Koska $\begin{cases} A^{-1}A = I = [\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n] \\ A A^{-1} = I = [\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n] \end{cases}$ (*)

Käytetään hyväksi (*): **4.10.2007**

$$A\,[\bar{b}_1\ \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_n]$$
$$= [A\bar{b}_1\ A\bar{b}_2 \cdots A\bar{b}_n]$$
$$= [\bar{e}_1\ \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n]$$

$\Leftrightarrow$ $$A\bar{b}_j = \bar{e}_j\ ; \quad j = 1, \dots, n.$$

Nämä yhtälöt voidaan ratkaista Cramerin säännöllä:

$$b_{ij} = \frac{\det A_i(\bar{e}_j)}{\det A}.$$

Kehittämällä $\det A_i(\bar{e}_j)$ i:nnen pystyrivin suhteen saadaan

$$\det A_i(\bar{e}_j) = (-1)^{i+j}\,|A_{ji}|$$

Jossa A_{ji} on elementtiin $a_{j,i}$ liittyvä alideterminantti; ts.

Ts.
$$\det A_i(\bar{e}_j) = C_{ji}$$

jossa C_{ji} on elementtiin $a_{j,i}$ liittyvä kofaktori.

Huom: Kaavassa esiintyy A_{ji} ! Transponointi

jo C_{ji}, eikä A_{ij} tai C_{ij}.

Matriisien ominais-arvot ja ominaisvektorit

Määr: A olkoon $n \times n$ – matriisi. Vektori $\bar{x} \neq \bar{0}$ on A:n ominais-vektori mikäli on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten että

$$(*) \qquad A\bar{x} = \lambda \bar{x}$$

Jos λ toteuttaa yhtälön $(*)$ jollain ominaisvektorille $\bar{x} \neq \bar{0}$, niin λ kutsutaan ominaisvektoriin $\bar{x}$ liitetyksi ominaisarvoksi.

Lause: Diagonaalimatriisin tai yleisemmin yläkolmiomatriisin ominaisarvot ovat diagonaalielementit.

Esim: Olkoon $\underset{n\times n}{A} := \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$0 \neq \bar{x}$ on A:n ominaisvektori ominais-arvolla λ jos homog. yhtälöryhmällä

$$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$$

on epätriviaali ratkaisu $\bar{x} = \bar{0}$.

$\Leftrightarrow \quad N(A - \lambda I) \neq \{\bar{0}\} \quad \Leftrightarrow \quad A - \lambda I$ ei kääntyvä

20

$\det(A - \lambda I) = 0$.

Esimerkin tapauksessa

$$\det(A-\lambda I) = \det(\alpha I - \lambda I)$$
$$= \det(\alpha-\lambda) I = \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & & & 0 \\ & \alpha-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha-\lambda \end{vmatrix}}_{n \text{ kpl}}$$
$$= (\alpha-\lambda)^n = 0.$$

Ts. $\lambda = \alpha$. Ominaisarvoja 1 kpl.

Mitkä ovat vektorit $\bar{x} \neq 0$ joille

$$(A - \lambda I)\bar{x} = \underbrace{(\alpha-\lambda)}_{=0} I \bar{x} = \bar{0}$$

Ts. kaikki $\bar{x} \neq \bar{0}$ ovat ominaisarvoon $\lambda = \alpha$ liittyviä ominaisvektoreita.

<u>Määr</u>: Jos λ on A:n ominaisarvo, niin $N(A-\lambda I)$ kutsutaan lukuun (vektoriavaruutta) λ liittyvä <u>ominaisavaruus</u> (eng. eigenspace.) Tämän avaruuden dimensio $\dim N(A-\lambda I)$ on ominaisarvon λ <u>geometrinen kertaluku</u> (engl. geometric multiplicity)

Lause! Olkoon A $n \times n$ - matriisi, jolla on ominaisvektorit

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r\}$$

joita vastaavat (samassa järjestyksessä) ominaisarvot

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r.$$

Jos kaikki λ_j:t ovat keskenään erisuuria, niin tällöin ominaisvektoreiden jonoke on lin. vapaa.

Perustelu! Olisiko niin että pätyä pahuntaan? Yleispätkä menettämättä voidaan "vastaolettaa" (tarvittaessa järjestystä vaihtamalla) että jonoke

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_p\}$$

on lin. vapaa mutta

$$\{\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_p\ \bar{v}_{p+1}\}$$

on lin. riippuva; $p+1 \leq r$.

Ts. olisi olemassa vakiot $c_1 \dots c_p$ siten että

$$(*) \quad \bar{v}_{p+1} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + \dots + c_p \bar{v}_p$$

Kertomalla yht. molemmat puolet A:lla saadaan (koska $A\bar{v}_j = \lambda_j \bar{v}_j$)

$$A\bar{v}_{p+1} = c_1 A\bar{v}_1 + c_2 A\bar{v}_2 + \dots + c_p A\bar{v}_p$$

$$\shortparallel$$

(**) $\lambda_{p+1}\bar{v}_{p+1} = c_1\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_2\bar{v}_2 + \dots \; c_p\cdot\lambda_p\bar{v}_p.$

