16.10.2007

Supremum-ominaisuus reaalilukuille tarkoittaa sitä, että jos A on ylhäältä rajoitettu joukko

$$\exists M < \infty : \forall x \in A : x \leq M$$

niin tällöin on olemassa

$$m := \sup A \in \mathbb{R}$$

siten että

$$\forall x \in A : x \leq m$$

ja lisäksi <u>ei</u> olemassa $m' < m$ ja jolle pätisi

$$\forall x \in A : x \leq m'.$$

<u>Ajatus</u>: Reaalilukuakselilla on "reikiä nolla".

Määr: Jos $a<b$ ja $I=[a,b]$, niin funktio $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ on jatkuva suljetulla välillä I jos

(i) f on j-va avoimella välillä (a,b); ja

(ii)

$$f(a)=\lim_{x\to a+} f(x)$$

sekä

$$f(b)=\lim_{x\to b-} f(x).$$

Lause: Olkoon f j-va suljetulla, rajoitetulla välillä $I=[a,b]$; $a<b$. Tällöin on olemassa luvut $x_1, x_2\in[a,b]$ siten että

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)\quad \forall x\in I$$

Perustelu:

Askel: Osoitetaan ensin että f on rajoitettu välillä $I = [a,b]$; ts. $\exists M < \infty$ s.e.

$$f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b].$$

Jos olisi päinvastoin — vastaoletus: Jos olisikin jono lukuja

$$x_j \in [a,b], \; j = 1, \dots \infty$$

joille pätee

$$f(x_j) > j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Toisaalta, lukuja x_j on äärettömän monta, ja niiden on pakko "kasautua" vähintäänkin yhden pisteen $\tilde{x} \in [a,b]$ ympäristössä.

Tarvittaessa heittämällä pois termejä jonosta $\{x_j\}$ (tco

Siten että

$$x_{\bar{\delta}} \to \tilde{x}.$$

Koska f on jatkuva

(*) $\quad f(x_{\bar{\delta}}) \to f(\tilde{x})$

Toisaalta vastaoletuksen mukaan

(**) $\quad f(x_{\bar{\delta}}) > \bar{\delta} \quad \forall \bar{\delta}$

Mutta (*) ja (**) riitelevät. Ristiriita todisti, että f on rajoitettu eräällä vakiolla $M < \infty$ kaikilla $x \in [a,b]$.

<u>Askel 2:</u> Siis joukko

$$A := \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ eräällä } x \in [a,b] \}$$

on rajoitettu luvulla M.
Supremum-ominaisuus sanoo, että on olemassa

$$m = \sup A = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

joka on A:n pienin yläraja. ("keitin nolla")

<u>Askel 3</u>: Todistetaan että on olemassa ehdot $x_2 \in [a,b]$ jolla

$$f(x_2) = m \quad \left(= \sup_{x \in [a,b]} f(x) \right)$$

Koska m on <u>pienin</u> yläraja, meillä on jono

$$z_j \in [a,b];\ j = 1, \ldots$$

joilla

$$(+) \quad f(z_j) \to m \text{ kun } j \to \infty$$

$$\left(\text{mutta } f(z_j) \leq m \right)$$
$$\forall j$$

Taas tulee ahdasta ja täytyy olla vähintään yksi "kasautumispiste" $\tilde{z}$ jonolle $\{z_j\}_j$ tarvittaessa heittämällä pois termejä jonosta $\{z_j\}$ voidaan olettaa että

$$z_j \to \tilde{z} \text{ kun } j \to \infty.$$

Koska f on jatkuva ja $\tilde{z} \in [a, b] = D(f)$, niin

(++) $$f(z_j) \to f(\tilde{z}) \text{ kun } j \to \infty.$$

Koska raja-arvo on yksikäsitteinen luku, niin (+) ja (++) sanovat yhdessä

$$m = f(\tilde{z}).$$

Siis on todistettu

$$f(x) \le f(\hat{z}) = m \quad \forall x \in [a,b]$$

Tämä todistaa väitteen jälkimmäisen epäyhtälön kun $x_2 = \hat{z}$.

