Vasemman ja oikeanpuoleiset raja-arvot

Määr: Funktiolla f on vasen raja-arvo L pisteessä a:

$$L = \lim_{x \to a-} f(x)$$

jos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{s.e.}$$

$$a - \delta_\varepsilon < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Oikeanpuoleinen raja-arvo määritellään analogisesti:

$$R \overset{!}{=} \lim_{x \to a+}$$

jos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{s.e.}$$

$$a < x < a + \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - R| < \varepsilon.$$

10.10.200

Lause:

$\lim_{x \to a} f(x)$ $\exists$

jos ja vain kaikki seuraavat ehdot toteutuvat

(i) $\lim_{x \to a-} f(x) =: L$ $\exists$ ja

(ii) $\lim_{x \to a+} f(x) =: R$ $\exists$ ja

(iii) $L = R$.

Seuraa δ-ε-määritelmistä.

Lause:

Olkoon $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

(i) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = L \pm M$

(ii) $\lim_{x \to a} \left(f(x) g(x) \right) = LM$

(iii) $k \in \mathbb{R}$ niin

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$
$$= kL$$

($g(x) \equiv k$ $\forall x$; sovella kohtaa (ii) yllä.)

(iv)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ jos } M \neq 0.$$

(v)

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$$

$m, n \in \mathbb{N}$.

(vi) Jos eräässä pisteen a ympäristössä (vaikkapa avoimella välillä I, $a \in I$) pätee

$$f(x) \leq g(x), \; \forall x \in I \setminus \{a\}$$

niin $L \leq M$.

<u>Huom:</u> Jos sen sijaan $f(x) < g(x)$ $\forall x \in I \setminus \{a\}$, niin silti voisi olla $L = M$.

Perustelu (1):

Todistetaan että

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to a} f(x)}_{=:L} + \underbrace{\lim_{x \to a} g(x)}_{=:M}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$.

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ tarkoittaa:

On olemassa $\delta^1 = \delta^1_{\varepsilon/2}$ siten että

$$|x - a| < \delta^1_{\varepsilon/2} \Rightarrow$$

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2) $\lim g(x) = M$ tarkoittaa:

On olemassa $\delta^2 = \delta^2_{\varepsilon/2}$ siten että

$$|x - a| < \delta^2_{\varepsilon/2} \Rightarrow$$

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bo

Olkoon nyt

$$\delta_\varepsilon := \min\left(\delta^1_{\varepsilon/2}, \delta^2_{\varepsilon/2}\right)$$

Tällöin, jos $|x-a| < \delta_\varepsilon$

niin

$$\begin{aligned}
&\left|\left(f(x)+g(x)\right)-(L+M)\right| \\
&= \left|\left(f(x)-L\right)+\left(g(x)-M\right)\right| \\
&\le \underbrace{\left|f(x)-L\right|}_{\substack{<\varepsilon/2 \\ (\text{kohta } (1))}} + \underbrace{\left|g(x)-M\right|}_{\substack{<\varepsilon/2 \\ (\text{kohta } (2))}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Tämä osoitti väitteen. □

40

Kuristusperiaate

Lause: Olkoon $I = (a, b)$ avoin väli ja $c \in I$. Olkoon f, g, h funktioita $I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat

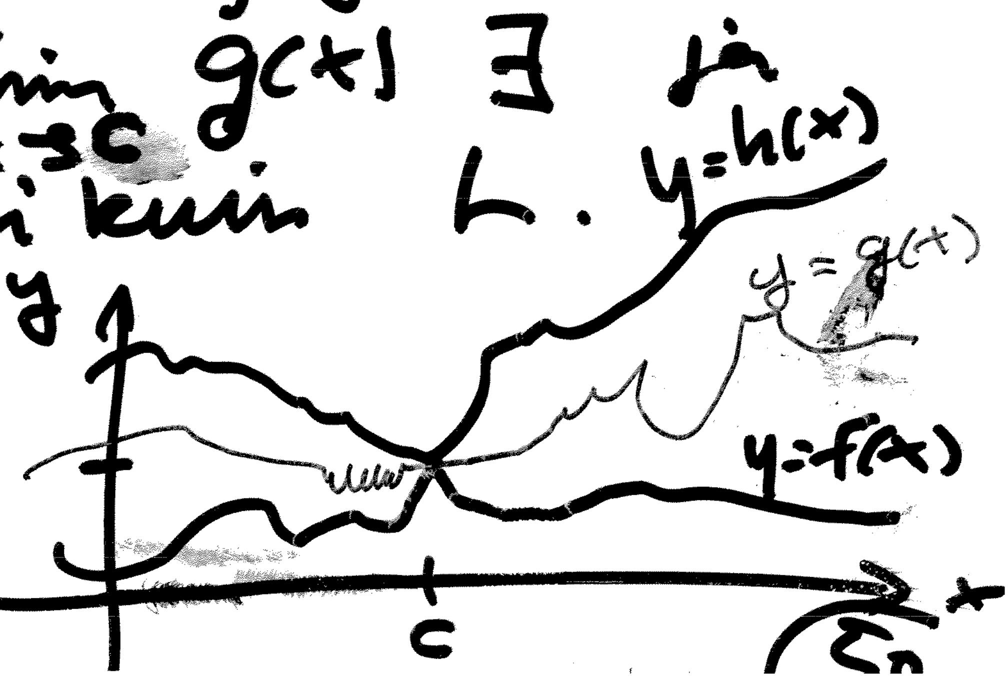
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$\forall x \in I \setminus \{c\}$.

