17.10.2007

# Derivointi "operaattorin" laskusääntöjä

Olkoon $D(f) \subset \mathbb{R}$ avoin ja $f$ derivoituva määrittelyjoukossaan: $\forall x \in D(f)\ \exists$

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Tällöin kuvaus

$$D(f) \ni x \xmapsto{f'} f'(x) \in \mathbb{R}$$

on $f$:n derivaattafunktio; tässä tapauksessa $D(f') = D(f)$.

Kuvaus

$$\frac{d}{dx} \equiv D : f \longmapsto f'$$

on ns. derivointioperaattori:

$$\frac{d}{dx} f = f'$$



Fakta: $\frac{d}{dx}$ on lineaarikuvaus:

(i) $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$

(ii) $\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{d}{dx}f.$

Perustelu: (i) tarkoittaa

$(f+g)' = f' + g'$. Olkoon $a \in D(f')$ mielivaltainen

$$(f+g)'(a) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(a+\Delta x) - (f+g)(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left( f(a+\Delta x) + g(a+\Delta x) - f(a) - g(a) \right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x} = f'(a) + g'(a).$$

$\square$

20

Tosi on että.

$$(f+g+h+i+j)' = (f+g+h+i)' + j' = \dots = f'+g'+h'+i'+j'.$$

## Tulon derivaatta

$$(fg)(x) := f(x)g(x) \quad \forall x \in D(f) \cap D(g)$$

Oletetaan että $x \in (a,b) \subseteq D(f) \cap D(g)$, ja $f'(x), g'(x)$ ovat olemassa.

$$(fg)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big(f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)$$

$$- f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)\Big)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big( f(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\, g(x) \Big)$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big( f(x+\Delta x)\, g(x) - f(x)\, g(x) \Big)$$

$$= \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)}^{\stackrel{?}{=} f(x)} \cdot \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}^{g'(x)}$$

$$+ \underbrace{g(x)}_{= g(x)} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{= f'(x)}$$

$$= \quad f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$$

<u>mikäli</u>

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$$

ts. $f$ on jatkuva pisteessä $x$ jossa $f'(x)$ $\exists$.

**Lause:** Jos $x \in D(f)$ ja $f'(x)$ $\exists$ ($x$ on $D(f)$:n sisäpiste) niin tällöin $f$ on jatkuva pisteessä $x$.

**Perustelu:**

Koska $f'(x)$ $\exists$ niin siis raja-arvo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \exists$$

Nyt

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left( f(x+\Delta x) - f(x) \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

(So

$= f'(x) \cdot 0 = 0$ $\blacksquare$

Pää ja häntä osoittavat väitteen.

---

Esim: olkoon u, v funktioita ja $f = uv$. Tiedetään että $u(2) = 2$, $u'(2) = -5$, $v(2) = 1$, $v'(2) = 3$. Laske $f'(2)$.

$$f'(2) = (uv)'(2)$$

$$= u'(2)v(2) + u(2)v'(2)$$

$$= (-5) \cdot 1 + 2 \cdot 3$$

$$= 1.$$

## Funktion $\frac{1}{f}$ derivaatta

(kun $f'(x)$ tunnetaan)

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)}_{\text{väärä}} \equiv \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{f}\right)(x)}_{\text{oikea notaatio!}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+\Delta x)} - \frac{1}{f(x)}}{\Delta x} \qquad \boxed{f(x) \neq 0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)\, f(x)\, \Delta x}$$

$$= - \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f(x+\Delta x) f(x)} \right)$$

$$= - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\cdot \frac{1}{f(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f(x+\Delta x)}$$

$$= - f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)}_{f(x).}}$$

$$= - \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} .$$

# Osamáč rám derivuch·

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\forall x \in D(f) \cap D(g)$$

dos fehé f eltá g
derivitania

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)$$

$$= (f') \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$= \frac{f'}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$

$$= \frac{f'g - fg'}{g^2} . \quad \blacksquare$$

8

# Ketjusääntö l. yhdistettyjen funktioiden derivointi

**Lause:** Oleta: $f(u)$ on derivoituva pisteessä $u = g(x)$; $g$ on derivoituva pisteessä $x$. Tällöin komposiitti

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

on derivoituva pisteessä $x$, ja pätee

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

**Huom:** Yllä olevassa kaavassa funktiota $f$ kutsutaan "ulkofunktioksi" ja funktiota $g$ "sisäfunktioksi".

"sadetanssi argumentti"
(ei todistus!).

$$y = f(u)$$

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

$$= f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))$$

jos

$$\underbrace{u}_{g(x)}+\Delta u = g(x+\Delta x); \text{ ts.}$$

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - \underbrace{g(x)}_{u}.$$

Ajattelemalla tangentin kulmakerrointa käyrälle $y = f(g(x))$ pisteessä $x$, huomataan, että

$$(f\circ g)'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{= g'(x)}.$$

Raja-arvo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

koska $g$ on derivoituva, niin jatkuva pisteessä $x$

ts. $\Delta x \to 0 \Rightarrow$

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \to 0.$$

Siis:

$$(f \circ g)'(x) = f'(u)\, g'(x)$$
$$= f'(g(x))\, g'(x) \quad \text{"}\blacksquare\text{"}$$

Kolmen funktion $f$, $g$, $h$ tapauksessa

$$(f \circ g \circ h)'(x)$$

$$= (f \circ (g \circ h))'(x)$$

$$= f'((g \circ h)(x))\,(g \circ h)'(x)$$

$$= f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x))\,h'(x).$$

Samoin useamman funktion tapauksessa.

