2.10.2007

Lause: Vektorin $\bar{x}$ esitys kannassa $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n\}$ on yksikäsitteinen; ts. koordinaatit ovat yksikäsitteisiä.

Perustelu: Oletetaan, että väite olisi pötyä:

$$\bar{x} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + \cdots + x_n\bar{v}_n$$
$$= y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 + \cdots + y_n\bar{v}_n$$

$\Rightarrow$

$$(x_1 - y_1)\bar{v}_1 + (x_2 - y_2)\bar{v}_2 + \cdots$$
$$\cdots + (x_n - y_n)\bar{v}_n = \bar{0}$$

Koska kanta on lin. vapaa, tämä yhtälö voi toteutua vain jos kertoimet ovat nollia!

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots = x_n - y_n = 0 \quad \blacksquare$$

1.

<u>Rangilause</u>: Jos matriisilla A on n kpl pystyvektoreita
mxn
niin tällöin

$$\dim \operatorname{Range} A + \dim N(A) = n.$$

<u>Määr</u>: <u>Luku</u> $\dim \operatorname{Range} A$ kutsutaan matriisin A <u>rangiksi</u> (rank):

$$\operatorname{rank} A := \dim \operatorname{Range} A.$$

<u>Perustelu rangilauseelle</u>:
Gaussittamalla A porrasmuotoon saadaan porrasmatriisi jossa on n kpl pystyvektoreita.
Näitä pystyvektoreita on kahdenlaisia
1. pystyrivit, jotka sisältävät tukialkion

2° pystyrivit jotka eivät sisällä tukialkiota.

Jos tutkitaan homogeenista yhtälöryhmää $A\bar{x} = \bar{o}$ (eli nolla-avaruutta $N(A)$) niin avaruuden $N(A)$ dimensioksi (vapaussasteiden lukumääräksi) saatiin niiden pystyrivien luku, joilla ei tukialkiota (vapaat muuttujat!).

Toisaalta, tukialkion sisältävät pystyrivit porrasmuotoisessa matriisissa antavat meille A:n vastinpystyriveiltä lin. vapaan joukon A:n pystyvektoreita, jotka virittävät avaruuden Range A.

Tämä johtuu siitä, että A:n ja sen porrasmuodon $\tilde{A}$ pystyvektoreiden väliset lin. kombinaatiosuhteet ovat samoja koska

$$A\bar{x} = \bar{o} \iff \tilde{A}\bar{x} = 0.$$

(Layn kirja s. 172.)

3°.

Ranglause seuraa tästä, koska

dim $\mathcal{N}(A)$ = vapaiden muutt. lukumäärä

rank A = tukialkiopysty-rivien määrä

yhteensä näitä on yhtä monta kuin matriisilla A pystyvektoreita $\square$

Lisäehtoja kääntyvän matriisin lauseeseen

Lause: Olkoon A $n \times n$-matriisi. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja

(l) A on kääntyvä

(m) A:n pystyvektorit muodostavat kannan

(n) Range $A = \mathbb{C}^n$

(o) Rank $A = n$

(p) dim $\mathcal{N}(A) = 0$

(q) $\mathcal{N}(A) = \{0\}$.

Perustelu:

Muuten vanhaa kamaa, paitsi (o) ja (p) samaa dimensiolauseesta.

Determinantit

Olkoon A <u>$n \times n$</u> -matriisi.

Matriisin A <u>determinantti</u> on eräs kompleksiluku, joka muodostetaan A:n matriisielementeistä seuraavien laskusääntöjen avulla:

<u>$n = 1$</u>

$$A = [a_{11}]; \quad \det A := a_{11}$$

<u>$n = 2$</u>

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Yleinen tapaus tehdään seuraavalla <u>rekursiivisella</u> <u>määritelmällä</u>:

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tällön

$$\det A = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \underset{(n-1)\times(n-1)}{A_{11}}$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \underset{(n-1)\times(n-1)}{A_{12}}$$

$$+ \cdots \quad a_{1n} \cdot (-1)^{1+n} \cdot \det \underset{(n-1)\times(n-1)}{A_{1n}}$$

jossa matriisit A_{1k} saadaan matriisista A poistamalla 1. vaakarivi ja k. pystyrivi (ts. se vaakarivi ja se pystyrivi, jolla matriisielementti a_{1k} sijaitsee).

[illegible]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 5 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{+ 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}}_{=0}$$

[illegible]

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

-28

-2

$$= 4 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

70

Determinantin kehitelmässä esiintyvät (-1):n parilliset tai parittomat potenssit on helpointa muistaa "shakkilaudan" avulla:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \\ + & - & + & - & & \\ - & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$n \times n$

<u>Lause:</u> Determinantti voidaan "kehittää" mielivaltaisen vaaka- tai pystyrivin suhteen:

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

jossa

$$C_{ik} = (-1)^{i+k} \overbrace{|A_{ik}|}^{= \det A_{ik}}$$

ja A_{ik} on se matriisi, joka saadaan A:sta poistamalla i:s vaakarivi ja k:s pystyrivi.

Lukuja $c_{i,k}$, $\begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, n \end{matrix}$

kutsutaan matriisielementtiä

$a_{i,k}$ vastaaviksi <u>kofaktoreiksi</u>

e. <u>kotekijä</u>.

<u>Esim. Lauseen käyttö:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Laske determinantti.

$$|A| = \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}_{=0} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$\begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot |-2| - 0 |5|}_{} = -2$$

<u>Esim:</u> Yläkolmiomatriisi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & & \vdots \\ & & * & & \\ \vdots & & & * & \\ & 0 & & & * \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{bmatrix}}_{n \times n} \qquad * = \text{"hällä väliä"}$$

determinantti on diagonaali-
elementtien tulo: Esim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot (\text{mitä vaan})$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (\text{mitä vaan})$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot |-2| = -56.$$ $\square$

Determinantin laskeminen Gaussin alkeisrivioperaatioille

Lause: Olkoon A neliömatriisi.

(a) Determinantin arvo ei muutu, jos yhden vaaka- (tai pysty) rivin monikerta lisätään toiseen vaaka (tai pystyrivin).

(b) Jos kaksi vaaka (tai pysty)-riviä vaihtaa paikkaansa, niin determinantin arvo tulee kerrotuksi -1:llä.

(c) Jos jokin vaaka (tai pysty)-rivi kerrotaan vakiolla r, niin determinantin arvo tulee r-kertaiseksi.

Perustelu:

(c)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tällöin

$$\begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= ra_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot|A_{11}| + ra_{12}\cdot(-1)^{1+2}|A_{12}|$$
$$+ \cdots + \cdots ra_{1n}\cdot(-1)^{1+n}|A_{1n}|$$

$$= r\left(a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|A_{12}| + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+1}|A_{1n}|\right)$$

$$= r \det A.$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & & \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{array}{l} \\ \text{kehitä} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & & a_{34} \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

shakkikaavion takia, kun kehitetään 2 vaakarivin suhteen, saadaan ylimääräinen miinus-merkki.