Oletetaan että raja-arvot

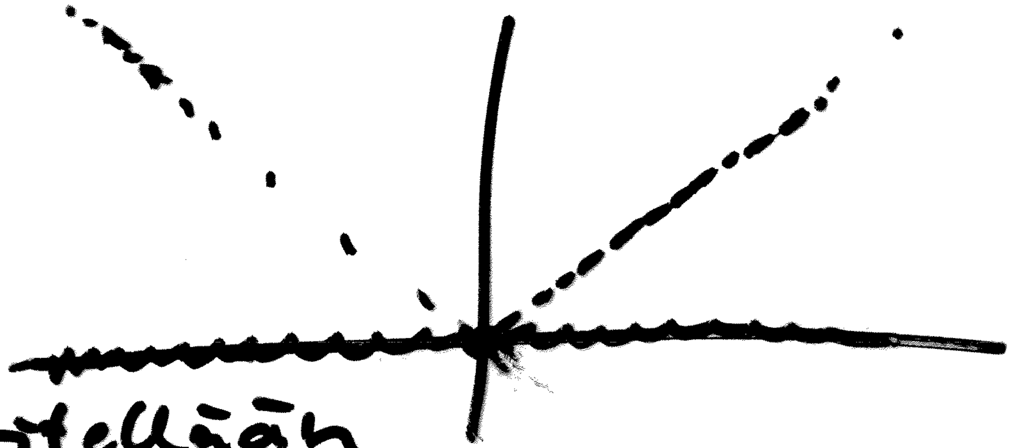
$$L = \lim_{x \to c} f(x) \text{ ja } M = \lim_{x \to c} h(x)$$

ovat olemassa, ja $L = M$. Tällöin $\lim_{x \to c} g(x)$ $\exists$ ja yhtäsuuri kuin L.



Esim.:

$$g(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Määritellään

$$f(x) :\equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h(x) := |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tällöin

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$

joten $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ kuristus-periaatteen nojalla.

<u>Esim:</u> olkoon $u(t)$ funktio joka toteuttaa

$$3 - x^2 \leq u(t) \leq 3 + x^2 .$$

Seuraa että $\lim_{x \to 0} u(t) = 3$

koska

$$3 = \lim_{x \to 0} (3 - x^2) \leq \lim_{x \to 0} u(t)$$

$$\leq \lim_{x \to 0} (3 + x^2) = 3$$

joten väite seuraa.

<u>Raja-arvot äärettömyydessä</u>

Mitä tarkoittavat

(1) $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$

(2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0$.

?

Esimerkki (1) tarkoittaa sitä, että $\lim_{x \to \infty} x^3$ ei olemassa koska raja-arvo on luku mutta se ei ole. Toisaalta, tällä halutaan sanoa että funktio $x \mapsto x^3$ kasvaa rajoittamattomasti kun x itse rajoittamattomasti