Toisaalta, kertomalla yhtälö (*) luvulla λ_{p+1} saadaan

(***) $\lambda_{p+1}\bar{v}_{p+1} = c_1\lambda_{p+1}\bar{v}_1 + c_2\lambda_{p+1}\bar{v}_2 + \dots + c_p\lambda_{p+1}\bar{v}_p$

Yhdistämällä (**) ja (***) saadaan

$$c_1\underbrace{(\lambda_1-\lambda_{p+1})}_{\neq 0}\bar{v}_1 + c_2\underbrace{(\lambda_2-\lambda_{p+1})}_{\neq 0}\bar{v}_2 + \dots + c_p\underbrace{(\lambda_p-\lambda_{p+1})}_{\neq 0}\bar{v}_p = \bar{0}$$

$\lambda_j - \lambda_{p+1} \neq 0 \quad \forall j$ koska niin oletettiin.
Toisaalta $\{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p\}$ oli lin. vapaa

$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0.$

Nyt kaava (*) sanoo $\bar{v}_{p+1} = \bar{0}$.
Tämä on ristiriita; ominaisvektori ei ole nolla. Ristiriita todistaa väitteen ∎

50

Määr: Funktiota $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

kutsutaan matriisin A **karakteristiseksi polynomiksi**.

Lause: Matriisin A ominaisarvot ovat täsmälleen karakteristisen polynomin nollakohtia.

Lause: Karakteristinen polynomi on itse asiassa polynomi. Jos A on $n \times n$, niin polynomi on astetta n.

Perustelu: Esimerkin avulla ($n=3$)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \det(A - \lambda I)$$

$$= \underbrace{\overbrace{(a_{11}-\lambda)}^{\text{astetta } 1} \overbrace{\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}}^{\text{astetta 2 ja polynomi}}}_{\text{astetta } 3.}$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Matriisilla $\underset{n \times n}{A}$ on siis korkeintaan n kpl ominaisarvoja (koska n. asteen polynomilla on korkeintaan n kpl erisuuria nollakohtia kompleksitasossa $\mathbb{C}$).

- Reaalilukuisista kertoimista matriisilla on tyypillisesti aidosti kompleksisia ominaisarvoja. Toisaalta reaalielementtisen matriisin kar. pol.

$$\det(A - \lambda I) = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_n \lambda^n$$

on reaalikertoiminen: $p_0, p_1 \dots p_n \in \mathbb{R}$
Kompleksilukupiirteet tällaiselle polynomille esiintyvät konjugaattipareittain.

- Jos $n > 4$, niin n. asteisen polynomiyhtälön ratkaisua ei yleisesti anneta "alkeisfunktioita sisältävällä kaavalla".
  $\Rightarrow$ numeerinen menetelmä, likimääräinen ratkaisu. (Newtonin menetelmä.)

<u>Määr</u>: Jos $\lambda \in \mathbb{C}$ on yhtälön

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

k-kertainen juuri, niin tällöin sanotaan että λ:n <u>algebrallinen</u> <u>multiplisiteetti</u> on k.

/ to

Lemma: Jos λ on A:n ominaisarvo, niin tällöin λ:n

algebrallinen kertaluku

$\geq$

geometrinen kertaluku.

Perustelu ohitetaan.

Matriisien similaarisuus

Määr: $n \times n$-matriisit A ja B ovat similaarisia jos $\exists$ kääntyvä matriisi P s.e.

$$A = PBP^{-1}$$

$$\left(AP = PB \right).$$

Matriisien similaarisuus on ekvivalenssirelaatio!

Määr: Kuvaus $(P, P^{-1} \exists)$

$$B \longmapsto PBP^{-1}$$

on n.k. similaarisuuskuvaus.

Lause: Similaarisilla matriiseilla on samat karakteristiset polynomit.

Korollaari. Similaaristen matriisien ominaisarvot ovat samoja.

Perustelu:

$$\begin{cases} A = PBP^{-1} \\ B = P^{-1}AP \end{cases}$$

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I$$

$$= P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I)P$$

$$= P^{-1}(A - \lambda I)P$$

Ottamalla determinantti

$$\det(B - \lambda I) = \det\left(P^{-1}(A - \lambda I)P\right)$$

$$= \det P^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P$$

$$= \det P^{-1} \cdot \det P \cdot \det(A - \lambda I)$$

$$= \underbrace{\det(\underbrace{P^{-1}P}_{I})}_{=1} \cdot \det(A - \lambda I)$$

Määr. Matriisi $A_{n\times n}$ on **diagonalisoituva**, mikäli se on similaarinen jonkin diagonaalimatriisin

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

kanssa.

1_0 Diagonaalimatriisin potenssit

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$$

2_0 Diagonaalimatriisin polynomit:

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m$$

niin määritellään

$$p(D) = p_0 I + p_1 D + p_2 D^2 + \cdots + p_m D^m.$$

ja saadaan

$$p(D) = \begin{bmatrix} p(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(d_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p(d_n) \end{bmatrix}$$

(3) Eksponenttifunktio e^D

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Taylorin sarjalla kuten kompleksiluvuille

$$e^D = I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{1}{3!} \cdot D^3 + \cdots$$

ja saadaan kuten kohdissa (1) ja (2)

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_3} \end{bmatrix}$$

Pointti: Diagonalisoituvan matriisin $A = PDP^{-1}$ tapauksessa A^k, $p(A)$, e^A voidaan laskea samalla tavoin ... ensi tiistaina.

11