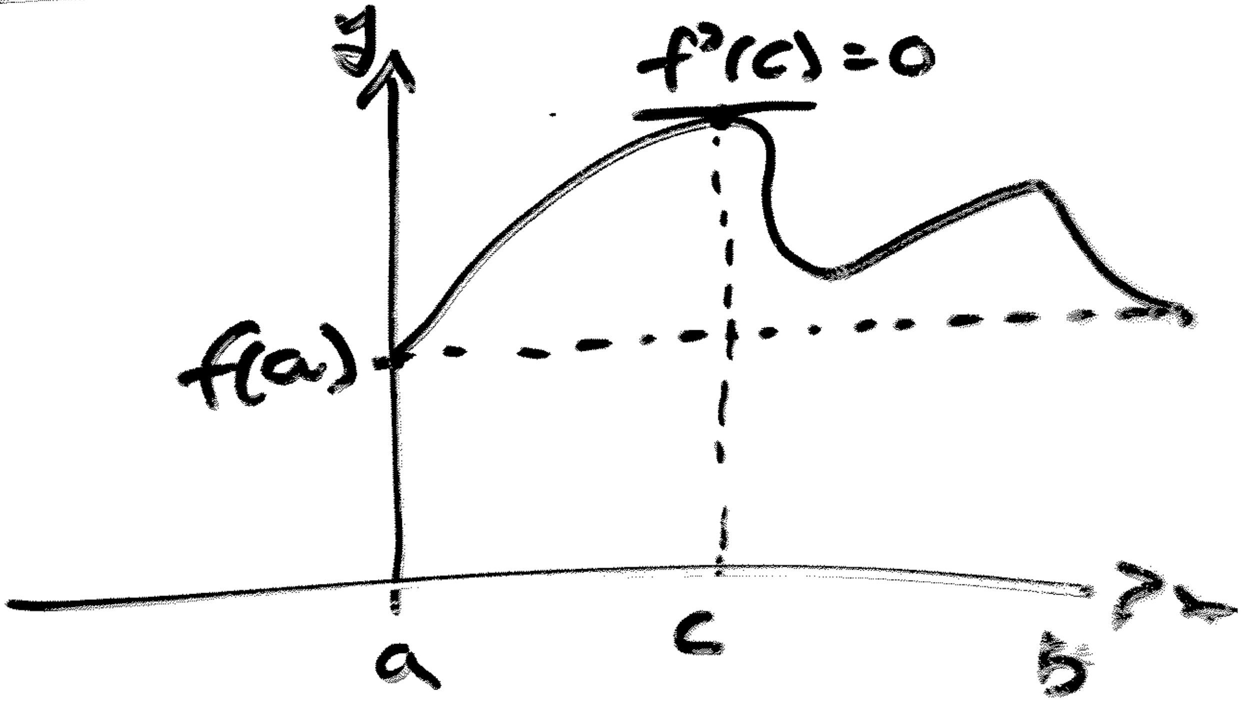
