9.10.2007

Diagonalisoituvan matriisin A potenssit voidaan laskea hyvin helposti:

$$A = PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow A^2 = A \cdot A = PD\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}DP^{-1}$$

$$= PD^2P^{-1}$$

Samoin

$$A^3 = PD\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}D^2P^{-1} = PD^3P^{-1}$$

ja yleisesti $A^k = PD^kP^{-1}$.

Matriisieksponentin tapauksessa

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

$$= P \cdot I \cdot P^{-1} + PDP^{-1} + \frac{1}{2!}P \cdot D^2P^{-1} + \frac{1}{3!}PD^3P^{-1} \ldots$$

$$= P\underbrace{\left(I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \cdots\right)}_{= e^D}P^{-1}$$

$$= Pe^DP^{-1}.$$

Diagonalisointi on erittäin halpaa ja miellyttävää laskujen kannalta.

Huom: Kaikki matriisit eivät ole diagonalisoituvia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lause: Matriisi $\underset{n \times n}{A}$ on diagonalisoituva, jos ja vain jos sen ominaisvektorit virittävät avaruuden $\mathbb{C}^n$.

Kun A on on diagonalisoituva, saadaan $A = PDP^{-1}$ jossa

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ja

$$P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n],$$

jossa $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ ovat ~~A:n~~ ominaisarvot ja $\bar{v}_1, \ldots \bar{v}_n$ niitä vastaavat ominaisvektorit.

Perustelu ja kommentteja:

Matriisin P kääntyvyys edellyttää sen, että ominaisvektoreita on n kpl ja ne ovat lin. vapaita.

Varsinainen peruste kaavalle

$$A = PDP^{-1}$$

on siinä, että voidaan laskea

$$\Leftrightarrow \quad AP = PD$$

Jos $P = [\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n]$

niin

$$AP = [A\bar{v}_1 \; A\bar{v}_2 \; A\bar{v}_3 \cdots A\bar{v}_n]$$

$A\bar{v}_j = \lambda_j \bar{v}_j$

$$= [\lambda_1\bar{v}_1 \; \lambda_2\bar{v}_2 \cdots \lambda_n\bar{v}_n]$$

fakta

$$= [\bar{v}_1 \; \bar{v}_2 \cdots \bar{v}_n] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}}_{:= D}$$

$$= PD.$$

Korollaari: Matriisi A on erityisesti siinä diagonalisoituva, jos sillä on n kpl toisistaan erisuuria ominaisarvoja.

Perustelu: Erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat lin. vapaita. ∎

Lause: $n \times n$-matriisi on diagonalisoituva, jos sen jokaisen ~~keskenään~~ erisuuren ominaisarvon

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p \quad (p \leq n)$$

geometrinen ja algebrallinen multiplisiteetti ovat yhtäsuuria:

$$\dim \mathrm{N}(A - \lambda I) = \lambda\text{:n}$$

nollakohdan kertaluku karakteristisen polynomin $\det(A - \lambda I)$ nollakohtana.

Perustelu: Ohitetaan.

[1. välikokeen alue loppuu tähän]

Raja-arvot

Tarkastelemme seuraavassa reaalimuuttujan $x \in \mathbb{R}$ funktiota f: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(Usein riittää, että f ei ole määritelty koko $\mathbb{R}$:llä, vaan määrittelyjoukossaan $D(f) \subset \mathbb{R}$.)

Esim: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(ts. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.)

Kuinka f käyttäytyy erikoispisteensä 1 ympäristössä.

Jos $x \neq 1$, niin selvästi

$$f(x) = x+1 \qquad x \neq 1$$

Tekisi kovasti mieli sanoa että $f(1) = 2$, mutta tämä on pötyä. Ts. funktiolla f on laajennus suurempaan määrittelyjoukkoon $\mathbb{R}$, jossa f näyttäisi olevan "jatkuva" siinä mielessä että sen graafi ei tee hyppyä pisteessä $x=1$.

On selvää, että f:llä ($D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$) on jonkinlainen "raja-arvo" (joskaan ei arvoa) pisteessä $x=1$.