Edellinen epäyhtälö seuraa soveltamalla jo todistettua funktioon

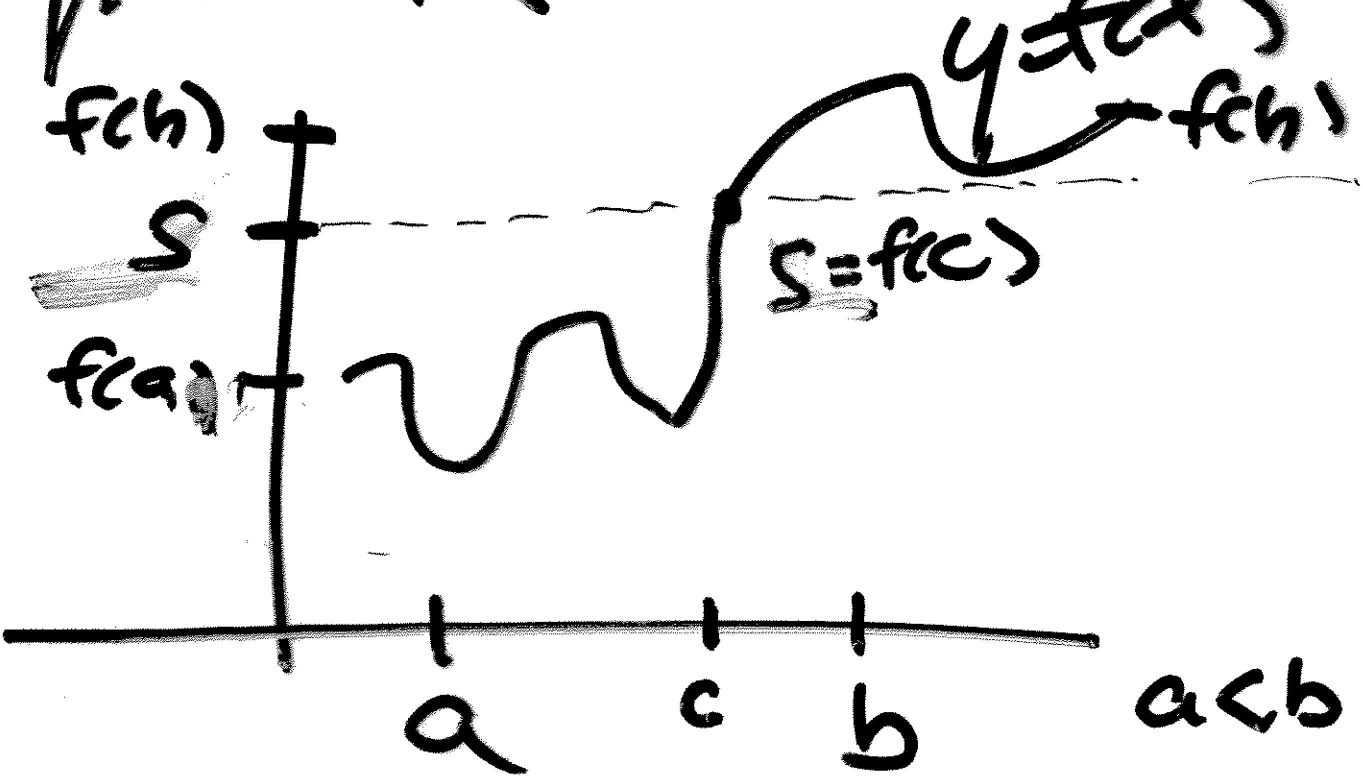
$$g(x) = -f(x). \qquad \blacksquare$$

<u>Lause</u>: (Jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuus)

Jos f on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $s \in \mathbb{R}$ on eräs luku $s \in [f(a), f(b)]$, niin tällöin $\exists\, c \in [a,b]$ siten että

$$f(c) = s.$$

Graafisesti



<u>Perustelu</u>: Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että

$$f(a) < s < f(b)$$

Tarkastellaan joukkoa

$$A := \{x \in [a,b] : f(x) \leq s\}.$$

Selvästi $A \subset [a,b]$ ja $A \neq [a,b]$ koska $b \notin A$.

Tällöin on olemassa

$$m = \sup A.$$

Olkoon $\{x_j\}$ jono $x_j \in A$ joka lähestyy vasemmalta (eli alhaalta) lukua m

$$x_j \to m- \quad \text{kun } j \to \infty.$$

Koska f on jatkuva

(1) $f(x_j) \to f(m) \overset{!}{\leq} S$ kun $j \to \infty$

Toisaalta jos $\eta > 0$ on hyvinkin pieni

(2) $f(m+\eta) > S$

koska m on joukon A yläraja. Seuraa epäyhtälöistä (1) ja (2) että $f(m) = S$.

ja että f on jatkuva!