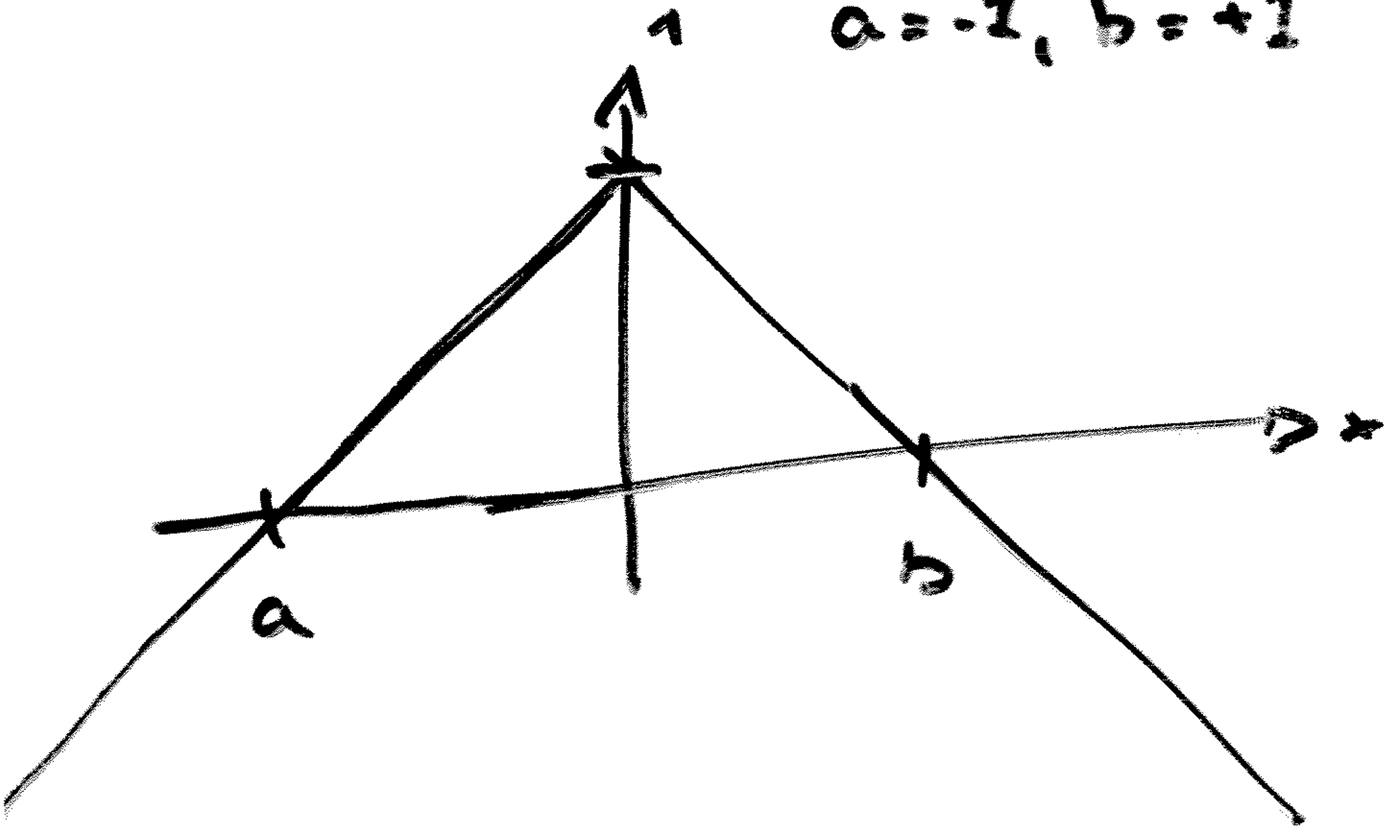
Graafisti:

18.10.2007



Jos esim. $f(x) = 1-|x|$

$a=-1,\ b=+1$



Perustelu: Triviaalitapaus

$$f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b]$$

voidaan sulkea välittömästi pois, koska $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$ joten c voitaisiin valita mielivaltaisesti joukossa (a,b).

Nyt jäljelle jää kaksi vaihtoehtoa

(1) on olemassa $x_0 \in (a,b)$ siten että

$$f(x_0) > f(a).$$

tai:

(2) on olemassa $x_0 \in (a,b)$ siten että

$$f(x_0) < f(a).$$

Argumentin kannalta riittää tutkia vain tapausta (1).

Koska f on j-va välillä $[a,b]$, se saavuttaa maksimin eräässä pisteessä $c \in [a,b]$.
(J-va funktio kompaktilla välillä)

Nyt

$$f(c) \geq f(x_0) > f(a)$$

josta seuraa että $c \neq a$
Toisaalta, koska $f(a) = f(b)$, niin samoin $c \neq b$.
Seuraa että $c \in (a,b)$
(ei päätepisteessä!)
Koska f on derivoituva koko joukossa (a,b), niin $f'(c)$ $\exists$. Edellinen lause sanoo, että $f'(c) = 0$. $\blacksquare$

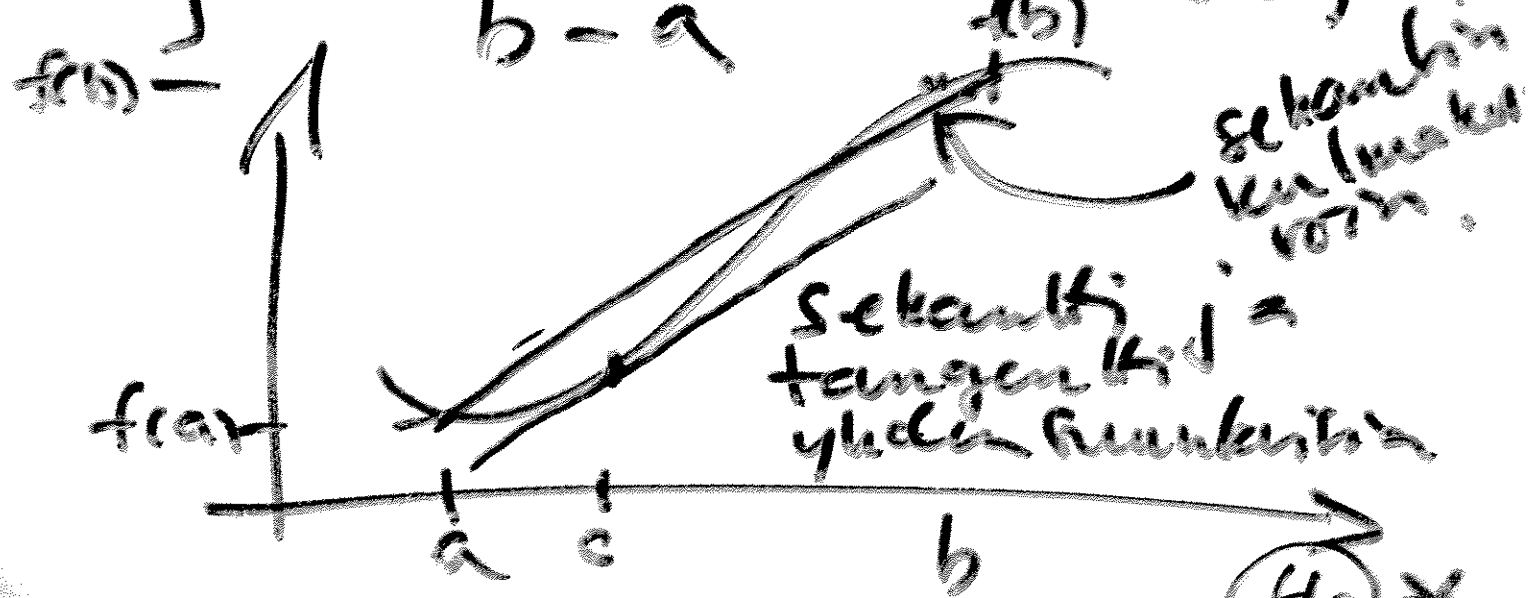
Lause (Väliarvolause.)

(Huom: Tämä on eri asia kuin "jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuus" joka oli aiemmin.)

Olkoon f jatkuva funktio suljetulla välillä $[a, b]$ joka on derivoituva välillä (a, b).

Tällöin on olemassa $c \in (a, b)$ siten että

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Perustelu: Rollen lause käsitteli jo tapauksen $f(a)=f(b)$. Jos $f(a)\neq f(b)$, niin määrit.

$$g(x) = f(x) - \Big(\underbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\text{sekantin yhtälö}}\Big)$$

Funktioon $g(x)$ voidaan soveltaa Rollen lausetta, jota on olemassa $c \in (a,b)$:

$$g'(c) = 0$$

Nyt

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ja sijoittamalla $x=c$, $g'(c)=0$ saadaan

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \blacksquare$$

Implisiittinen derivointi

Esim: Laske $\frac{dy}{dx}$ jos $y = y(x)$ määräytyy yhtälöstä (*) $x^2 + y^2 = 25$, $y \geq 0$.