Epämuodollisesti:

Jos funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($D(f) \subset \mathbb{R}$ riittää) ja erään $a \in \mathbb{R}$ välillä vallitsee seuraava suhde:

"kun x viedään kyllin "lähelle" lukua a joukon $D(f)$ sisällä, niin $f(x)$ tulee "lähelle" erästä lukua $L \in \mathbb{R}$"

niin sanotaan että

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ja että L on f:n raja-arvo pisteessä $x=a$.

Täsmällinen raja-arvon määritelmä on peräisin Weierstrass-ilta 1800-loppupuolelta. Kutsutaan δ-ε-määritelmäksi.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 :$$

$$\begin{cases} |x-a| < \delta_\varepsilon \\ x \in D(A) \end{cases} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow_{df}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L .$$

Ajatellaan asiaa kahden pelaajan pelinä:

ε- Kalle

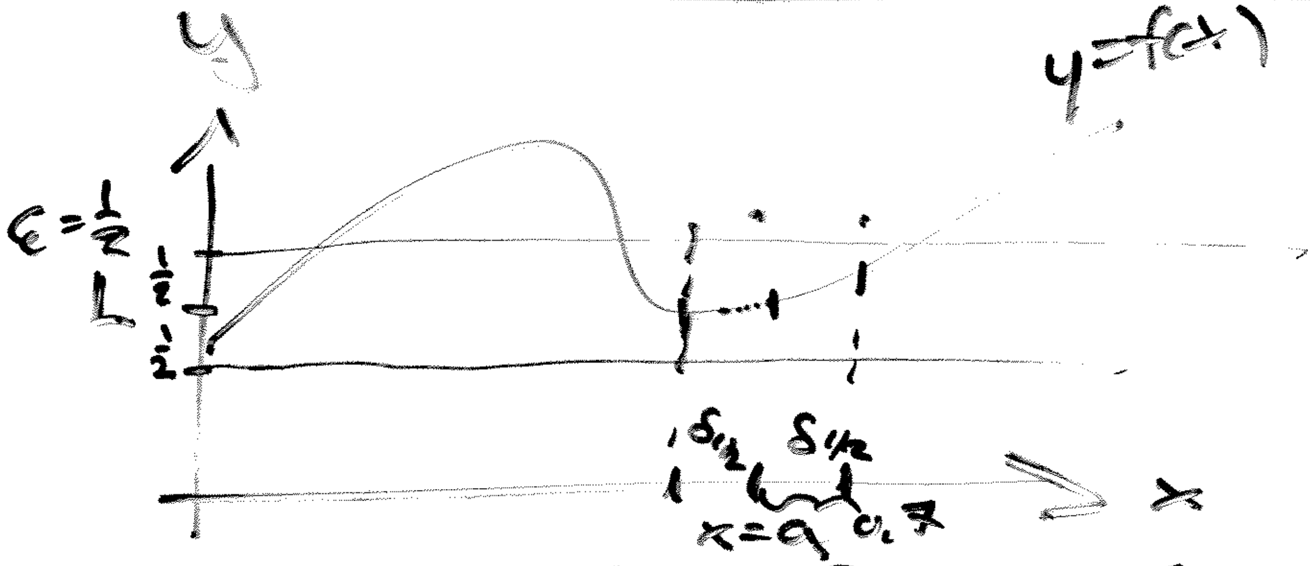
δ- Ville

$$\begin{cases} \text{Funktio } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{piste } a \in \mathbb{R} \\ L \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \to a} f(x) \overset{?}{=} L \end{cases}$$

<u>ε-Kalle:</u> $\varepsilon = \frac{1}{2}$

<u>δ-Ville:</u> Piirtää kuvan funktiosta f pisteen $x=a$ ympäristössä

/ 70



δ-Ville nakitti: $\delta_{1/2} = 0{,}7$.

