11.10.2004

Huom. Nykyään lienee tavanomaisempaa sanoa että joukon $A \subset \mathbb{R}$ reunapisteet ovat täsmälleen joukon A reuna.

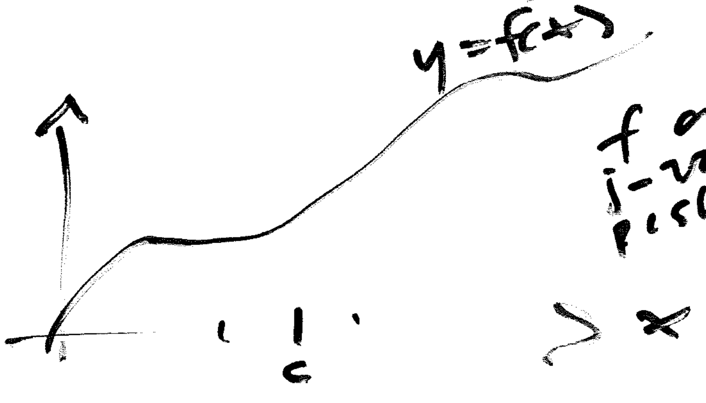
Esim: $A = [a, b)$ niin $\partial A = \{a, b\}$.
ja $A^c = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$. Siis
$\partial A \not\subset A$, $\partial A \not\subset A^c$.

Määr: funktio $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva $D(f)$:n sisäpisteessä $c \in D(f)$ mikäli

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D(f)}} f(x) = f(c).$$

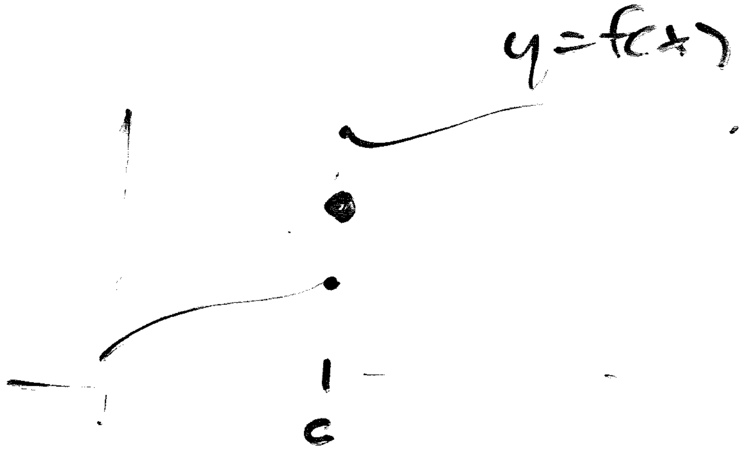
Huom: Voidaan määritellä f:n jatkuvuus samalla tavalla, jos $c \in D(f)$ on $D(f)$:n reunapiste mutta ei isoloitu piste.
Isoloidussa pisteessä $\tilde{c} \in D(f)$ jatkuvuuden määrittely on mieletöntä.

Esim:



f on j-va pisteessä c

f ei ole jatkuva pisteessä c, joskin f voidaan uudelleen-määritellä pisteessä c j-vaksi.



Tätä funktiota ei voi uudelleen-määritellä jatkuvaksi pist. c.

<u>Määr:</u> Funktio $f: D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on

(a) <u>vasemmalta</u> (<u>puoli</u>) <u>jatkuva</u> pisteessä $c \in D(f)$ mikäli