Tapa 1:

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Derivoidaan ketjusääntöä käyttäen $y = \sqrt{u}$, $u = 25 - x^2$.

Tapa 2:

~~tes~~ todetaan, että $y = y(x)$ yhtälössä (*), niin

$$x^2 + y(x)^2 = 25$$

Derivoidaan ~~tämä~~ yhtälö molemmin puolin x:n suhteen

$$2x + \underbrace{2y(x)\,y'(x)}_{\text{ketjusääntö}} = 0$$

eli

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

mutta usein viimeinen ratkaisuaskel olisi useimmiten mahdoton, ja joudutaan tyytymään muotoon

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Monotoniset funktiot

Määr: Olkoon f funktio joka on määritelty välillä $I = [a, b]$. Olkoon $x_1, x_2 \in I$.

(i) Jos kaikilla $x_1, x_2 \in I$ pätee

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

niin tällöin f on (monotonisesti) nouseva.

(7o

(ii) Jos kaikilla $x_1, x_2 \in I$ pätee

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

niin tällöin f on <u>ei-laskeva</u> (engl. non-decreasing);

(iii) Jos kaikilla $x_1, x_2 \in I$ pätee

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

niin f on <u>(monotonisesti) laskeva</u>;

(iv) Jos kaikilla $x_1, x_2 \in I$ pätee

$$x < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

niin f on <u>ei-nouseva</u>.

(non-increasing).

<u>Lause:</u> Olkoon $\underline{I} = (a,b)$ avoin väli, ja $\overline{I}$ sellainen väli joka sisältää I:n ja mahdollisesti päätepisteet a, b

Oletetaan että

(i) f on jatkuva $\mathbb{I}$:ssä

(ii) f on derivoituva $\tilde{\mathbb{I}}$:ssä

Tällöin:

(a) jos $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \tilde{I}$, niin funktio on monotonisesti kasvava joukossa $\tilde{I}$.

(b) Jos $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \tilde{I}$, niin f on ei-laskeva joukossa $\tilde{I}$.

(c) Jos $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \tilde{I}$, niin f on mon. laskeva $\tilde{I}$:ssä;

(d) Jos $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \tilde{I}$ niin f ei-nouseva $\tilde{I}$:ssä

Perustelu: (a): Olkoon $x_1, x_2 \in \tilde{I}$, siten että $x_1 < x_2$.

Väliarvolause sanoo

$\exists c \in (x_1, x_2)$ siten että

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}} = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0 \text{ oletus}}$$

TS

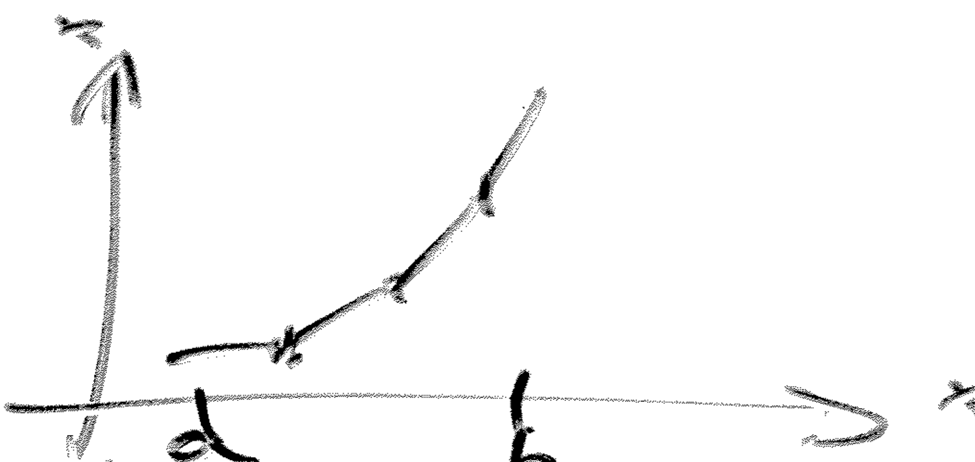
$$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1) > 0.$$

Todistettu kohdan (a).

