Täten determinantin merkki vaihtuu, jos vierekkäisiä rivejä vaihtamaan paikkaansa (transpositio)

3.10.2007

Rivien (1) ja (3) vaihto:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix} \xrightarrow{-1} \begin{matrix}(2)\\(1)\\(3)\end{matrix} \xrightarrow{-1} \begin{matrix}(2)\\(3)\\(1)\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{-1} \begin{matrix}(3)\\(2)\\(1)\end{matrix}$$

Tarvittiin pariton määrä transpositioita. TJEU.

Perustelu kohdalle (a)

Esitiedes: Jos determinantissa on kaksi samaa vaaka- tai pystyriviä, niin se = 0.

Seuraa siitä, että kahden identtisen vaakarivin vaihto ei muuta merkkiä, toisaalta muuttaa merkin päinvastaiseksi
$\Rightarrow \det \equiv 0$.

ehitä →

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ra_{21} & a_{12}+ra_{22} & a_{13}+ra_{23} & \cdots & a_{1n}+ra_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}+ra_{21})|A_{11}| - (a_{12}+ra_{22})|A_{12}| + \cdots (a_{1n}+a_{2n})(-1)^{1+n}|A_{1n}|$$

$$= \underbrace{a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A_{1n}|}_{=|A|}$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} ra_{21} & ra_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=0}$$

(välitulos) ∎

<u>Esim.</u> Kirjasta s. 193

$$\begin{vmatrix} \boxed{2} & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)+ \quad \cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)+ \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+$$

$$= \left| \quad \right| = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot\left(1\cdot 3\cdot(-6)\cdot 1\right) = \underline{\underline{-36}}.$$

Lause: Olkoon A neliömatriisi. Tällöin $\det A = \det A^T$.

Perustelu. Determinantti voidaan kehittää mielivaltaisen vaaka- tai pystyrivin suhteen arvon siitä muuttumatta. Toisaalta matriisin A vaakarivit on A^T:n pystyrivejä. ■

Lause: Jos A ja B ovat $n\times n$ - matriiseja, niin

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Motivaatio:

$$\det \underset{n\times n}{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{yläkolmio}}{=} 1$$

Jos A on kääntyvä; ts. $\exists\, A^{-1}$ siten että $\underset{n\times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{I}$.

B...

niin soveltamalla determinantteja yhtälön molempiin puoliin

$$\det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A$$
$$= \det I = 1$$

Ts. kääntyvälle matriisille

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Myös voidaan antaa riittävä ja välttämätön ehto matriisin A kääntyvyydelle:

$$A^{-1} \exists \iff \exists C \text{ s.e. } CA = I$$

$$\iff \det C \cdot \det A = 1 \text{ josse } \det A \neq 0.$$

Myös matriisin A transpoosille pätee

$$A \text{ kääntyvä} \iff A^T \text{ kääntyvä}$$

Koska A:n kääntyvyys on ekvivalenttia $\det A \neq 0$ joka ekvivalentti $\det A^T \neq 0$.

<u>Perustelu:</u> Tutkitaan ensin sitä tapausta, jolloin A tai B ei ole kääntyvä.

$\Rightarrow$ tällöin AB ei myöskään ole kääntyvä.

Jos ensin Rank $\underset{n\times n}{A} < n$

niin tällöin Rank $AB < n$.

koska

Range $AB \subseteq$ Range A.

Ts. jos $\det A = 0 \Rightarrow \det AB = 0$.

Jäljelle jää tutkittavaksi tapaus, kun $\det A \neq 0$ ja $\det B \neq 0$.

Koska A on kääntyvä, niin se voidaan saattaa redusoituun porrasmuotoon Gaussin alkeisrivioperaatioilla

$$\underbrace{E_n' \cdots \cdots E_2' E_1'}_{A^{-1}} \underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{I}$$

Siis $A^{-1} = E_n' E_{n-1}' \cdots E_2' E_1'$,

ja

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_n' E_{n-1}' \cdots E_2' E_1')^{-1}$$

$$= \overbrace{(E_1')^{-1}}^{:=E_1} \cdot \overbrace{(E_2')^{-1}}^{:=E_2} \cdot \cdots \overbrace{(E_{n-1}')^{-1}}^{:=E_{n-1}} \overbrace{(E_n')^{-1}}^{:=E_n}$$

koska aina $(NM)^{-1} = M^{-1}N^{-1}$

dressing - undressing - periaatteen kautta.

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots E_n$$

jossa myös matriisit $E_1, \dots, E_n$ ovat elementaarimatriiseja vastaten eräitä Gaussin alkeisrivioperaatioita.

(Havainto: Jokainen kääntyvä matriisi voidaan esittää tulona elementaarimatriiseja.)