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c);$$ ja

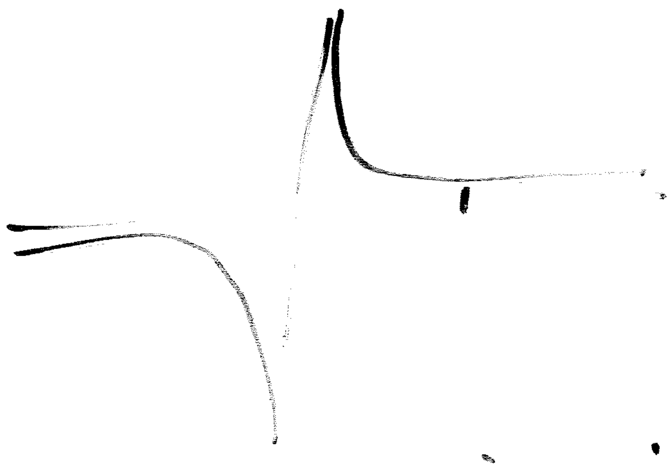
(b) <u>oikealta</u> (<u>puoli</u>) <u>jatkuva</u> pisteessä $c \in D(f)$ mikäli

$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c).$$

<u>Korollaari:</u> Funktio $f: D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva sisäpisteessä $c \in D(f)$ jos ja vain jos f on sekä vasemmalta että oikealta (puoli)jatkuva pisteessä c.

<u>Esim:</u> $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in D(f)$.



$D(f)$ on avoin joukko; ts. jokainen $D(f)$:n piste on sisäpiste.
Selvästi $f(x)$ on jatkuva jokaisessa $D(f)$:n pisteessä.

Jos $L \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen ja määritellään

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1/x & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ L & x = 0 \end{cases}$$

Jolloin $D(\tilde{f}) = \mathbb{R}$; avoin joukko.
Selvästi $\tilde{f}$ ei ole jatkuva pisteessä $x=0$. (Miksi)

Määr: Jos $I=(a,b)$ on avoin väli, $I \subset D(f)$ ja $f: D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niin f on jatkuva välillä $I=(a,b)$ jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $c \in I$.

Joukko-opin notaatiosta välisoitto

Olkoon A joukko. Jos x on alkio niin kirjoitetaan $x \in A$.
Jos B on joukko, jonka alkiot toteuttavat

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

niin B on tällöin A:n osajoukko kirjoitetaan $B \subset A$.

Joukkojen A ja B leikkaus

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}$$

$\wedge$ (logiikan "ja" eli "konjunktio")

Joukkojen A ja B yhdiste eli unioni

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ tai } x \in B\}$$

$\vee$ (logiikan "tai" eli "disjunktio")

Joukkojen A ja B erotus on joukko

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$

Selvästi $A \setminus B \subset A$ ja ei vaadita että $B \subset A$.

Yhden pisteen muodostama joukko l. yksiö merkitään $\{c\}$. Selvästi $c \in \{c\}$, mutta $c \neq \{c\}$.

Merkitään myös

$$\{a, b, c\}$$

joukolle, jonka alkiot ovat a, b, c.

Tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko: $\emptyset \subset A$. Joskus merkitään $\emptyset = \{\ \}$. $\emptyset \neq \{0\}$.

Totta on että $\emptyset \subset \{c\}$.

$$\{\ \} = \emptyset, \quad \{\emptyset\} =: 2, \quad \{\{\emptyset\}\} =: 3,$$

...

Palataan jatkuviin funktioihin.

Jatkuvuus määriteltiin edellä avoimilla väleillä $I = (a,b) \subset \mathcal{D}(f)$. Jos oli avoimia välejä

$$I_j = (a_j, b_j), \quad a_j < b_j < a_{j+1}$$

niin mikäli

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$$

niin voitaisiin aivan luonnollisesti määritellä f:n jatkuvuus koko $\mathcal{D}(f)$:ssä vaatimalla f jatkuvaksi jokaisella näistä väleistä I_j.

Esimerkkejä jatkuvista funktioista

1. Polynomit $\mathbb{R}$:ssä ja sen avoimilla osaväleillä (a,b)
2. Rationaalifunktiot joukossa $\mathbb{R} \setminus \{$nimittäjän nollakohdat$\}$
3. Kaikki juuri- ja potenssilausekkeet muotoa

$$x^{m/n} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

joukossa $\{x > 0\} \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

4. Trigonometriset funktiot

sin, cos, tan, cot ....