Kohta (b): sama argumentti mutta nyt $f'(c) \geq 0$ "mutatis mutandis"!

Kohdat (c) ja (d) kuten kohdat (a) ja (b). ∎

Esim: monotoninen funktio joka ei' derivoituva



Murtoviiva.

Käänteisfunktio

Määr: funktio f on injektiivinen jos $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ pätee

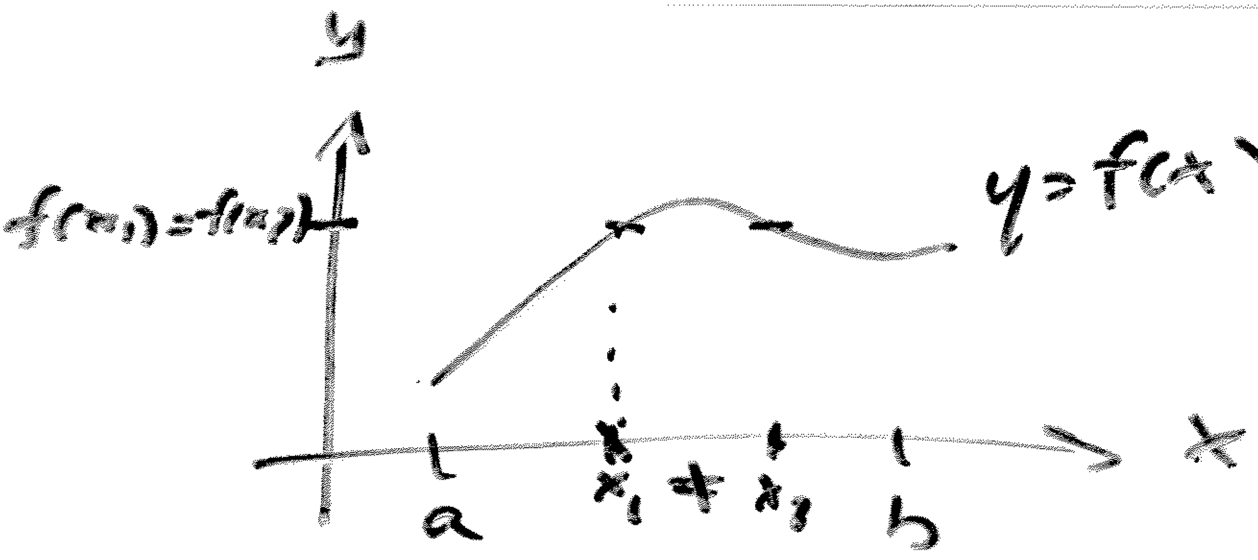
(*) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(Propositiologiikan mukaan
$$A \Rightarrow B \iff$$
$$\neg B \Rightarrow \neg A$$
← negaatio).

Siis (*) on ekvivalentti

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esim: Jos $D(f) = [a, b]$ niin f on injektio (injektiivinen) jos ja vain jos f on joko monotonisesti kasvava tai monotonisesti laskeva.



Siis injektiivisyyden rooli käänteisfunktion muodostamisessa on se, että ei-injektiivinen funktio "hukkaa informaatiota".