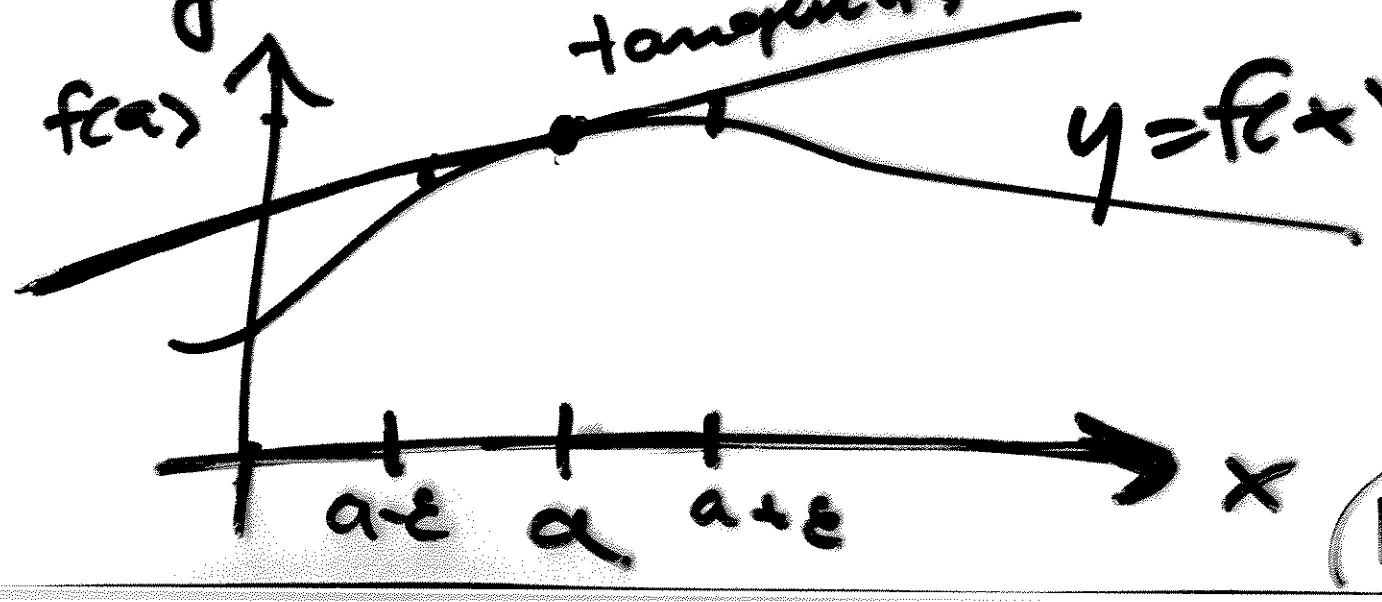
Korollaari: (Bolzanon merkinvaihtolause).

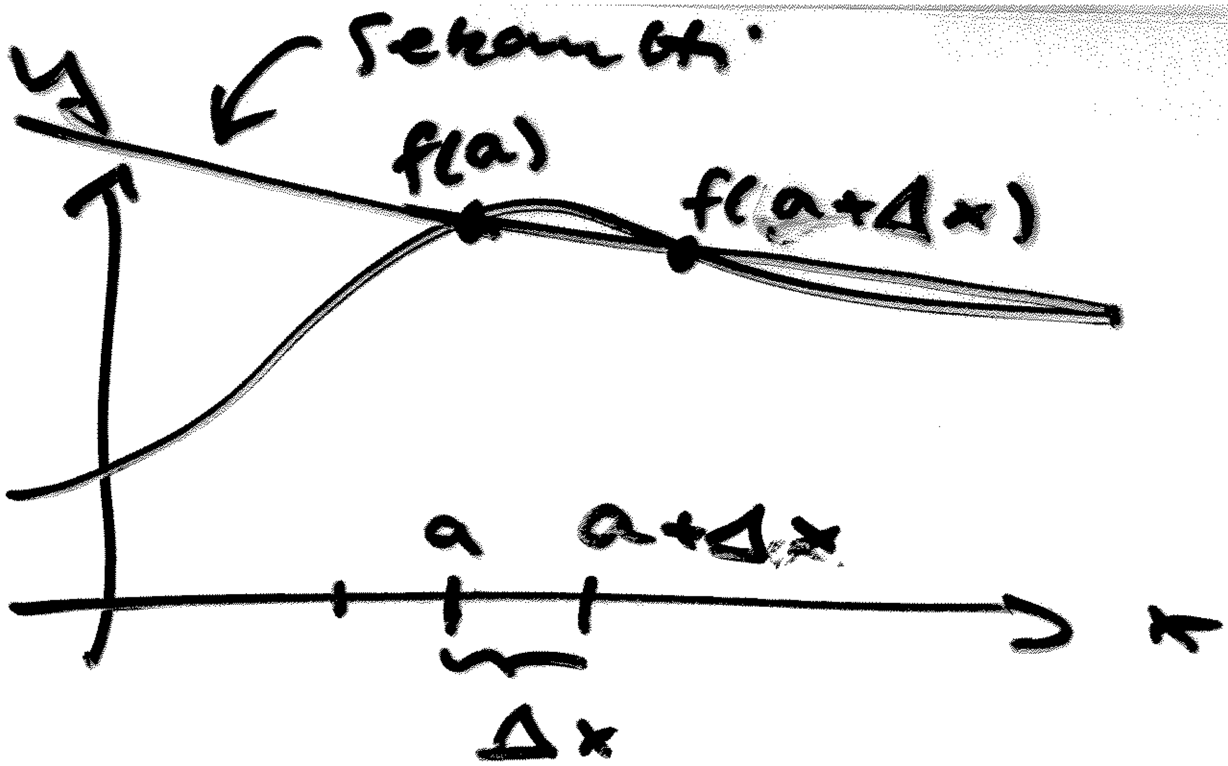
Jos f on j-va $[a, b]$, ja $x_1, x_2 \in (a, b)$.