Tutkitaan nyt identtiä

$$\det(AB) = |AB|$$

(*)

$$= |E_n E_{n-1} \cdots E_1 B|$$

Mutta tiedämme kuinka matriisilla E_j operoiminen vaikuttaa determinanttiin. Käytällä hyväksi

$$\det E_p = \begin{cases} -1 & \text{jos rivinvaihto} \\ r & \text{jos rivi kerrotaan } r\text{:llä} \\ 1 & \text{jos yhden rivin monikerta lisätään toiseen riviin} \end{cases}$$

Tämän huomion avulla voidaan "purkaa" tulo kaavasta (*):

$$|E_n \cdot (E_{n-1} \cdots E_1 B)|$$

$$= |E_n| \cdot |E_{n-1} \cdots E_1 B|$$

$= |E_n| \cdot |E_{n-1}| \cdot |E_{n-2} \cdots E_2 B|$

lopulta

$= |E_n| \cdot |E_{n-1}| \cdot |E_{n-2}| \cdots |E_2| \cdot |B|$

Toisaalta, koska $A = E_n \cdot E_{n-1} \cdots E_1$, niin

$$|A| = |E_n| \cdot |E_{n-1}| \cdots |E_2|$$

$$\Rightarrow = |E_n \cdots E_2|.$$

yhdistämällä saatiin $|AB| = |A| \cdot |B|$.

<u>Huom!</u> Yleisesti $AB \neq BA$.

Silti

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$= \det B \cdot \det A = \det(BA).$$

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen Cramerin säännöllä

<u>Notaatiota:</u> Olkoon A $n \times n$-matriisi. Ratkaistaan $A\bar{x} = \bar{b}$. Kirjoitetaan

$$A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n]$$

ja

$$A_i(\bar{b}) = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i.\ \text{paikka}}}{\bar{b}} \ \bar{a}_{i+1} \cdots \bar{a}_n]$$

$i = 1, \ldots, n.$

<u>Lause</u>: Jos A on kääntyvä $n \times n$-matriisi. Kirjoitetaan

$$\bar{x} = [x_1 \ x_2 \cdots x_n]^T.$$

Jos $\bar{x}$ on ratkaisu yhtälöryhmälle $A\bar{x} = \bar{b}$, niin tällöin

$$x_i = \frac{\det A_i(\bar{b})}{\det A} \quad \text{jossa}$$

$i = 1 \cdots n.$

(Cramerin sääntö).

<u>Perustelu</u>: $n \times n$ identiteettimatriisi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\underset{n\times n}{I} = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n]$$

jossa $\bar{e}_i = [0 - 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ i.\ \text{paikka}}}{1} \ 0 - 0]^T$.

Tällöin

$$I_i(\bar{x}) := [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i.\ \text{paikka}}}{\bar{x}} \cdots \bar{e}_n]^T$$

Lasketaanpa kuitenkin

$$A \cdot I_i(\bar{x})$$

$$= [A\bar{e}_1,\ A\bar{e}_2 \cdots\ \underset{\text{i. paikka}}{A\bar{x}} \cdots A\bar{e}_n]$$

$$= [\bar{a}_1\ \ \bar{a}_2 \cdots\ \underset{\text{i. paikka}}{\bar{b}} \cdots \bar{a}_n]$$

$$= A_i(\bar{b})$$

Determinantit päästä ja hännästä:

$$\det\left(A \cdot I_i(\bar{x})\right) = \det A \cdot \underbrace{\det I_i(\bar{x})}$$

$$= \det A_i(\bar{b}).$$

Koska $A^{-1}\ \exists$, niin $\det A \neq 0$.

Siis

$$\det I_i(\bar{x}) = \frac{\det A_i(\bar{b})}{\det A}$$

Nyt

$$|I_i(\bar{x})| = \begin{array}{c} \text{i. paikka} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & x_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & x_n & \vdots & & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Kehittämällä i. pystyrivin mukaan

kaikki termit katoavat, paitsi se joka kertoo x_i:n.
(Kaikki alideterminantit jotka kertovat lukuja x_j, $j \neq i$, sisältävät identtisen nollarivin).

Seuraa

$$\det I_i(\bar{x}) = x_i \cdot \overbrace{\det I_{(n-1)\times(n-1)}}^{=1} = x_i$$

Esim: Etsi kaikki luvut $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} 3s x_1 - 2x_2 = 4 \\ -6x_1 + s x_2 = 1 \end{cases}.$$

joilla yhtälöllä on yksikäsitt. ratkaisu. Etsi tämä ratkaisu sillloin kun se on mahdollista.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{vmatrix} = 3s^2 - 12 = 3(s+2)(s-2)$$

Ts. yksikäsitt. ratkaisu $\exists$ jos ja vain jos $s \neq 2, -2$.
Kun näin on, niin

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{vmatrix}} = \frac{4s+2}{3(s+2)(s-2)}$$

ja samoin

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{3s+24}{3(s+2)(s-2)}.$$

Kaava käänteismatriisille

Olkoon A $n \times n$-matriisi.

Merkitään

$$A^{-1} = [\,\bar{b}_1 \;\; \bar{b}_2 \;\cdots\; \bar{b}_n\,]$$

jossa

$$\bar{b}_j = [\,b_{j1} \;\; b_{j2} \;\cdots\; b_{jn}\,]^T$$

jolloin

$$A^{-1} = [\,b_{jk}\,]_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}}.$$