<u>Määr.</u> Olkoon funktio f injektiivinen. Määritellään

$$D(f^{-1}) := f(D(f))$$

$$:= \text{Range}(f)$$

$$:= \{y : \ y = f(x) \text{ jollain } x \in D(f)\}$$

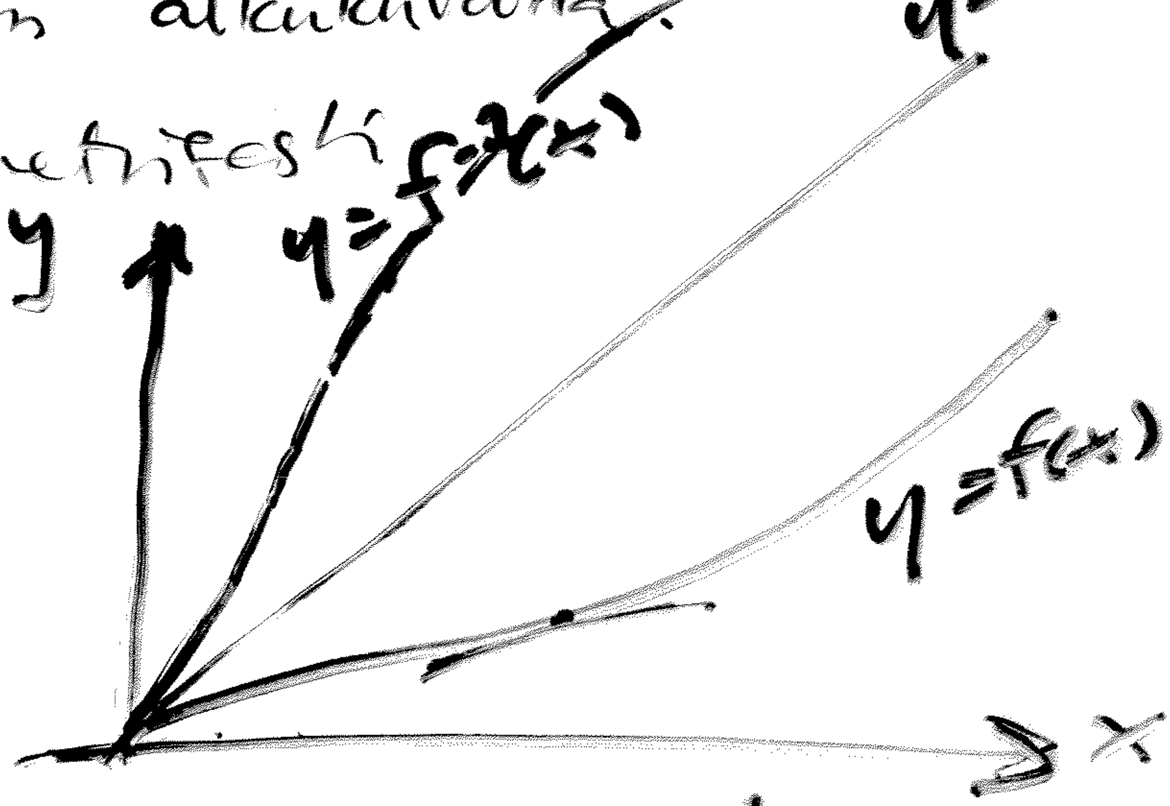
Määritellään $\forall x \in D(f^{-1})$

$$f^{-1}(x) = y \quad \text{mikäli}$$

$x = f(y)$. Sanotaan, että f^{-1} on f:n <u>käänteisfunktio</u>.

Huom: f^{-1} on hyvin määritelty (well defined) koska injektio f "ei hukkaa informaatiota" pisteen alkukuvasta.

geometrisesti



Käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja on symmetrinen peilaussuoran $y = x$ suhteen verrattuna f:n kuvaajaan.

(Ajattele itse funktiot $y = x^2$ ja $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ jotka ovat toistensa käänteisfunktioita.)

(13)

Lemma: Käänteisfunktion ominaisfunktio

(i) $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$

(ii) $D(f^{-1}) = \text{Range}(f)$

ja $\text{Range}(f^{-1}) = D(f)$

(iii)

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$\forall x \in D(f)$;

t.s. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

t.s. $f^{-1} \circ f = 1$ jos

$1(x) = x$.

(iv) $f(f^{-1}(x)) = x$

$\forall x \in D(f^{-1}) = \text{Range}(f)$.