Jos $f(x_1) < 0$ ja $f(x_2) > 0$, niin tällöin on olemassa $c \in (x_1, x_2)$ jolla $f(c) = 0$.

Perustelu: sovella edellistä lausetta funktioon f suljetulla välillä $[x_1, x_2]$. ∎

Derivaatta





Sekantti on suora, joka kulkee pisteiden

$$(a, f(a)),\ (a+\Delta x, f(a+\Delta x))$$

jonka yhtälö

$$y - f(a) = k_{\Delta x}(x-a)$$

jossa

$$k_{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Erotusosamäärä

Kun $\Delta x \to 0$, niin jos näin tapahtuu niin, eli

$$k := \lim_{\Delta x \to 0} k_{\Delta x} \quad \exists$$

Tämä k on geometrisista syistä pisteeseen $(a, f(a))$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

<u>Määr.:</u> olkoon f funktio ja $a \in D(f)$ sisäpiste. Jos raja-arvo

$$d := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

on olemassa, niin tällöin f on <u>derivoituva</u> pisteessä a. Raja-arvo d

kutsutaan f:n *derivaataksi* *pisteessä a*, ja merkitään

$$d = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$$
$$= (Df)(a).$$

Määr: Funktio f on *derivoituva* avoimessa joukossa $A \subset D(f)$ jos f on derivoituva jokaisessa pisteessä $a \in A$.

Huom: Meille riittää tarkastella tilanteita, joissa $A = D(f)$ = äärellinen unioni avoimista väleistä.

Suljetun välin $[a, b]$, $a < b$, päätepisteissä a ja b derivaatta voidaan määritellään "toispuoleiset":

$$f'(a) := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ja samoin

$$f'(b) := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

<u>Esim:</u> $y = x^2$. Laske derivaatta pisteessä $a \in \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 - a^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2a + \Delta x)$$

$$= \Big(2a + \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}^{=0}$$

Seuraa että $f(x) = x^2$ on derivoituva $\mathbb{R}$:ssä ja $f'(a) = 2a$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

<u>Esim:</u> $f(x) = \frac{1}{x}$. Laske $f'(a)$ kun $a \neq 0$.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{a+\Delta x}\right) - \frac{1}{a}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a - (a + \Delta x)}{a(a+\Delta x)\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{a(a+\Delta x)\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{a(a+\Delta x)}$$

$$= -\frac{1}{a} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{a+\Delta x}}_{\frac{1}{a}}$$

$$= -\frac{1}{a^2}. \qquad \blacksquare$$

Differentiaalit

Idea on seuraava:

$$y = f(x)$$

jossa f on derivoituva.

Merkitään:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

Kysymys: Kuinka suuri muutos y on x:n pienille muutoksille?

Verrataan Δy ja Δx
toisiinsa

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\approx f'(x)$$

jos f on derivoituva

ja $\Delta x \approx 0$.

Tällöin

(*) $\Delta y \approx f'(x) \Delta x$.

Differentiaali on toinen

yhtälö (*) "äärettömän
pienille" arvoilla $\Delta x \approx 0$.
ja on tapana kirjoittaa

$$dy = f'(x)\, dx$$

$\Delta y \to dy$ $\Delta x \to dx$