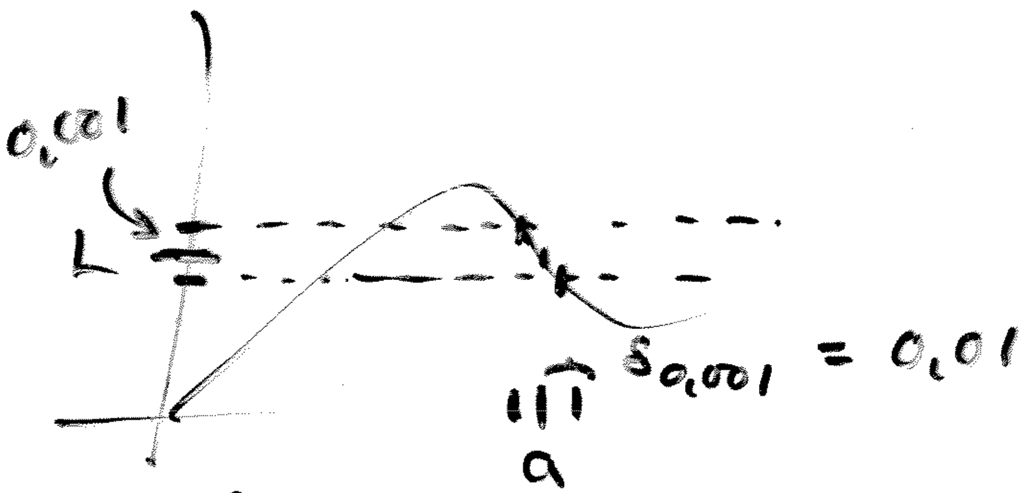
Tarkistavat yhdessä:

ok

$|x-a| < 0{,}7 \Rightarrow |f(x)-L| < \frac{1}{2}$

<u>ε-Kalle:</u> $\varepsilon = 0{,}001$

<u>δ-Ville:</u>



Tarkistetaan

ok

$|x-a| < 0{,}01 \Rightarrow |f(x)-L| < 0{,}001.$

kaksi vaihtoehtoa pelin kulussa

(1) Kalle onnistuu antamaan niin pienen $\varepsilon > 0$, että Ville ei voi "geometriasta syistä" reagoida antamalla vastaavan $\delta_\varepsilon > 0$: Tällöin L ei ole f:n raja-arvo pisteessä $x = a$.

(2) Peli jatkuu ikuisesti.
$\forall \varepsilon > 0$ Ville voi reagoida $\delta_\varepsilon > 0$.
Tällöin: $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

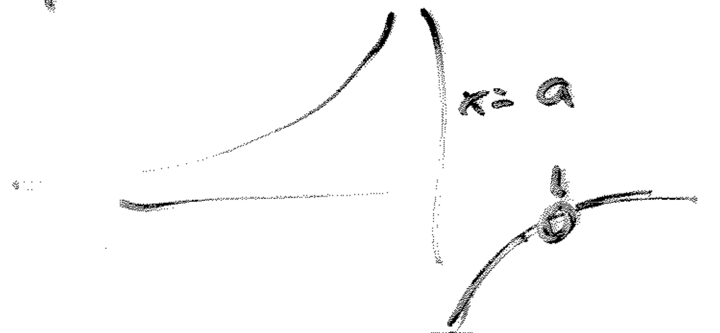
Esim:

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \qquad x \neq a, \ x \neq 0$$

Kun $x \neq 0, a$ niin

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\left(\frac{a - x}{ax}\right)}{x - a} = -\frac{1}{ax}$$

Jos piirretään $f(x) = -\frac{1}{ax}$

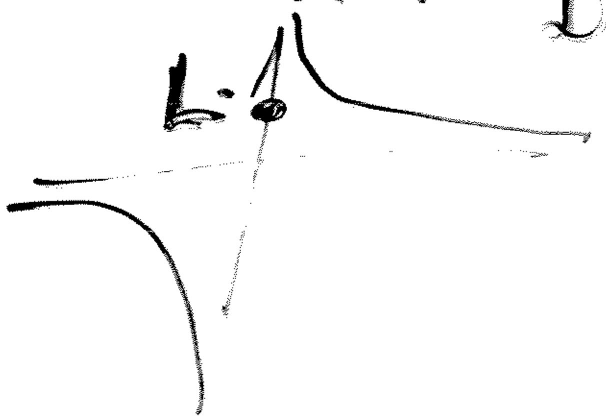


$\lim_{x \to a} f(x) = -\frac{1}{a^2}$

Tarkkaan ottaen nyt meidän pitäisi todistaa δ ja ε avulla, että todellakin $\lim_{x \to a} f(x) = L := -\frac{1}{a^2}$.