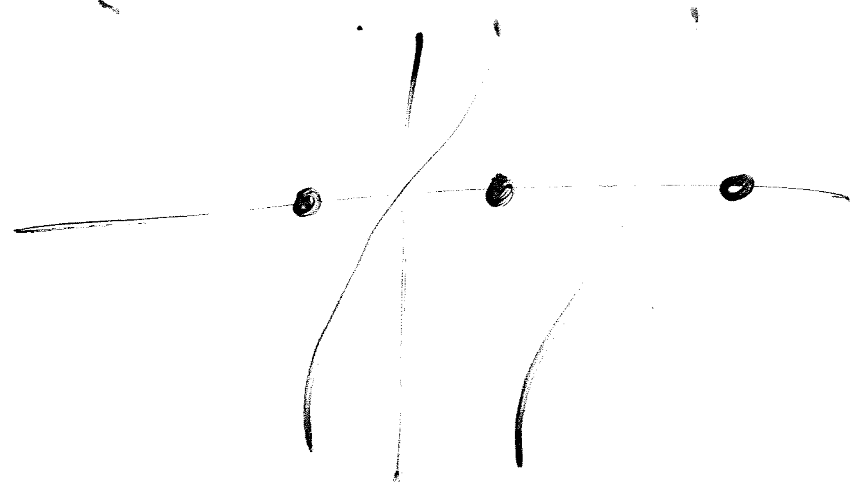
ovat jatkuvia omissa määrittelyjoukoissaan:

$$D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$$

$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$, $D(\tan) :=$

$\{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$

$= \{\pi/2 + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$



5. funktio $f : x \longmapsto |x|$

on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä

$(f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto |x| \in \mathbb{R})$.

<u>Lause:</u> Olkoon f ja g

<u>jatkuvia</u> (jollain välillä $I = (a,b)$)

$\Rightarrow$ $f \pm g$ ovat jatkuvia

$((f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x))$

$\sqrt{70}$

(ii) Jos $(fg)(x) := f(x)g(x)$ niin fg on jatkuva.

(iii) Erikoistapauksena edellisestä: jos $(kf)(x) := kf(x)$, $k \in \mathbb{R}$, niin kf on jatkuva.

(iv) f/g on jatkuva jokaisella avoimella välillä I, joka kuuluu joukkoon $D(\frac{f}{g}) := \{x \in D(f) \cap D(g) : g(x) \neq 0\}$.

(v) Jos $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D(f)$ niin $x \mapsto [f(x)]^{m/n}$ on jatkuva.

<u>Määr:</u> Välin $I = (a,b)$ jatkuvien funktioiden joukkoa merkitään
$$C(a,b) \equiv C(I)$$
(C ~ continuous).

|| Joukko $C(a,b)$ on vektoriavaruus, jonka pisteet (vektorit) ovat jatkuvia funktioita.

(Fo

Lause: Jos f ja g ovat jatkuvia, ja lisäksi

$$g(D(g)) \subset D(f)$$

(jossa

$$g(A) := \{ y : y = g(x) \text{ jollain } x \in A \})$$

niin ~~tällöin~~ yhdistetty funktio

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad x \in D(g)$$

on jatkuva (joukon $D(g)$ avoimilla väleillä).

<u>Perustelu ohitetaan.</u>

<u>Jatkuvat funktiot suljetuilla, rajoitetuilla väleillä</u>

Väli $I = [a,b]$, $a < b$, on <u>rajoitettu</u> jos $a > -\infty$ ja $b < \infty$.

Rajoitettuja ja suljettuja välejä kutsutaan <u>kompakteiksi väleiksi</u>.

Reaaliluvuilla pätee nk.
<u>Supremum-ominaisuus</u>

Jokaisella ylhäältä rajoitetulla osajoukolla $A \subset \mathbb{R}$ on olemassa pienin yläraja $x \in \mathbb{R}$.

<u>Esim:</u>

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\}$

$\sqrt{2} := \sup A$.

Joukolla $\hat{A} = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ ei ole pienintä ylärajaa joukossa $\mathbb{Q}$

Tällä on nimi: Dedekindin leikkaus.