$$\forall M > 0 \quad \exists N = N_M \text{ siten että}$$

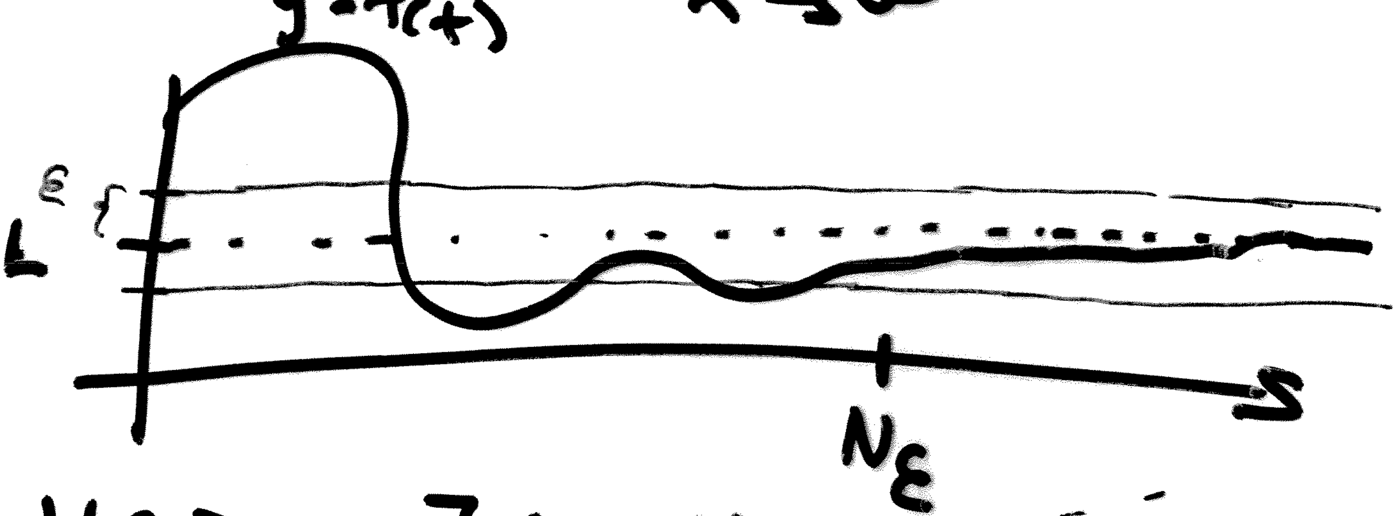
$$|x| > N_M \Rightarrow |x^3| > M.$$

Esimerkki (2) tarkoittaa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon \text{ siten että}$$

$$x > N_\varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right| < \varepsilon.$$

Piirtämällä $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$:



" $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N_\varepsilon :$

$x > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ "

Esim:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ei voida laskea säännöllä

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

koska raja-arvon piste $= \infty$ ja tämä osamäärä menee määrittämättömään muotoon ∞/∞. Jos $x < \infty$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} \end{cases}$$

kun $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$.

Raja-arvon määrittämisessä hakuvälille $x < 0$ ei ole väliä, joten

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1. \quad \blacksquare$$

Rationaalifunktioiden raja-arvot äärettömyydessä

Esim:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + 5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{5}{x^2}}$$

10

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3 + \frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}. \qquad \blacksquare.$$

<u>Exm:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-2}{x+1} =$$

$$5 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1 + 1 - \frac{2}{5}}{x+1}$$

$$= 5 \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\frac{x^2-1}{x+1}}_{x-1} + \frac{3/5}{x+1}\right)$$

$$= \underbrace{5 \lim_{x\to\infty} (x-1)}_{=\infty} + \underbrace{5 \cdot \frac{3}{5}}_{=3} \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}}_{=0} = \infty. \qquad \blacksquare$$

Esim.:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

Neliöjuuri pitää hoitaa identiteetillä

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Siis

$$\sqrt{x^2+x}-x$$

$$=\frac{\Big(\overset{a}{\sqrt{x^2+x}}-\overset{b}{x}\Big)\Big(\overset{a}{\sqrt{x^2+x}}+\overset{b}{x}\Big)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$\overset{x>0}{=}\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0 \text{ kun } x\to\infty}}+1}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}.$$

(120) $\square$

Jatkuvat funktiot

Topologisia käsitteitä:

<u>Määr:</u> Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $x \in A$.

(i) x on joukon A <u>sisäpiste</u> jos on olemassa avoin väli $\underline{I} = (a, b)$ joka toteuttaa

$$x \in \underline{I} \subset A.$$

(ii) Jos $x \in A$ mutta x ei ole A:n sisäpiste, niin tällöin x on <u>A:n reunapiste</u>.

(iii) Jos $x \in A$ ja on olemassa avoin väli $\underline{I} = (a, b)$ siten että $x \in \underline{I}$ ja $\underline{I} \cap A = \{x\}$ niin tällöin x on A:n <u>eristetty</u> l. <u>isoloitu</u> piste.

Esim: Olkoon $a < b < c$.

$$A = (a, b] \cup \{c\}$$

- sisäpisteet muodostavat avoimen välin (a, b)
- ~~A:n~~ Reunapisteitä ovat b ja c
- Koska $a \notin A$, se ei ole A:n reunapiste (mutta kyllä kin kuuluu joukon A reunaan $\partial A = \{a, b, c\}$).

Määrit: Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on suljettu, jos se sisältää oman reunansa ∂A.

Joukon A reuna ∂A on niiden pisteiden x joukko, joilla pätee:

$$x \in I = (a, b)$$
$$\Rightarrow \quad I \cap A \neq \emptyset \text{ ja } I \cap A^c \neq \emptyset$$

Huom:
$x \in \partial A$ jos ja vain jos sen jokaisessa, hyvinkin pienessä ympäröivässä avoimessa välissä $I=(a,b) \ni x$ on sekä joukon A että sen komplementin $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ pisteitä.

Huom: Joukon A reuna ∂A ei yleensä kuulu joukkoon A eikä myöskään komplementtiin A^c.

Määr: Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on avoin jos sen komplementti A^c on suljettu.

Huom: Avoimen joukon jokainen piste on sisäpiste. Tämä seuraa edellisestä, koska selvästi
$$\partial A = \partial A^c.$$