<u>Huom:</u> Saattaa käydä niin, että $f(x)$ määritelty pisteen a molemmin puolin, mutta $\nexists$ $\lim_{x \to a} f(x)$

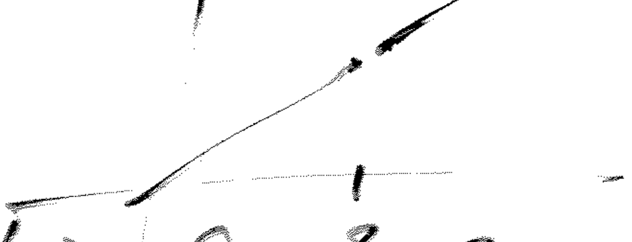
Esim. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



<u>Esim:</u>

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

Tällöin $D(f) = \mathbb{R}$

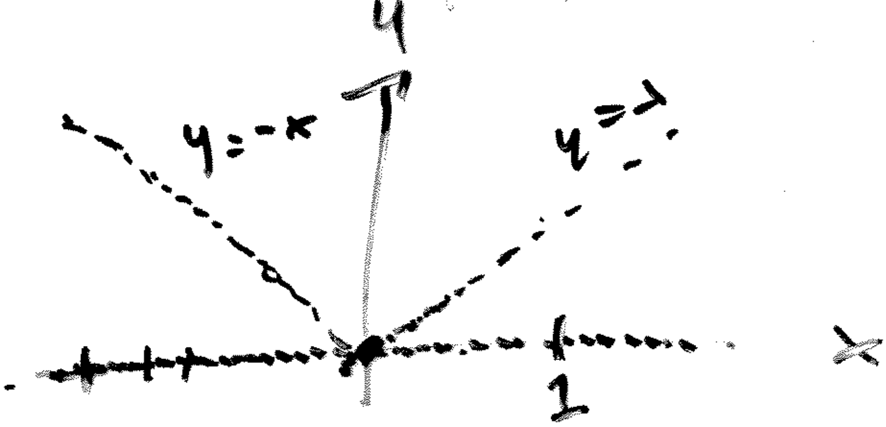


Taas $\lim_{x \to 2} f(x) \overset{?}{=} 2 \neq f(2) = 3$

Esim:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

($\mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko)



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Kaikilla muilla $a \neq 0$ pätee

$$\lim_{x \to a} f(x) \nexists.$$

Esim:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$$ koska

"vasen ja oikea raja-arvo" ovat erisuuria.

Raja-arvot lukujonojen kautta nähtynä

Jos $L = \lim_{x \to a} f(x)$

ja lisäksi olisi jono lukuja $\{x_n\}$, $|x_n - a| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Tällöin

kun $n \to \infty$, $|f(x_n) - L| \to 0$

Käänteinen menetelmä raja-arvon löytämiseksi ei toimi:

Jos keksimme jonkin jonon $x_n \to a$ ja havaitaan, että $f(x_n) \to L$, niin ei seuraa että

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Voisi tapahtua niin että kaksi eri tapaa valita lukujono antaisi eri raja-arvo-kandidaatin.

Vasemman ja oikeanpuoleiset raja-arvot

Määr: Funktiolla f on vasen raja-arvo L pisteessä a:

$$L = \lim_{x \to a-} f(x)$$

jos

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{s.e.}$$

$$a - \delta_\varepsilon < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Oikeanpuoleinen raja-arvo määritellään analogisesti.