<u>Esim:</u> $y = \sqrt{x^2+1}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{u} = u^{1/2};\ u = x^2+1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot \frac{du}{dx}$$

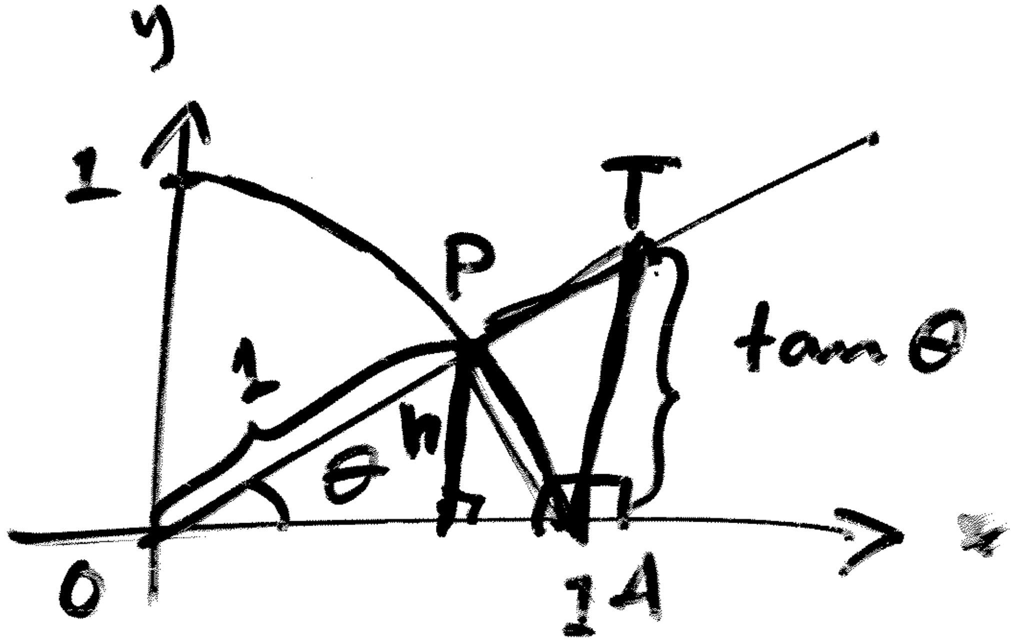
$$= \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

# Trigonometristen funktioiden derivaatat

Tarkastellaan kuviota




Pinta-aloilla:

$\Delta OAP <$ sektori $OAP$

$< OAT$

eli

$$\frac{1}{2}\cdot(1)\cdot\sin\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

$\Leftrightarrow$ $\sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\sin\theta > 0$ $\Leftrightarrow$ $1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$ $\forall\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

180

(*)

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad \theta \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

Kuristusperiaatteella:

$$\underbrace{\lim_{\theta\to 0+} \cos\theta}_{=1} \leq \lim_{\theta\to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$$

(koska $\cos\theta$ j-va.)

seuraa

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Lause:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

Perustelu:

trig summakaava

$$\sin' x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

$$+ \cos x \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{= 1}$$

$= \cos x$ mikäli osoitetaan eltä

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 0 .$$

Käytetään kaavaa

$$\cos \Delta x = 1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}$$

eli

$$\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = 2 \frac{\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$h = \frac{\Delta x}{2}$

$$= \frac{\sin^2 h}{h} = \frac{\sin h}{h} \cdot \sin h .$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left( \frac{\sin h}{h} \cdot \sin h \right)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \sin h}_{= \sin 0 = 0}}_{=0} .$$

Seuraus: $\frac{d}{dx} \cos x = - \sin x .$

Helposti $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Ketjusääntö $u = \frac{\pi}{2} - x$

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d \sin u}{du}\Big|_{u = \frac{\pi}{2} - x} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1)$$

$$= - \sin x$$

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx}$$

$$= \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

tai vaihtoehtoinen muoto

$$= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

## Väliarvolause &Co

Lause: Jos $f$ on määrit. avoimella välillä $(a, b)$ $\boxed{a<b}$ ja saavuttaa maksimin (tai minimin!) pisteessä $c \in (a, b)$, ja lisäksi $f'(c)$ $\exists$ niin tällöin $f'(c) = 0$.

Perustelu: Olkoon $c \in (a,b)$ funktion $f$ maksimi.

Tällöin $\forall x \in (a,b)$

$$f(x) - f(c) \leq 0.$$

Jos $c < x < b$, niin tällöin $x - c > 0$. Siten

$$(1) \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

Jos taas $a < x < c$, niin tällöin $x - c < 0$. Siten:

$$(2) \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Siis

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \overset{(1)}{\leq} 0$$

ja

$$\lim_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \overset{(2)}{\geq} 0$$

Koska $f'(c)$ on olemassa ja se määritelty kaksi-puolisena raja-arvona, tulee sen olla yhtäaikaa kuin oikea raja-arvo $\leq 0$ ja vasen raja-arvo $\geq 0$:

$$f'(c) \leq 0 \quad \text{ja} \quad f'(c) \geq 0.$$

Siis $f'(c) = 0$. ∎

<u>Lause:</u> (Rollen lause)

Olkoon $f$ jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$, $a<b$, ja derivoituva avoimella välillä $(a,b)$, olettaen että $f(a) = f(b)$. Tällöin on olemassa $c \in (a,b)$ jossa $f'(c) = 0$.

<u>Perustelu</u>: huomenna.