Käänteisfunktion derivaatta

Olkoon $x = f(y)$ jossa f

injektiivinen. Siis $y = f^{-1}(x)$.
Lasketaan $\frac{dy}{dx}$. Muistetaan, että

$$(*) \qquad x = f(f^{-1}(x)) \quad \forall x \in D(f^{-1})$$

Derivoidaan (*) molemmilta puolilta x:n suhteen.

$$1 = \frac{dx}{dx} = f'(\overbrace{f^{-1}(x)}^{=y}) \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ratkaistaan $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Esim: $y = x^3 + x$; $y = y(x)$
on injektio koko $\mathbb{R}$:ssä, koska
$$y' = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$$
On siis olemassa käänteisfunktio $x = x(y)$.
Lasketaan $\frac{dx}{dy}$ derivoimalla $y = x^3 + x$ y:n suhteen molemmin puolin.

$$1 = \frac{dy}{dy} = \frac{d}{dy}\left(x(y)^3 + x(y) \right)$$

$$= 3x(y)^2 \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{dx}{dy}$$

$$= (3x^2+1)\frac{dx}{dy}$$

joten

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2+1}$$

jossa $x = x(y)$ tulee kaavasta $y = x^3 + x$.

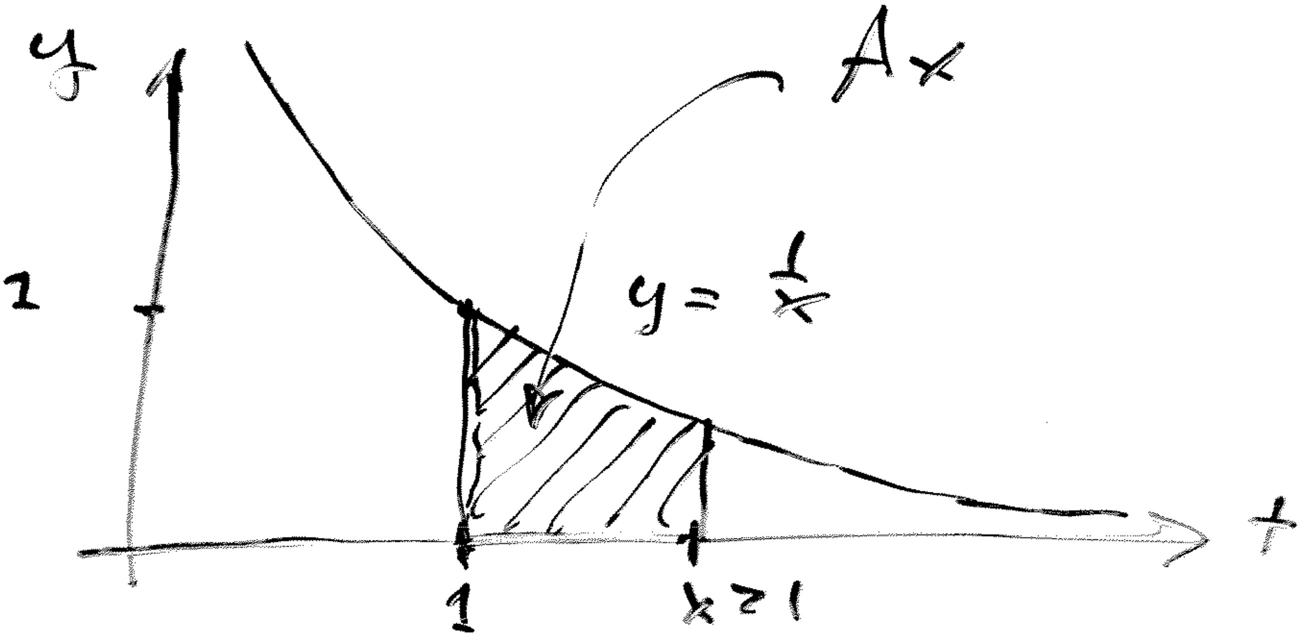
Luonnollinen logaritmi

Määr: Kullakin $x \geq 0$ merkitään A_x sen alueen pinta-alaa ($A_x \geq 0$) joka jää käyrän $y = \frac{1}{t}$, t-akselin ja pystysuorien $t=1$ ja $t=x$ väliin.

Tällöin

$$\ln x := \begin{cases} A_x & \text{jos } x \geq 1 \\ -A_x & \text{jos } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Graafisesti:



Lause: Jos $x > 0$, niin

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Perustelu: seuraavalla luennolla.